Vladimir Petković, asistent
Fakultet organizacije i informatike
Varaždin

UDK 65.012.1:681.32
Znanstveni rad

RAZMJEŠTAJ GEOMETRIJSKIH OBJEKATA UZ PRIMJENU ELEKTRONIČKIH RAČUNALA

Radom se razmatra jedan problem razmještaja geometrijskih objekata za jedan praktičan slučaj u jednodimenzionalnom krojenju materijala. Konstruirani model riješen je elektroničkim računalom UNIVAC-1100 za koji je napisan program u FORTRAN-u V.

1. UVOD

U industrijskoj proizvodnji često se susreće problem krojenja materijala. Ekonomično krojenje pretpostavlja korištenje krojnih shema koje daju minimalni otpad, odnosno, visoki postotak iskorištenja materijala. Da bi se ti ciljevi ostvarili, potrebno je konstruirati odgovarajuće krojne sheme.

Teorija razmještaja geometrijskih objekata koristi matematičke metode za izbor optimalnih krojnih shema razmještaja uz zadana ograničenja. U ovom radu razmatra se razmještaj geometrijskih objekata u jednoj dimenziji. Kao pomoćno sredstvo u izračunavanju optimalnih rezultata korišteno je elektroničko računalo UNIVAC-1100. Metoda izračunavanja optimalnih rezultata preuzeta je iz radova Gilmore i Gomory-a.

2. JEDAN GILMORE-GOMORYJEV PRISTUP PROBLEMU RAZMJEŠTAJA OBJEKATA

Problem jednodimenzionalnog razmještaja objekata može se opisati na slijedeći način:

Zadane su oblasti razmještaja $L_1, \ldots, L_k$ nekog materijala. Na te oblasti potrebno je razmjestiti N_i objekata duljine l_i, $i=1, 2, \ldots, m$. Svakoj oblasti razmještaja odgovara cijena c_i te je ukupna vrijednost programa suma cijena oblasti koje se koriste. Problem se sastoji u ispunjenju zahtijeva za pojedinim objektima uz minimalnu ukupnu cijenu.

Shema razmještaja predstavlja način na koji se objekti duljina $l_1, \ldots, l_m$ raspoređuju na oblasti $L_1, \ldots, L_k$. Dodjeljujući svakoj shemi razmještaja varijable $x_1, \ldots, x_n$, koje pokazuju koliko puta se shema razmještaja koristi, problem razmještaja može se matematički formulriati kao problem cjelobrojnog linearnog programiranja: /2, 1961/

$$\min Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

uz ograničenja

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geqq N_i \; (i=1, \ldots, m)$$
$$x_j \geqq O \text{ i cijeli broj } (j=1, \ldots, n)$$

gdje a_{ij} predstavlja broj objekata duljine l_i na j-toj shemi razmještaja. Uvođenjem m dopunskih varijabli sistem prelazi u kanonski oblik.

Kod ovako formuliranog problema postoje dvije osnovne poteškoće u praktičnoj primjeni metode razmještaja i programiranja za elektroničko računalo.

Prvo, veličina modela koji rezultira za relativno male brojeve k i m neprimjenljiva je i za najveće postojeće kompjutore. Drugo, uvjet cjelobrojnosti zahtijeva složenu proceduru za izračunavanje optimalnog rješenja. Rješenje ovih problema je slijedeće: /2, 1961/

Uvjet cjelobrojnosti rješenja može se jednostavno ispustiti s time da se dobiveno rješenje zaokruži. Kod problema iz prakse većih dimenzija ovakav postupak dovodi do neznatnog povećanja funkcije cilja koje se može tolerirati.

Smanjivanje dimenzija modela može se riješiti na dva načina. Prvo je izbacivanje dopunskih varijabli. Na taj način smanjeni model i dalje je vrlo velik jer je broj stupaca koji se izbacuju relativno malen. Međutim, zadržavanje dopunskih varijabli u modelu pruža mogućnost da dobiveni optimum sadrži manji broj različitih shema razmještaja, a zakoruživanje necjelobrojnih rješenja pogodnije je ako su uključene dopunske varijable.

Drugi način smanjivanja dimenzija modela jest taj da se izbor novog bazičnog vektora ne rješava klasičnim postupkom, već se u simpleks tabeli računa samo s bazičnim vektorima, dok se za izbor novog bazičnog vektora, koji poboljšava tekuće rješenje, rješava pomoćni knapsack problem. Matematička formulacija ovog problema je slijedeća: /2, 1961/

$$L \geqq l_1a_1 + \ldots + l_ma_m$$
$$b_1a_1 + \ldots + b_ma_m > c$$
$$a_i \geqq O \text{ i cijeli broj } (i=1, \ldots, m).$$

Za izbor novog bazičnog vektora potrebno je riješiti k pomoćnih problema (za svaku oblast $L_1, \ldots, L_k$). Ovako formulirani problem može se riješiti dinamičkim programiranjem prema slijedećoj rekurzivnoj formuli: /3, 1963/

$$F_{s+1}(x) = \max_{r} \{rb_{s+1} + F_s(x - rl_{s+1})\}$$

gdje je $F_s(x)$ maksimum nejednadžbe $b_1a_1 + \ldots + b_sa_s$ uz uvjet $x \geqq l_1a_1 + + \ldots + l_sa_s$. Parametar r izračunava se tako da je $O \leqq r \leqq [x/l_{s+1}]$.

Računajući $F_m(L)$ za najdulju oblast L, automatski se dobivaju i $F_m(L)$ za ostale kraće oblasti, pa je prema tome potrebno jedno računanje dinamičkim programiranjem za rješavanje k pomoćnih problema za izbor novog bazičnog vektora.

Kada novi bazični vektor reprezentira shemu razmještaja koja sadrži samo jedan objekt, traženje tog vektora može se povjeriti bržoj »ad hoc« metodi.

Čitava procedura traženja optimalnog rješenja jednodimenzionalnog problema razmještaja može se prikazati u slijedećih pet koraka: /2, 1961/

1. odrediti m početnih shema razmještaja s njihovim cijenama tako da je $L_j \geqq l_i$ te definirati i-tu shemu s $a_{ii} = [L_j/l_i]$,

2. formirati $(m+1)(m+1)$ matricu B:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -c & -c & \ldots & -c_m \\ 0 & a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

te izračunati

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & c_1/a_{11} & c_2/a_{22} & \ldots & c_m/a_{mm} \\ 0 & 1/a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{22} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1/a_{mm} \end{bmatrix}.$$

3. i-ta dopunska varijabla poboljšava tekuće rješenje onda i samo onda ako je $i+1$ elemenat prvog retka B^{-1} negativan. Vektor P na $i+1$ mjestu sadrži vrijednost —1, dok su ostale komponente vektora jednake nuli,

4. riješiti prethodno opisani pomoćni problem. Ako ne postoji rješenje knapsack problema, tekuće rješenje je optimalno, dok u protivnom, formira se vektor P koji ulazi u bazu s elementima $[-c\ a_1, a_2, \ldots, a_m]$,
5. transformacija baze vektorskog prostora pomoću Gaus-ovih formula transformacije. Vektor P koji ulazi u bazu množi se s B^{-1} i novodobiveni vektor $(y_1, \ldots, y_m, y_{m+1}]$ predstavlja vodeći stupac. Izbor vodećeg reda odvija se traženjem najmanjeg pozitivnog kvocijenta x_i/y_i za $i=2, \ldots, m+1$, gdje su x_i elementi tekućeg vektora N. Procedura se nastavlja ponavljanjem koraka 3, 4 i 5.

Kod postavljanja početnog programa i zamjene vektora potrebno je kontinuirano zapisivati sheme razmještaja koje korespondiraju bazičnim vektorima.

3. PROGRAMSKA PODRŠKA RAZMJEŠTAJU OBJEKATA

Za proceduru opisanu u prethodnom poglavlju napisan je program za elektroničko računalo UNIVAC-1100 u višem programskom jeziku FORTRAN V. Program se sastoji od glavnog programa i tri potprograma. Potprogrami ULAZ i ISPIS služe za unos podataka i ispitivanje optimalnog rješenja. U glavnom programu nalazi se kompletna knapsack procedura za izbor novog bazičnog vektora kao i test optimalnosti tekućeg rješenja. Program TRANS mijenja bazu vektorskog prostora te ujedno zapisuje shemu razmještaja. Zbog veće preglednosti programa ispred svake zaokružene programske cjeline dati su odgovarajući komentari. U nastavku slijedi ispis glavnog programa i potprograma TRANS.

```
      INTEGER OBD(20),OBC(2),EL(50),EZA(50),X1(400),
      -RF(400),PP(51)
      DIMENSION G(51,53),IVAR(50),ISHE(50,50),F(400,50)
      CALL ULAZ(M,N,OBD,OBC,EL,EZA,KOR,DIF)
C POSTAVLJANJE POČETNOG RJEŠENJA
C ZA POSTAVLJANJE KORISTI SE NAJDULJA OBLAST RAZMJEŠTAJA
      G(1,1)=1.
      DO 4 I=2,N+1
      J=I—1
      G(1,I)=—OBC(M)
4     G(I,I)=OBD(M)/EL(J)
C ZAPIS POČETNOG RJEŠENJA
      DO 5 I=1,N
      IVAR(I)=M
      J=I+1
5     ISHE(I,I)=G(J,J)
C RAČUNANJE NOVE MATRICE B
      DO 6 I=2,N+1
      G(1,I)=—G(1,I)/G(I,I)
6     G(I,I)=1/G(I,I)
      I1=N+2
      I2=N+3
C RAČUNANJE PROŠIRENE MATRICE G
      DO 7 I=1,N+1
      G(I,I1)=0.
      DO 7 J=2,N+1
      K=J—1
7     G(I,I1)=G(I,I1)+G(I,J)—EZA(K)
C RJEŠAVANJE POMOĆNOG (KNAPSACK) PROBLEMA
C AD HOC METODA ZA RAZMJEŠTAJ JEDNOG OBJEKTA NA BILO
C KOJOJ OBLASTI
31    DO 8 I=1,M
      I3=M—I+1
      DO 8 J=1,N
      IBR=OBD(I3)/EL(J)
      POM=IBR—G(1,J+1)—DIF
      IF(POM.GT.OBC(I3)) GO TO 99
```

```
8     CONTINUE
C NE POSTOJI RJEŠENJE AD HOC METODOM ZA JEDAN OBJEKT
C DINAMIČKO PROGRAMIRANJE ZA TRAŽENJE RJEŠENJA
      IG=OBD(M)/KOR+1
      DO 10 I=1,IG
10    X1(I)=KOR—(I—1)
      DO 11 I=1,IG
      IPOM=X1(I)/EL(1)
      F(I,1)=G(1,2)—IPOM
11    RF(I,1)=IPOM
      DO 13 J=2,N
      J1=J—1
      DO 13 I=1,IG
      IPO=X1(I)/EL(J)
      F(I,J)=—1.
      K=O
77    INDP=(X1(I)—K—EL(J))/KOR+1
16    TEM=K—G(1,J+1)+F(INDP,J1)
      IF(F(I,J).GE.TEM) GO TO 88
      F(I,J)=TEM
      RF(I.j)=K
88    K=K+1
      IF(K.LE.IPO) GO TO 77
13    CONTINUE
C IZLAZ IZ DINAMIČKOG PROGRAMIRANJA
C ISPITIVANJE — DA LI DINAMIČKO PROGRAMIRANJE DAJE
C VARIJANTU KOJA POBOLJŠAVA TEKUĆE RJEŠENJE
      DO 20 J=1,M
      I=M+1—J
      INDP=OBD(I)/KOR+1
      FTEM=F(INDP,N)—DIF
      IF(FTEM.GT.OBC(I)) GO TO 999
20    CONTINUE
C DINAMIČKO PROGRAMIRANJE NE DAJE POBOLJŠANO RJEŠENJE
C POSTIGNUTO RJEŠENJE JE OPTIMALNO
      CALL ISPIS(IVAR,ISHE,G,M,N,OBD,I1,EL)
      STOP
C NASTAVAK S VARIJANTOM DOBIVENOM AD HOC METODOM
C IBR = BROJ J-TOG OBJEKTA NA I3 OBLASTI
C FORMIRANJE VEKTORA PP
99    PP(1)=—OBC(I3)
      DO 21 I=2,N+1
      PP(I)=O
      K=I—1—J
      IF(K)21,22,21
```

```
22      PP(I)=IBR
21      CONTINUE
        GO TO 555
C FORMIRANJE VEKTORA PP NA BAZI DINAMIČKOG PROGRAMIRANJA
C NA I-TOJ OBLASTI, VARIJANTA SE OČITAVA IZ MATRICE RF
999     PP(1)=—OBC(I)
        K=N
        IPM=OBD(I)
23      IPO=IPM/KOR+1
        J1=K+1
        PP(J1)=RF(IPO,K)
        IPM=IPM—RF(IPO,K)—EL(K)
        K=K—1
        IF(K)23,555,23
C RAČUNANJE B′—PP
555     DO 24 I=1,N+1
        G(I,I2)=O.
        DO 24 J=1,N+1
24      G(I,I2)=G(I,I2)+G(I,J)—PP(J)
C IZBOR VODEĆEG REDA
        AMIN=9999999.
        IV=O
        DO 25 I=2,N+1
        IF(G(I,I2))25,25,26
26      TEM=G(I,I1)/G(I,I2)
        IF(AMIN.LE.TEM) GO TO 25
        AMIN=TEM
        IV=I
25      CONTINUE
C TRANSFORMIRANJE MATRICE G
        CALL TRANS(IV,PP,OBC,IVAR,ISHE,G,M,N,I2)
C TESTIRANJE PRVOG REDA MATRICE G
        DO 27 I=1,N+1
        IF(G(1,I))28,27,27
27      CONTINUE
        GO TO 31
C POSTOJI NEGATIVNI ELEMENT U PRVOM REDU MATRICE G
28      IV=I
        DO 30 I=1,N+1
        PP(I)=O
        IF(IV—I)30,29,30
29      PP(I)=—1
30      CONTINUE
        GO TO 555
        END
```

```
      SUBROUTINE TRANS(IV,PP,OBC,IVAR,ISHE,G,M,N,I2)
      INTEGER OBC(20),PP(51)
      DIMENSION G(51,53),IVAR(50),ISHE(50,50)
      IF(IV)1,1,2
1     WRITE(6,100)
100   FORMAT(' VODEĆI ELEMENT NE POSTOJI' /' DEGENERACIJA')
      STOP

C ZAPIS SHEME KOJA ULAZI U BAZU

2     IP=IV—1
      IF(PP(1))3,4,4
4     IVAR(IP)=M+IP
      GO TO 6
3     DO 5 I=1,M
      P=—PP(1)
      IF(P.EQ.OBC(I)) GO TO 7
5     CONTINUE
7     IVAR(IP)=I
6     DO 8 I=2,N+1
      IPO=I—1
8     ISHE(IP,IPO)=PP(I)

C TRANSFORMACIJA MATRICE G

      TEM=G(IV,I2)
      DO 10 I=1,I2
10    G(IV,I)=G(IV,I)/TEM
      DO 11 IND=1,N+1
      IF(IND—IV)12,11,12
12    IF(G(IND,I2))13,11,13
13    DO 14 J=1,I2
14    G(IND,J)=G(IND,J)—G(IV,J)—G(IND,I2)
11    CONTINUE
      RETURN
      END
```

4. PRIMJENA

Problem jednodimenzionalnog razmještaja objekata primijenjen je u proizvodnji metalnih okvira za namještaj. Osnovni je materijal, oblast razmještaja, HV traka duljine 4 metra, iz koje se izrezuju objekti, elementi metalne konstrukcije. U tabeli 1. prikazane su duljine i zahtjevi za pojedinim objektima. Cilj primjene ove metode je minimizacija korištenja osnovnog materijala, iz čega proizlazi i minimizacija otpada.

Tabela 1. Objekti razmještaja

Objekt	Duljina	Broj komada
1	55	2560
2	68	1460
3	69	2920
4	73	7160
5	123	640
6	128	1280
7	145	1460
8	148	2300

Vrijeme koje je utrošeno na računalu UNIVAC-1100 za unos podataka, izvođenje programa i ispis na serijskom štampaču iznosilo je 5 minuta. Dobiveni su slijedeći necjelobrojni rezultati:

Tabela 2. Rezultati jednodimenzionalnog razmještaja objekata

Varijanta	Objekt 1	2	3	4	5	6	7	8	Faktor korištenja	% iskorištenja materijala
V_1	1	0	0	1	1	0	0	1	153,33	99,75
V_2	2	0	1	3	0	0	0	0	272,59	99,50
V_3	1	0	5	0	0	0	0	0	401,48	100,00
V_4	0	0	0	5	0	0	0	0	797,78	91,25
V_5	0	3	1	1	0	0	0	0	486,67	100,00
V_6	0	0	1	1	0	2	0	0	640	99,50
V_7	2	0	0	0	0	0	2	0	730	100,00
V_8	0	0	0	1	0	0	0	2	1073,33	92,25

Ukupno iskorištenje osnovnog materijala iznosi 96,53%. Za proizvodnju zadanih objekata potrebno je 4558 oblasti (HV traka).

Zaokruživanje dobivenih rezultata moguće je na dva načina. Prvi način je da se svi necjelobrojni rezultati zaokruže na više. U tom slučaju dobiva se nešto veći broj objekata nego što je specifirano u zahtjevu. Taj višak u stvari predstavlja povećanje otpada, iako u praksi to nije tako jer se ti objekti mogu iskoristiti u narednoj proizvodnji.

Drugi način zaokruživanaj je na niže. U tom slučaju ukupni broj dobivenih objekata nešto je manji od zahtijevanog broja pa se za te objekte moraju dodatno izračunati sheme razmještaja. Za to se može koristiti cjelokupna procedura jednodimenzionalnog razmještaja, međutim, kako je broj tih objekata relativno mali, razmještaj se može izvršiti i ručno.

Rezultati prvog načina zaokruživanja prikazani su u tabeli 3, a drugog u tabeli 4.

Tabela 3. Zaokruživanje necjelobrojnih rezultata

Objekt	Broj objekata po varijanti V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	Ukupno	Višak
1	154	546	402				1460		2562	2
2					1461				1461	1
3		273	2010			640			2923	3
4	154	819		3990	487	640		1074	7164	4
5	154				487				641	1
6						1280			1280	0
7							1460		1460	0
8	154							2148	2302	2
% iskori. materijala	99,32	99,35	99,87	91,22	99,93	99,50	100,0	99,19	96,47	

Tabela 4. Zaokruživanje necjelobrojnih rezultata

Objekt	Broj objekata po varijanti V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	Ukupno	Manjak
1	1234	1234	1234	1234	1234	1234	1234	6789	2562	2
1	153	544	401				1460		2558	2
2					1458				1458	2
3		272	2005			640			2917	3
4	153	816		3885	486	640		1073	7153	7
5	153				486				639	1
6						1280			1280	0
7							1460		1460	0
8	153							2146	2299	1
%	99,75	99,50	100,0	91,25	100,0	99,50	100,0	92,53	96,53	

Za razmještaj ostalih objekata »ad hoc« metodom potrebne su 4 oblasti razmještaja. Prvi način zaokruživanja rezultata ne traži dodatne varijante razmještaja, dok je kod drugog načina potrebno dodatno razmještanje objekata. Postotak iskorištenja neznatno je lošiji kod prvog načina u odnosu na drugi.

Ovim zaokruživanjima željelo se pokazati da je pretpostavka o ispuštanju uvjeta cjelobrojnosti rješenja, izrečena u drugom poglavlju, u praktičkoj primjeni ispravna jer ne utječe bitno na konačni rezultat.

Za proizvodnju traženih objekata potrebno je prema prvom načinu izračunavanja 4558 oblasti razmještaja, dok je u drugom slučaju zaokruživanja dobiveno 4556 oblasti.

LITERATURA

1. *Bojanić M.: Ekonomski efekti matematičkog modeliranja u industriji namještaja, doktorska disertacija, Zagreb, 1982.*
2. *Gilmore C.P., Gomory E.R.: A Linear Programing Aproach to the Cutting Stock Problem, Opns. Res. 9, 1961, 849—859.*
3. *Gilmore C.P., Gomory E.R.: A Linear Programing Aproach to the Cutting Stock Problem, Part II, Opns. Res. 11, 1963, 863—888.*
4. *... FORTRAN (ASCII), SPERRY UNIVAC-1100 Series.*

Primljeno: 1983-06-23

Petković V. Computer aided rearrangement of geometrical objects

SUMMARY

The present study describes the rearrangement of eight types of objects varying in lenght onto one arrangement area of a given size. The significance of the aim has thus not been diminished and the program support in FORTRAN-V allows the realization of the given task at the beginning of work. Such an approach has been dictated by everyday practice, but with varying arrangement areas of varying cost it is possible to obtain optimal results by applying the same program.

The results of processing the set model point out how appropriate is the approach which requires rearrangement of objects to be cut out by applying mathematical models and electronic computer. Such problems, moreover, cannot be examined without these assets.

(Prijevod: Dora Maček-Riffer)