Mr Tihomir Hunjak, asistent
Fakultet organizacije i informatike
Varaždin

UDK: 65.012.1
Stručni rad

RJEŠAVANJE PROBLEMA CJELOBROJNOG PROGRAMIRANJA PREVOĐENJEM U PROBLEM 0-1 LINEARNOG PROGRAMIRANJA

U radu je prikazan postupak prevođenja problema cjelobrojnog linearnog programiranja u probleme 0-1 linearnog programiranja i otuda izveden postupak za prevođenje nekih problema nelinearnog cjelobrojnog programiranja u probleme 0-1 linearnog programiranja. Ti postupci ilustrirani su primjerima.

Napomena: U članku je prikazan dio rezultata dosadašnjeg rada na projektu 71.1.6. koji financira SIZ za znanost SRH.

UVOD

Značaj realnih problema, čiji su matematički modeli problemi cjelobrojnog programiranja (CP), uvjetuje traženje uspješnih algoritama za njihovo rješavanje.

Najpoznatiji takav algoritam primjenjiv na rješavanje problema linearnog CP (LCP) je Gommoryev algoritam. No, nedostatak je tog algoritma taj da sporo konvergira k rješenju, a to smanjuje njegovu uspješnost. Iz tog razloga kod rješavanja problema LCP primjenjuje se postupak prevođenja tih problema u probleme 0-1 programiranja. Također je to i način kako se neki specijalni problemi nelinearnog CP (NCP) mogu riješiti bez specijalnih algoritama namijenjenih samo za njihovo rješavanje.

Pri tom je važno napomenuti da su ograničavajuće okolnosti u primjeni ovog načina rješavanja problema CP dimenzije pridruženog problema 0-1 programiranja jer je efikasnost raspoloživih algoritama za 0-1 programiranje osjetljiva na dimenzije problema koji se rješava.

1. LINEARAN SLUČAJ

Problemi LCP mogu se prevesti u probleme 0-1 programiranja na više načina:

a) ako varijable x_j iz problema

$$\operatorname{Max} \sum_j c_j x_j$$

$$\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i \qquad i = 1, \ldots, m$$

x_j = cijeli nenegativan broj

imaju gornje granice $x_j \leq k$, gdje je k cijeli broj, može se x_j zamijeniti s

$$x_j = y_{1j} + y_{2j} + \ldots + y_{kj}$$

pri čemu vrijedi $y_{ij} = 0$ ili 1.

Očito je da ova transformacija bitno povećava dimenzije problema koji se rješava.

b) isti problem može se svesti na 0-1 oblik ako se izvede zamjena

$$x_j = \sum_{k=1}^{K} 2^{k-1} x_{jk}$$

Kod ovog prevođenja cjelobrojne varijable u binarni oblik također je potrebno poznavati gornju granicu varijable jer je K jednak najvećem eksponentu u binarnom razvoju te gornje granice. S ovom transformacijom dobije se manji broj novih varijabli nego u prethodnom slučaju.

Primjer 1:[1] Iz dasaka: 50 komada dužine 6,5 m
100 „ „ 5 m
200 „ „ 4 m

treba ispiliti komplete koji se sastoje iz dvije daske dužine 2 m i jedne daske dužine 1,25 m. Treba odrediti plan rezanja kojim će se dobiti odgovarajući broj kompleta uz minimiziranje otpada.

U slijedećoj tabeli prikazane su sve moguće varijante rezanja za svaki od tri tipa dasaka i odgovarajući otpad za svaku varijantu:

Tabela 1. Varijante rezanja

Dužina daske	6,5 m			5 m				4 m		
Varijanta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Varijabla	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
Broj komada dužine 2 m	3	2	1	0	2	1	0	2	1	0
Broj komada dužine 1,25 m	0	2	3	5	0	2	4	0	1	3
Otpad	0,5	0	0,75	0,25	1	0,5	0	0	0,75	0,25

Značenje varijable x_i: broj dasaka koje se režu po varijanti i.

Ovom problemu pripada matematički model LCP:

$$\text{Min } (0{,}5x_1 + 0{,}75x_3 + 0{,}25x_4 + x_5 + 0{,}5x_6 + 0{,}75x_9 + 0{,}25x_{10})$$

---

1) Primjer je uzet iz predavanja što ih je prof. dr Sanjo Zlobec održao na postdiplomskom sudiju na FON u Beogradu 1982. Zanimljivo je da se cjelobrojno rješenje ovog zadatka može dobiti simpleks metodom.

$$
\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 50\\
&x_5 + x_6 + x_7 = 100\\
&x_8 + x_9 + x_{10} = 200\\
&-3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 10x_4 - 2x_5 + 3x_6 + 8x_7 - 2x_8 + x_9 + 6x_{10} = 0\\
&x_i = \text{cijeli broj (nenegativan)}
\end{aligned}
$$

Rješenje ovog problema je $x_1 = 50$, $x_5 = 25$, $x_7 = 75$, $x_8 = 200$. Funkcija cilja ima vrijednost 50.

Ako se ovaj zadatak prevede u 0-1 oblik postupkom (b), dobije se zadatak 0-1 programiranja s 69 varijabli. Navedimo samo neke od transformacija varijabli:

$x_1 = y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 8y_4 + 16y_5 + 32y_6$
slično se transformiraju i varijable x_2, x_3 i x_4 u varijable $y_7 - y_{24}$.
$x_5 = y_{25} + 2y_{26} + 4y_{27} + 8y_{28} + 16y_{29} + 32y_{30} + 64y_{31}$
(slično x_6 i x_7 u $y_{32} - y_{45}$)
$x_8 = y_{46} + 2y_{47} + 4y_{48} + 8y_{49} + 16y_{50} + 32y_{51} + 64y_{52} + 128y_{53}$
(slično x_9 i x_{10} u $y_{54} - y_{69}$).

Dimenzije zadatka koji je dobiven ovom transformacijom su takve da ga nije bilo moguće riješiti programom za 0-1 programiranje kojim raspolažemo. Problem rješavanja moguće je riješiti na dva načina: traženjem uspješnijeg algoritma za *taj* problem ili preformuliranjem problema u ekvivalentan problem ali onaj za koji postoji uspješan algoritam.

2. NELINEARAN SLUČAJ

U ovom dijelu pokazat će se kako se jedan tip problema nelinearnog CP (NCP) može prevesti u linearni 0-1 problem.

Zadan je problem (nelinearni cjelobrojni problem ranca)

$$
\begin{aligned}
&\text{Max} \sum_{i=1}^{r} h_i(y_i)\\
&0 \leq y_i \leq u_i \qquad\qquad (2)\\
&\sum_{i=1}^{r} v_i(y_i) \leq B\\
&y_i = \text{cijeli broj},\ h_i(y_i) \geq 0,\ v_i(y_i) \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, r
\end{aligned}
$$

Zbog ograničenja da varijabla y_i poprima vrijednosti samo iz intervala $[0, u_i]$[2] moguća je supstitucija u kojoj se varijabla y_i nadomješta s $(u_i + 1)$ varijablom koje poprimaju vrijednost 0 ili 1 prema slijedećem pravilu:

---

2) *Ukoliko je restrikcija na varijablu y_i oblika $u_i^1 \leq y_i \leq u_i^2$, uvođenjem nove varijable $y_i' = y_i - u_i^1$ dobiva se restrikcija $0 \leq y_i' \leq u_i^2 - u_i^1$. Također, ako i nije eksplicite navedena gornja granica za y_i, ona se može izvesti kako slijedi: neka je u j-tom ograničenju v_{ji} koeficijent varijable y_i. Zbog uvjeta nenegativnosti koeficijennta mora biti $y_i \leq \frac{b_j}{v_{ji}}$, pa se za gornju granicu varijable y_i može uzeti najveći cijeli broj koji ne premašuje vrijednost $\min_j \{\frac{b_j}{v_{ji}}\}$.*

$$x_{i1} = \begin{cases} 1 & \text{ako je } y_i = 0 \\ 0 & y_i \neq 0 \end{cases}$$

$$x_{i2} = \begin{cases} 1 & \text{ako je } y_i = 1 \\ 0 & y_i \neq 1 \end{cases}$$

$$\ldots$$

$$x_i(u_i + 1) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } y_i = u_i \\ 0 & y_i \neq u_i \end{cases}$$

Koeficijenti varijabli u funkciji cilja i ograničenjima dobiju se iz:

$$\left.\begin{aligned} c_{ij} &= h_i(y_i) \\ w_{ij} &= v_i(y_i) \end{aligned}\right\} \text{za } 1 \leqq j \leqq u_i + 1$$

Nakon ovih transformacija dobiveni problem linearnog 0-1 programiranja glasi:

$$\text{Max} \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_i \sum_j w_{tij} w_{ij} \leqq b_t \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{u_i+1} x_{ij} = 1 \tag{3.1}$$

$$x_{ij} = 0 \text{ ili } 1$$

Ovaj problem ima naziv *0-1 problem ranca s višestrukim ograničenjima izbora.*[3)] Specifičnost koja ga izdvaja iz široke klase problema 0-1 programiranja su ograničenja oblika (3.1). Za ovaj tip problema 0-1 programiranja načinjeni su vrlo uspješni algoritmi.

Ukoliko problem (3) nije većih dimenzija, može se rješavati i standardnim algoritmima za 0-1 programiranje koji se ne koriste specijalnom strukturom ovog problema.[4)]

U slijedećem primjeru korišten je takav algoritam za rješavanje transformiranog problema.

Primjer 2: Treba riješiti problem

$$\begin{aligned} &\text{Max } (y_1^3 + y_2^2 + y_3) \\ &0 \leqq y_1 \leqq 3, \quad 0 \leqq y_2 \leqq 4, \quad 0 \leqq y_3 \leqq 2 \\ &y_1 + 2y_2 + y_3^2 \leqq 10 \\ &y_i = \text{cijeli broj.} \end{aligned}$$

Uvođenje novih varijabli:

Cjelobrojnoj varijabli y_1 pridružuju se 0-1 varijable x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14} (u problemu koji je rješavan te varijable numerirane su kao x_1, x_2, x_3, x_4).

3) *0-1 knapsack problem with multiple choice constraints (vidi* [5]*) multiple-choice nested knapsack model (vidi* [1]*).*

4) *U radu* [2] *riješen je na taj način problem s 25 varijabli.*

Varijabli y_2 pridružene su $x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{25}$ $(x_5, x_6, x_7, x_8, x_9)$.
Varijabli y_3 pridružene su x_{31}, x_{32}, x_{33} (x_{10}, x_{11}, x_{12}).
Koeficijenti novih varijabli u funkciji cilja:

Kako je $h_1(y_1) = y_1^3$, to je $c_1 = 0$, $c_2 = 1^3 = 1$, $c_3 = 2^3 = 8$ i $c_4 = 3^3 = 27$.

$h_2(y_2) = y_2^2$ $\quad c_5 = 0$, $c_6 = 1^2 = 1$, $c_7 = 2^2 = 4$, $c_8 = 3^2 = 9$, $c_9 = 4^2 = 16$.

$h_3(y_3) = y_3$ $\quad c_{10} = 0$, $c_{11} = 1$, $c_{12} = 2$.

Koeficijenti novih varijabli u ograničenju:

$v_1(y_1) = y_1$ pa je $w_1 = 0$, $w_2 = 1$, $w_3 = 2$, $w_4 = 3$
$v_2(y_2) = 2y_2$ $\quad w_5 = 0$, $w_6 = 2$, $w_7 = 4$, $w_8 = 6$, $w_9 = 8$
$v_3(y_3) = y_3^2$ $\quad w_{10} = 0$, $w_{11} = 1$, $w_{12} = 4$

Problem koji treba riješiti je:

$$\text{Max } (x_2 + 8x_3 + 27x_4 + x_6 + 4x_7 + 9x_8 + 16x_9 + x_{11} + 2x_{12})$$

$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_6 + 4x_7 + 6x_8 + 8x_9 + x_{11} + 4x_{12} \leq 10$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = 1, \qquad \sum_{i=5}^{9} x_i = 1, \qquad \sum_{i=10}^{12} x_i = 1$$

$$x_i = 0 \text{ ili } 1$$

Ovaj problem riješen je pomoću Balasovog algoritma (7) i dobiveno je rješenje:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = x_6 = x_7 = x_9 = x_{10} = x_{12} = 0$$

$$x_4 = 1, \quad x_8 = 1, \quad x_{11} = 1$$

Povratnom transformacijom dobije se $y_1 = 3$, $y_2 = 3$, $y_3 = 1$. Funkcija cilja ima u tom slučaju vrijednost $z_{max} = 38$.

LITERATURA

1. *Armstrong R. D., Prabhakant Sinha, Zoltners A. A.: The multiple-choice nested knapsack model, Management Science, Vol. 28, No. 1, 1982, str. 34—43.*
2. *Bojanić M., Hunjak T., Bojanić B.: Izbor varijanti razmještaja objekata kao problem 0-1 programiranja, Zbornik radova SYM-OP-IS'82, Herceg Novi, 1982.*
3. *Katta Murty: Linear and combinatorial programming, John Wiley and Sons, New York, str. 434—437.*
4. *Martić, Lj.: Matematičke metode za ekonomske analize II, Narodne novine, Zagreb, 1979, str. 256—257.*
5. *R. M. Nauss: The 0-1 knapsack problem with multiple choice constraints, JEOR, Vol. 2, No. 2, 1978, str. 125—132.*
6. *R. Petrović: Specijalne metode u optimizaciji sistema, Tehnička knjiga, Beograd, 1977, str. 65.*
7. *Stručić I., Hunjak T.: Jedna modifikacija Balasovog algoritma za 0-1 programiranje i primjene, Zbornik radova sa simpozija Kompjuter na sveučilištu, SRCE, Cavtat, 1982, str. 569—581.*

Primljeno: 1983-08-11

Hunjak T. Integer programming problem solving by transformation in 0-1 linear programming problem

SUMMARY

In this paper, method for transformation integer linear programming problems, and some special nonlinear integer programming problems, in zero-one form a presented.

(Prijevod: Tihomir Hunjak)