Mr Božidar Balog, viši predavač
Fakultet organizacije i informatike
Varaždin

UDK: 51
Znanstveni rad

TENZORI U n-DIMENZIONALNOM LINEARNOM PROSTORU

Autor u radu obrađuje jedan od načina definiranja tenzora, i to u n-dimenzionalnom linearnom prostoru pomoću linearnih preslikavanja i multilinearnog funkcionala. Držeći se tog načina definiranja tenzora nadalje obrađuje glavna svojstva tenzora kao i najvažnije operacije s njima. Naglasak je stavljen na one operacije koje imaju sasvim tenzorski karakter, kao što su: kontrakcija tenzora, simetrizacija i alternacija tenzora. Na taj način rad predstavlja jednu zaokruženu cjelinu i osnovu za daljnju obradu i primjenu tenzorskog računa. U literaturi se mnogo češće uvodi pojam tenzora preko afinog prostora i diferencijalne promjene sustava u tom prostoru. Međutim, ako je tenzor definiran na način kako je to učinjeno u ovom radu, tada prijelaz u afini prostor ne predstavlja nikakvu poteškoću — radi se samo o tome da članovi matrice transformacije sustava dobiju značenja kvocijenta diferencijala određenih varijabli.

UVOD

U matematici, fizici, tehnici i drugim naukama promatramo u prostoru različite vrste veličina. Tako npr. postoje veličine koje su određene samo jednim brojem (skalarne veličine: vrijeme, temperatura, masa i sl.).

U trodimenzionalnom prostoru postoje također veličine koje su određene s tri broja, kao što su vektori. U fizici mnoge veličine (npr. brzina, ubrzanje, sila i dr.) prikazujemo vektorima. Međutim, u trodimenzionalnom prostoru postoje neke veličine koje su u tom prostoru određene s više od tri broja, kao što su elastična napetost, deformacija i sl. Te veličine imaju različite vrijednosti ukoliko se pomičemo iz jedne točke u drugu. Osim toga, mi ovdje moramo voditi računa i o promjeni baze sustava u promatranom prostoru.

Objekte, koji su u trodimenzionalnom prostoru zadani s više od tri broja, a pri prijelazu iz jedne baze u drugu ponašaju se po određenom zakonu, zovemo tenzori. Na koji način ćemo definirati tenzore u linearnom prostoru, kako ćemo definirati operacije s njima, cilj je upravo ovog članka.

Budući da ćemo raditi u n-dimenzionalnom linearnom prostoru, moramo najprije ukratko ponoviti neka najvažnija svojstva takvog prostora kao i preslikavanje linearnih prostora.

Definicija 1. Zadan je linearni prostor L (elementi su vektori x, y, z, ...) izgrađen na polju realnih brojeva R (elementi su skalari).

Linearni funkcional f je svako linearno preslikavanje koje linearni prostor L preslika u skup realnih brojeva R;

$$f: L \to R \tag{1}$$

To znači: $\forall x \in L \to f(x) \in R$

Budući da je gornje preslikavanje linearno, moraju biti ispunjeni uvjeti:

(a) $f(x + y) = f(x) + f(y)$

(b) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$

a što se može pisati jednom jednakosti:

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \tag{2}$$

Ovo vrijedi za $\forall x, y \in L; \forall \alpha, \beta \in R$

Primjer: U trodimenzionalnom prostoru zadana je točka A i sve orijentirane dužine koje izlaze iz te točke. Neka je x neki fiksni (određeni) vektor iz tog skupa vektora.

Tada možemo za linearni funkcional uzeti skalarni produkt bilo kojeg vektora iz tog skupa i vektora x.

$$f(y) = y \cdot x = a \in R$$

Svakom vektoru y iz tog skupa vektora pridružen je neki broj a.

Neka je $x \in L$ neki vektor iz linearnog prostora L. Tada možemo taj vektor pisati u obliku:

$$x = x^i e_i$$

x^i — skalarne komponente vektora

e_i — vektori baze n — dimenzionalnog linearnog prostora L.

Ako je isti indeks napisan jednom gore, a drugi puta dolje, tada se sumiranje vrši po tom indeksu:

$$x = x^i e_i = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 + \ldots + x^n e_n \tag{3}$$

Za linearni funkcional bit će:

$$f(x) = f(x^i e_i) = x^i \cdot f(e_i)$$

Uvedemo oznaku:

$$f(e_i) = \varphi^i \tag{4}$$

φ^i su vrijednosti funkcionala na vektorima baze e_i linearnog prostora L.

Napomena: Funkcionali f, g, h, ... su vektori, dok su njihove vrijednosti brojevi; tj.

f, g, h, — vektori

f(x), g(x), h(x), — brojevi (skalari)

Definicija 2. Neka su f, g, h, . . . linearni funkcionali koji djeluju na linearni prostor L.

Tada skup svih tih funkcionala čine linearan prostor L^* za koji kažemo da je d u a l a n p r o s t o r prostora L.

Budući da je prostor L^* linearan prostor, to će biti:

$$(f+g)(x) = f(x) = g(x)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x) \tag{5}$$

Pri tome moramo uzeti u obzir:

$$f(\theta) = 0 \qquad \theta \in L \text{ je nulvektor}$$

Nul-funkcional

$$\Theta(x) = 0$$

je takav funkcional koji svaki vektor $x \in L$ preslikava u nulu. Zbog toga će biti:

$$(f + \Theta)(x) = f(x)$$

za svaki linearni funkcional f.

Definicija 3. Vektore iz prostora L zvat ćemo k o n t r a v a r i j a n t n i vektori, dok ćemo vektore iz prostora L^* zvati k o v a r i j a n t n i vektori.

Teorem 1. Dimenzija dualnog prostora L^* jednaka je dimenziji polaznog prostora L.

U prostoru L^* postoji n funkcionala f^i koji preslikavaju svaki vektor $x \in L$ u njegovu i-tu komponentu:

$$f^i(x) = x^i \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n \tag{7}$$

Taj funkcional preslikava bazu prostora L na slijedeći način:

$$f^i(e_j) = \delta_j^{\,i} \tag{8}$$

$\delta_j^{\,i}$ je Kronekerov simbol koji može imati samo dvije vrijednosti: 0 ili 1.

$$\delta_j^{\,i} = 1 \text{ za } i = j$$

$$\delta_j^{\,i} = 0 \text{ za } i \neq j \tag{9}$$

Primjer: $\delta_3^{\,3} = 1$; $\delta_1^{\,2} = 0$

Bazu dualnog prostora L^* čine funkcionali f^i (vektori), $i = 1, 2, \ldots, n$. Na taj način bilo koji funkcional $f \in L^*$ možemo pisati u obliku:

$$f = \varphi_i f^i \tag{10}$$

Pri tome:

$$\varphi_i = f(e_i)$$

Dakle:

$$f = f(e_i) \cdot f^i \qquad (11)$$

Definicija 4. Multilinearni funkcional F valencije $p + q$, odn. tipa (p, q), je svako preslikavanje

$$F: LxLx \ldots xLxL^*xL^*x \ldots xL^* \to R \qquad (12)$$

koje svaki Kartezijev produkt od p linearnih prostora L i q njima dualnih prostora L* preslikava u skup realnih brojeva R; tj.

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_p, \varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q) \in R \qquad (13)$$

Pri tome: $x_1, x_2, \ldots, x_p \in L$ kontravarijantni vektori

$\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q \in L^*$ kovarijantni vektori.

Za gornji multilinearni funkcional F kažemo da je p puta kovarijantan i q puta kontravarijantan. Naime, funkcional na kontravarijantnom vektoru iz L postaje kovarijantan pa zato kažemo da je multilinearan funkcional F p puta kovarijantan. Dakle, donji indeksi su kovarijantni, gornji su kontravarijantni.

Za multilinearni funkcional vrijede slijedeća pravila:

(a) $(F' + F'')(\ldots) = F'(\ldots) + F''(\ldots)$

(b) $(\lambda F)(\ldots) = \lambda \cdot F(\ldots)$

(c) F' je multilinearni funkcional tipa (p, q)

F'' je multilinearni funkcional tipa (r, s)

Umnožak je multilinearni funkcional tipa $(p+r, q+s)$

$$(F'F'')(\underset{p}{\ldots}, \underset{r}{\ldots}, \overset{q}{\ldots}, \overset{s}{\ldots})$$

Neka je e_i baza linearnog prostora L,f^j baza njemu dualnog prostora L*. Tada se multilinearni funkcional F tipa (p, q) može pisati u koordinatama:

$$F(x_1, \ldots, x_p, \varphi^1, \ldots, \varphi^q) = T_{i_1 \ldots i_p}{}^{j_1 \ldots j_q} x_1{}^{i_1} \ldots x_p{}^{i_p} \cdot \varphi_{j_1}{}^1 \ldots \varphi_{j_q}{}^q \qquad (14)$$

Pri tome skalari $T_{i_1 \ldots i_p}{}^{j_1 \ldots j_q}$ su brojevne vrijednosti multilinearnog funkcionala na bazama prostora L i L*.

$$T_{i_1 \ldots i_p}{}^{j_1 \ldots j_q} = F(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}, \varphi^{j_1}, \ldots, \varphi^{j_q}) \qquad (15)$$

$i_1, i_2, \ldots, i_p$ — kovarijantni indeksi
$j_1, j_2, \ldots, j_q$ — kontravarijantni indeksi
$x_1{}^{i_1}, \ldots, x_p{}^{i_p}$ — komponente kontravarijantnog vektora $x_1 \in L$
$\varphi_{j_1}{}^1, \ldots, \varphi_{j_q}{}^1$ — komponente kovarijantnog vektora $\varphi^1 \in L^*$.

Sada nas zanima što se događa s multilinearnim funkcionalom pri prijelazu iz jedne baze prostora L u drugu. Neka je e_i baza linearnog prostoraL. Prijelaz u novu bazu $e_{i'}$ zadan je relacijom:

$$e_{i'} = \tau_{i'}{}^i \cdot e_i \qquad (16)$$

Sumiranje se vrši po veznom indeksu i.

$\tau_{i'}{}^{i}$ su skalari koji tvore matricu T formata (n, n)

$$T = (\tau_{i'}{}^{i}) = \begin{bmatrix} \tau_1{}^1\ \tau_1{}^2 \dots \tau_1{}^n \\ --- \quad --- \\ \tau_n{}^1\ \tau_n{}^2 \dots \tau_n{}^n \end{bmatrix} \tag{17}$$

Baza e_i inducira u prostoru L* bazu f^i. Nova baza $e_{i'}$ inducira u dualnom prostoru L* novu bazu $f^{i'}$. Prijelaz iz jedne baze u drugu u prostorima L i L* vrši se prema izrazima:

$$\begin{aligned} e_{i'} &= \tau_{i'}{}^{i} \cdot e_i && \longrightarrow T \\ e_i &= \tau_i{}^{i'} \cdot e_{i'} && \longrightarrow T^{-1} \\ f^{i'} &= \tau_i{}^{i'} \cdot f^i && \longrightarrow (T^{-1})^* \\ f^i &= \tau_{i'}{}^{i} \cdot f^{i'} && \longrightarrow T^* \end{aligned} \tag{18}$$

Teorem 2. Ako se prijelaz iz baze e_i u L u bazu $e_{i'}$ vrši pomoću matrice T, tada se prijelaz iz baze f^i dualnog prostora L* u bazu $f^{i'}$ vrši po kontragredijentnoj matrici $(T^{-1})^*$.

T^{-1} inverzna matrica od T

T^* transpornirana matrica od T

Za transformacije kontravarijantnih i kovarijantnih vektora iz jedne baze prostora L u drugu bit će:

$$\begin{aligned} x^{i'} &= \tau_i{}^{i'} x^i && (T^{-1})^* \\ x^i &= \tau_{i'}{}^{i} \cdot x^{i'} && T^* \\ \varphi_{i'} &= \tau_{i'}{}^{i}\, \varphi_i && T \\ \varphi_i &= \tau_i{}^{i'}\, \varphi_{i'} && T^{-1} \end{aligned} \tag{19}$$

Na sličan način se transformiraju multilinearni funkcionali.

Primjer: Imamo bilinearni funkcional

$$\mathcal{F}(x, y) = T_i{}^j x^i \varphi_j$$

Promjenom baze:

$$T_{i'}{}^{j'} = \tau_{i'}{}^{i} \tau_j{}^{j'} T_i{}^j$$

DEFINICIJA TENZORA

Definicija 5. Tenzor tipa (p, q) je pridruživanje koje svakoj bazi linearnog prostora L pridružuje sustav brojeva

$$e_i \longrightarrow T_{i_1 \dots i_p}{}^{j_1 \dots j_q} \tag{20}$$

koji se pri promjeni baze transformiraju kao linearni funkcionali. Za novu bazu $e_{i'}$ bit će:

$$e_{i'} \longrightarrow T_{i_1' \dots i_p'}{}^{j_1' \dots j_q'}$$

Prigodom transformacije imat ćemo:

$$T_{i_1' \dots i_p'}{}^{j_1' \dots j_q'} = \tau_{i_1'}{}^{i_1} \dots \tau_{i_p'}{}^{i_p} \cdot \tau_{j_1}{}^{j_1'} \dots \tau_{j_q}{}^{j_q'} \cdot T_{i_1 \dots i_p}{}^{j_1 \dots j_q} \tag{21}$$

Brojevi $T_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q}$ su komponente (koordinate) tenzora. Za tenzor tipa (p, q) kažemo da je (p+q) valentni tenzor; tj. on je p puta kovarijantan i q puta kontravarijantni tenzor.

Kada govorimo o tenzoru, tada ga najčešće prikazujemo i pišemo pomoću njegovih komponenata.

Definicija 6. R a n g t e n z o r a je ukupan broj kovarijantnih i kontravarijantnih indeksa. Tj.

$$r = p + q \tag{22}$$

Rang tenzora ne može biti veći od dimenzije linearnog prostora L u kojem promatramo taj tenzor. Dakle:

$$r \leqq n \tag{23}$$

Primjeri:

1. A^i je jednovalentni kontravarijantni tenzor ukoliko vrijedi:
$$A^{i'} = \tau_i^{i'} A^i$$

Napomena: Komponente tenzora možemo pisati velikim ili malim slovima abecede.

2. A_j je jednovalentni kovarijantni tenzor ukoliko je:
$$A_{j'} = \tau_{j'}^{j} A_j$$

3. A_i^j je dvovalentni mješoviti tenzor ukoliko je:
$$A_{i'}^{j'} = \tau_{i'}^{i} \tau_j^{j'} A_i^j$$

Rang ovog tenzora je 2. Sumiranje na desnoj strani vrši se po indeksima i, j. Za takve indekse koji se javljaju jednom dolje, a jednom gore kažemo da su vezani indeksi i sumiranje se vrši samo po njima.

Ako se neki indeks javlja jednom dolje ili samo jednom gore, onda je to slobodni indeks. U gornjoj jednakosti indeksi i', j' na desnoj strani su slobodni indeksi.

K r o n e k e r o v simbol δ_i^j je dvovalentni mješoviti tenzor jer:

$$\delta_{i'}^{j'} = \tau_{i'}^{i} \tau_j^{j'} \delta_i^j \tag{24}$$

U literaturi taj tenzor se još zove i jedinični tenzor jer u bilo kojem sustavu ima komponente 1.

Ako imamo tenzor ranga r pa su mu svi indeksi slobodni, tada on ima n^r komponenata (koordinata).

Tako na primjer mješoviti tenzor a_i^j u trodimenzionalnom prostoru ima $3^2 = 9$ komponenata.

Teorem: Zadan je dva puta kovarijantan tenzor a_{ij} koji ima svojstvo simetričnosti u indeksima:

$$a_{ij} = a_{ji}$$

Promjenom baze to svojstvo simetričnosti ostat će i dalje pa će biti:

$$a_{i'j'} = a_{j'i'}$$

Dokaz: Prema definiciji tenzora bit će:

$$a_{j'i'} = \tau_{j'}^{j} \tau_{i'}^{i} a_{ji}$$

Po pretpostavci:

$$a_{ji} = a_{ij}$$

Odatle će biti:

$$a_{j'i'} = \tau_{j'}^{j} \tau_{i'}^{i} a_{ij} = \tau_{i'}^{i} \tau_{j'}^{j} a_{ij} = a_{i'j'}$$

a time je teorem dokazan.

Napomena: Gornje svojstvo simetričnosti indeksa vrijedi za bilo koji čisti kovarijantni ili kontravarijantni tenzor.

Teorem 4. Zadan je dvovalentni mješoviti tenzor b_i^j za koji vrijedi simetričnost indeksa:

$$b_i^j = b_j^i$$

Tada će biti:

$$b_{i'}^{j'} \neq b_{j'}^{i'}$$

Dokaz:

$$b_{j'}^{i'} = \tau_{j'}^{j} \tau_{i}^{i'} b_j^i \neq \tau_{j}^{j'} \tau_{i'}^{i} b_i^j = b_{i'}^{j'}$$

Ova druga jednakost nije ispravna jer nije ispunjen zakon sumiranja. Naime, da bismo mogli provesti sumiranje po nekom indeksu, on mora biti na jednom mjestu dolje, a na drugom gore. U našem slučaju oba indeksa i su dolje, dok su indeksi j gore, pa ne možemo izvršiti sumiranje.

Prema tome simetrija istovrsnih indeksa ima tenzorski karakter, dok simetrija raznovrsnih indeksa nema taj karakter.

Napomena: Skup brojeva $A_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q}$ označenih indeksima, a koji se pri prijelazu iz jedne baze u drugu ne vladaju po zakonu tenzora (21) zove se *ekstenziv*.

TENZORSKA ALGEBRA

1. Jednakost tenzora

Definicija 7. Za dva tenzora A, b kažemo da su j e d n a k i

$$A = B$$

onda ako su istog tipa i ako u bilo kojoj bazi imaju iste koordinate.

Koordinate tenzora:

$$A_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} = B_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} \tag{25}$$

Zbog tenzorskog karaktera za bilo koju drugu bazu bit će:

$$A_{i_1' \ldots i_p'}^{j_1' \ldots j_q'} = B_{i_1' \ldots i_p'}^{j_1' \ldots j_q}$$

Korolar: Ako neki tenzor ima u nekoj određenoj bazi sve koordinate nula, tada će u bilo kojoj bazi sve njegove koordinate biti nula. Tj.:

$$A_i^j = 0 \Longrightarrow A_{i'}^{j'} = 0$$

Ovo je posljedica definicije jednakosti tenzora te tenzorskog karaktera zadanih koordinata.

2. Zbrajanje tenzora

Definicija 8. Zbrajati (ili oduzimati) možemo samo tenzore istog tipa, a to činimo tako da zbrojimo (ili oduzmemo) odgovarajuće koordinate.
Zbroj (razlika) takvih tenzora je tenzor istog tipa kao i zadani tenzori.

Primjer:

$$A_i^{jk} + B_i^{jk} = C_i^{jk}$$

Pri promjeni baze:

$$A_{i'}^{j'k'} + B_{i'}^{j'k'} = C_{i'}^{j'k'}$$

proizlazi da je:

$$C_{i'}^{j'k'} = \tau_{i'}^{\,i}\, \tau_{j}^{\,j'}\, \tau_{k}^{\,k'}\, C_i^{jk}$$

Napomena: Indekse je kod tenzora najpreglednije pisati tako da napišemo najprije sve kovarijantne, a zatim sve kontravarijantne indekse, time da iznad ili ispod ispisanih indeksa ostavimo prazna mjesta:

$A_{ijk\dots}^{\cdot\cdot\cdot\, lm}$ Neki autori taj tenzor pišu i ovako: A_{ijk}^{lm}

Prvi način je pregledniji pri radu.

3. Vanjsko množenje tenzora

Definicija 9. Množenjem dvaju tenzora tipova (p, q), (r, s) dobijemo tenzor tipa (p+r, q+s). To množenje vršimo tako da množimo koordinate prvog tenzora sa svim koordinatama drugog tenzora — na taj način dobijemo koordinate produkta tih tenzora.

Primjer: $A_{ij\cdot}^{\cdot\cdot k} \cdot B_{r\cdot}^{\cdot s} = C_{ijr\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\cdot ks}$

Pri promjeni baze: $A_{i'j'\cdot}^{\cdot\cdot k} B_{r'\cdot}^{\cdot s'} = C_{i'j'r'\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\cdot k's'}$

Primjer: $a_i \cdot b^j = c_{i\cdot}^{\cdot j}$ Množenje kovarijantnog i kontravarijantnog vektora daje mješoviti tenzor ranga 2.

4. Kontrakcija (stezanje) tenzora

Ovo je čista tenzorska operacija koja se može izvršiti samo na mješovitim tenzorima.

Definicija 10. Zadan je tenzor T tipa (p, q) s koordinatama

$$T_{i_1\dots i_p}{}^{j_1\dots j_q}$$

Uočimo jedan kovarijantan i jedan kontravarijantan indeks. Iz svih koordinata tenzora T ekstrapoliramo one koji na označenim mjestima imaju iste indekse.

Tada nam zadani tenzor T generira jedan novi tenzor tipa (p-1, q-1) za dvije valencije manji, a koji je sastavljen samo od onih koordinata koje na naznačenim mjestima imaju iste indekse.
Kažemo tada da je taj tenzor nastao **kontrakcijom** zadanog tenzora T, odnosno da je on **kontrahirani** tenzor zadanog tenzora T.

$$T_{\ldots i \ldots}{}^{\ldots j \ldots} \longrightarrow T_{\ldots 1 \ldots}{}^{\ldots 1 \ldots} + T_{\ldots 2 \ldots}{}^{\ldots 2 \ldots} + \ldots + T_{\ldots n \ldots}{}^{\ldots n \ldots} =$$

$$= T_{(p\text{-}1)\ \text{indeksa}}{}^{(q\text{-}1)\ \text{indeksa}} \tag{26}$$

Kontrahirani tenzor tipa (p-1, q-1) ima koordinate koje su dobivene kao zbroj koordinata zadanog tenzora s istim indeksima na označenim mjestima. Ostali indeksi kod tog su zbroja ostali nepromijenjeni.

Primjer: $T_{ij}{}^{..k} \rightarrow T_{ij}{}^{..j} = T_{i1}{}^{..1} + T_{i2}{}^{..2} + \ldots + T_{in}{}^{..n} = T_i$

Tenzor s koordinatama T_i nastao je kontrakcijom tenzora s koordinatama $T_{ij}{}^{k}$.

Kontrakciju možemo sukcesicno vršiti dotle dok ne dobijemo čisti tenzor ili invarijantu.

$p > q$ — kontrakciju možemo vršiti q puta i dobijemo kovarijantan tenzor tipa (p-q, 0)

$p < q$ — kontrakciju možemo vršiti p puta te dobijemo kontravarijantan tenzor tipa (0, q-p)

$p = q$ — kontrakciju možemo vršiti p puta te dobijemo invarijantu koja ne ovisi o indeksu ili promjeni baze.

Spomenut ćemo još i tzv. **unutarnje množenje** tenzora. Kod tog množenja imamo kombinirano vanjsko množenje s kontrakcijom tenzora — to ćemo imati u slučaju kada se pojave jedan ili više istih kovarijantnih i kontravarijantnih indeksa.

Primjer: $A_{ij}{}^{..k} B_{k}{}^{\cdot 1} = C_{ijk}{}^{\cdot\cdot\cdot k1} = C_{ij.}{}^{..1}$

Ovdje smo imali jedan par vezanih indeksa (indeks k).
Naznačit ćemo nekoliko važnijih primjera unutarnjeg množenja dvaju tenzora.

(1) $A^i \cdot B_i = \gamma$ (skalar, invarijanta)

(2) $A_k^{\cdot i} \cdot B^k = C^i$

(3) $A^i_{.k} \cdot B_i = C_k$

(4) $A^{ik} \cdot B_i = C^k$

(5) $A_{ik} \cdot B^k = C_i$

Naročito je važno množenje tenzora Kronekerovim simbolom (misli se na unutarnje množenje):

$$A_{ij}{}^{..k} \cdot \delta_k^1 = A_{ij}{}^{..1} \tag{27}$$

Dobili smo tenzor istog tipa, s nešto izmijenjenom oznakom indeksa.

5. Permutacija indeksa

Definicija 11. I z o m e r i su dva tenzora istog tipa, ali s drugačijim redoslijedom indeksa.

Primjer: $A_{ij}^{\;\;..r}$, $B_{ji}^{\;\;..r}$

Gornja definicija nam govori da svakom tenzoru koji ima barem dva istovrsna indeksa možemo pridružiti novi tenzor tako da izvršimo permutaciju istovrsnih indeksa.

Primjer: $T_{i_1 \dots i_p}^{\;\;\;\;\;\;\; j_1 \dots j_q} \longrightarrow U_{i_1 \dots i_p}^{\;\;\;\;\;\;\; j_1 \dots j_q} = T_{r_1 \dots r_p}^{\;\;\;\;\;\;\; s_1 \dots s_q}$

$r_1 \dots r_p$ je jedna permutacija indeksa $i_1 \dots i_p$

$s_1 \dots s_q$ je jedna permutacija indeksa $j_1 \dots j_q$

Svaki viševalentni tenzor može imati više izomera — taj broj ovisi o broju istovrsnih indeksa.

Tenzori tipa

$$A_i,\ A^j,\ A_i^{\;j}$$

nemaju izomera.

6. Simetrizacija tenzora

Definicija 12. Za neki tenzor kažemo da je s i m e t r i č a n u dva, tri ili više istovrsnih indeksa ako bilo koja permutacija tih indeksa daje isti tenzor.

Primjeri: $a_{ijk} = a_{ikj}$ tenzor je simetričan u indeksima k, j

$b^{ijk} = b^{jki} = b^{kij}$ tenzor je simetričan u sva tri indeksa

Ako je tenzor simetričan u svim indeksima, tada kažemo naprosto da je tenzor simetričan.

Napomena: Kada govorimo o permutaciji indeksa, tada se to uvijek odnosi na istovrsne indekse.

Definicija 13. Zadan je neki tenzor a_{ij} koji nije simetričan. Njemu možemo pridružiti neki simetričan tenzor b_{ij} na slijedeći način:

$$a_{ij} \longrightarrow b_{ij} = a_{(ij)} = 1/2(a_{ij} + a_{ji}) \tag{28}$$

Ovaj postupak zovemo s i m e t r i z a c i j a t e n z o r a.

Prema gornjoj definiciji tenzor $a_{(ij)}$ je nastao simetrizacijom tenzora a_{ij}. Indekse za koje izvodimo simetrizaciju stavljamo u zagradu.

Primjeri: $a^{ijk} \longrightarrow a^{(ij)k} = \frac{1}{2}(a^{ijk} + a^{jik})$

$$a^{ijk} \longrightarrow a^{(i|j|k)} = \frac{1}{2}(a^{ijk} + a^{kji})$$

$$a^{ijk} \longrightarrow a^{(ijk)} = \frac{1}{6}(a^{ijk} + a^{ikj} + a^{jik} + a^{jki} + a^{kij} + a^{kji})$$

U zadnjem primjeru vidimo da dolaze u obzir sve premutacije indeksa i,j,k.

7. Alternacija tenzora

Definicija 14. Za neki tenzor T kažemo da je k o s o s i m e t r i č n i (antisimetričan) u dva istovrsna indeksa ako premutacija tih indeksa daje koordinate koje se razlikuju u predznaku:

$$T_{\dots i \dots j \dots} = -T_{\dots j \dots i \dots} \tag{29}$$

Ovaj tenzor je kososimetričan u indeksima i,j. Za neki tenzor kažemo da je kososimetričan ako je kososimetričan u bilo koja dva istovrsna indeksa.

Primjer: Ako je tenzor a^{ijk} kososimetričan, tada mora biti:

$a^{ijk} = -a^{jik} = -a^{kji} = -a^{ikj}$,

tj. tenzor je kososimetričan u bilo koja dva indeksa.

Definicija 15. Zadan je tenzor a_{ij} koji nije kososimetričan. Njemu možemo pridružiti kososimetričan tenzor b_{ij} na slijedeći način:

$$a_{ij} \longrightarrow b_{ij} = a_{[ij]} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}) \tag{30}$$

Ovaj postupak zovemo a l t e r n a c i j a t e n z o r a.

Indekse za koje izvodimo alternaciju stavljamo u uglastu zagradu.

Primjeri: $a^{ijk} \longrightarrow a^{[ij]k} = \frac{1}{2}(a^{ijk} - a^{jik})$

$$a^{ijk} \longrightarrow a^{[i|j|k]} = \frac{1}{2}(a^{ijk} - a^{kji})$$

$$a^{ijk} \longrightarrow a^{[ijk]} = \frac{1}{6}(a^{ijk} - a^{ikj} - a^{jik} + a^{jki} + a^{kij} - a^{kji})$$

LITERATURA

1. *V.F. Kagan: Osnovy teorii poverhnostei v tenzornom izloženii, Moskva, 1947.*
2. *G. Korn — T. Korn: Spravočnik po matematike, Moskva, 1968.*
3. *Svetozar Kurepa: Konačno dimentionalni vektorski prostori i primjene, Tehnička knjiga, Zagreb, 1967.*
4. *A.P. Norden: Kratkij kurs differencial'noj geometrii, Moskva, 1958.*
5. *P.K. Raševskij: Differencial'naja geometrija, Moskva, 1956.*
6. *P.K. Raschewski: Riemannische Geometrie und Tensoranalysis, Berlin, 1959.*

Primljeno: 1983-06-17

Balog B. Tenzors in n-dimenzional linear space

SUMMARY

In the introductory part of the work are treated linear copying n-dimenzional linear space L as well as multilinear functions.

In this way linear space L is followed by dual linear space L. By means of the upper notions is defined a tensor so that the accent is put on changing of the tensor co-ordinates by the change of the base in the space L.*

Then, there are treated the most important operations with tensors.

Much more attention is paid to entirely tensor operations as there are contractions, symmetry and alteration of the tensor.

Some more important theorems are demonstrated and many examples are used for better understanding of detached notions and operations.

(Prijevod: Vera Kušen)