Mr Tihomir Hunjak, asistent
Fakultet organizacije i informatike
Varaždin

UDK 65.012.1
Znanstveni rad

DVA ALGORITMA ZA LINEARNO VIŠEKRITERIJALNO PROGRAMIRANJE S 0-1 VARIJABLAMA

U radu su prikazana dva algoritma za rješavanje problema višekriterijalnog 0-1 programiranja i teoretski rezultati potrebni za razumijevanje postupaka.

1. UVOD

Pod problemom višekriterijalnog 0-1 programiranja podrazumijeva se problem

$$(P)\ \text{Max}\ \{Cx\colon x\in F\}$$

gdje su $F=\{x\in R^n\colon Ax\leqq b,\ x_j=0,1\ j\in J\}$, C je pxn matrica, A je mxn matrica, b je mxl vektor i $J=\{1,2,\ldots,n\}$. Gornji indeksi $(x^1, x^2,\ldots)$ označavaju točke, a donji indeksi $(x_1^1, x_2^1,\ldots)$ komponente točaka.

Rješenje ovog problema je skup efikasnih točaka EF(P), pri čemu se za točku $x^0\in F$ kaže da je efikasna ako ne postoji $x\in F$ takva da vrijedi $Cx\geq Cx^0$ ($Cx\geq x^0$ znači da je zadovoljeno $Cx\geqq Cx^0$ s barem jednom strogom nejednakošću).

U traženju algoritama za rješavanje problema (P) koristile su se različite ideje koje su se oslanjale na različite karakterizacije efikasnih rješenja problema (P).

U radu J.F. Shapiro [8] za generiranje efikasnih rješenja koriste se rezultati iz dualne teorije cjelobrojnog programiranja.

D. Klein i E. Hannan [7] razvili su algoritam koji sekvencijalno generira cijeli skup EF(P) za problem višekriterijalnog cjelobrojnog linearnog programiranja, oslanjajući se na algoritam za jedokriterijalno cjelobrojno linearno programiranje. Specijalno, ako se u Klein-Hannanov algoritam umjesto algoritma za cjelobrojno programiranje ugradi algoritam za 0-1 programiranje, može se generirati skup efikasnih rješenja za problem (P).

U radu G.R. Bitran [1] koristi se ideja dominacije pomoću obrnutog polarnog konusa za polarni konus definiran redovima matrice C. Na gotovo istoj teoretskoj osnovi, koja mu je trebala za algoritam prikazan u prethodno spomenutom radu, isti je autor u radu [2] razvio algoritam u kojem koristi ideju iz teorije grafova.

Od istog autora potječe i algoritam za cjelobrojno višekriterijalno programiranje u kojem se primjenjuje postupak grananja i ograđivanja za generiranje skupa efikasnih rješenja (G.R. Bitran [3]). Kako je ovo područje relativno novo, realno je očekivati primjenu novih ideja u rješavanju problema (P).

U točki 2 ovog rada dane su potrebne definicije i ukazano je na vezu između problema (P) i mnogo općenitijeg problema $Exp[Y/\Lambda]$ koji je rješavan u radu P.L. Yu [6].

U točkama 3 i 4 prikazani su potrebni teoretski rezultati za algoritme prikazane u radovima G.R. Bitran [1] i [2] te sami algoritmi. Teoretski rezultati ilustrirani su s više primjera, a neki od primjera koji ilustriraju specijalne slučajeve preuzeti su iz originalnih radova. Algoritmi su prikazani postepeno uz komentiranje svakog koraka. Isti zadatak riješen je ručno pomoću oba algoritma korak po korak što omogućava lakše razumijevanje postupka.

U točki 5 spomenuti su neki problemi primjene višekriterijalnog 0-1 programiranja.

2. DEFINICIJE

Definicija 2.1. Neprazan skup $\Lambda \subseteq R^n$ zove se konus, ako iz $x \in \Lambda$ i $a \geqq 0$, $a \in R$ proizlazi $ax \in \Lambda$.

Definicija 2.2. Za proizvoljan skup $S \subseteq R^n$ polarni konus je skup $S^* = \{y \in R^n\colon\ y \cdot x \leqq 0,\ \forall x \in S\}$.

Definicija 2.3. Neka Y i Λ označavaju skup i konus u R^n. Točka x^0 je Λ-ekstremna točka od Y ako vrijedi
(i) $x^0 \in Y$
(ii) ne postoji x, $x \neq x^0$, $x^0 = x + \Lambda$.

Skup Λ-ekstremnih točaka od Y označava se s $Ext[Y/\Lambda]$.

Definicija 2.4. Neka je $Y \subseteq R^n$. $d \in R^n$, $d \neq 0$ je dominirajući faktor za $y \in Y$ ako iz $x = y + \lambda d$ i $\lambda > 0$ proizlazi da y dominira x.

Familija $\{D(y)/y \in Y\}$ zove se struktura dominacije za Y i označava se s D(.).

Definicija 2.5. Za dani skup Y i D(.), točka x^0 je nedominirana točka s obzirom na D(.) ako ne postoji $x \in Y$, $x \neq x^0$ i $x^0 = x + D(x)$.

Definicija 2.6. Neka su x^0, $x \in R^n$. Kaže se da x^0 dominira x u smjeru d, ako je $x^0 = x + \lambda d$ za neko $\lambda > 0$.

Definicija 2.7. Za danu matricu C kaže se da x^0 dominira x s obzirom na C, ili jednostavno y dominira x, onda i samo onda ako je $Cy \succeq Cx$.

Iz ovih definicija proizlazi da je za problem $Max\{Cx\colon x \in F,\ F \subseteq R^n\}$ Pareto-optimalno rješenje zapravo nedominirana točka u smislu definicija 2.4. i 2.5, kada je struktura dominacije sadržana u polarnom konusu određenom redovima matrice C.

U ovom radu upotrebljava se pojam dominacije u skladu s definicijama 2.6 i 2.7, pa su smjerovi dominacije iz odgovarajućeg obrnutog polarnog konusa (u radu G.R. Bitran [1] na str. 123 upotrijebljen je termin revers polar cone).

Proizlazi da je određivanje skupa efikasnih rješenja za problem Max$\{Cx: x\epsilon F, F\subseteq R^n\}$ zapravo specijalan slučaj određivanja skupa Λ-ekstremnih točaka Ext$[F/\Lambda]$ pri čemu je Λ odgovarajući konus.

3. PRVI ALGORITAM

3.1. Teoretski rezultati potrebni za konstrukciju algoritma

U daljnjem tekstu upotrijebljene su slijedeće oznake:
DUC$=\{x\epsilon R^n: x_j=0,1\ j\epsilon J\}$
(P′): max$\{Cx: x\epsilon \text{DUC}\}$
EF(P): skup efikasnih rješenja problema (P)
EF(P′): skup efikasnih rješenja problema (P′)
EF(P)^c i EF(P′)^c su skupovi neefikasnih točaka u (P′) i (P).

U proučavanju problema (P) korisno je poći od problema (P′). Pokazuje se da se skup efikasnih rješenja problema (P′) može karakterizirati pomoću skupa
$V=\{v^i\epsilon R^n, i\epsilon K/Cv^i\geqq 0\ iv_j^i=0,1 \text{ ili} -1, i\epsilon K, j\epsilon J\}$ pri čemu je $K=\{1, \ldots, k\}$.

Vektori v^i imaju slijedeća svojstva:

(i) sadržani su u obrnutom polarnom konusu za polarni konus određen redovima matrice C,

(ii) oni su smjerovi preferencija za dominaciju s obzirom na matricu C.

Skup točaka iz DUC dominiran u smjeru v^i može se karakterizirati slijedećim preslikavanjem:
$M: V\rightarrow \text{DUC}$, $M(v^i)=\{x^i{}_r\}_r$

v_j^i	x_j^i
0	1,0
1	0
—1	1

Primjer 3.1.1. $v^1=(0\ 1\ {-1}\ 0)$ $M(v^1)=\{(1011), (1010), (0011), (0010)\}$

U slijedećoj lemi iznose se neka od svojstava ovog preslikavanja:

Lema 3.1.1.

(a) Ako je $x\epsilon M(v)$ za neki $v\epsilon V$, tada je $x+v\epsilon$DUC i $C(x+v)\geqq Cx$, tj, $x\epsilon$EF(P′)^c.

(b) Ako je $x\epsilon$DUC i $x\epsilon$EF(P′)^c, tada postoji $v\epsilon V$ takav da je $x\epsilon M(v)$.

(c) Neka je $x\epsilon$DUC i $x\epsilon M(v)$ za neki $v\epsilon V$. Tada $x+v\epsilon$DUC.

Dokaz:

(a) Po definiciji je $M(v)+v \subset DUC$. Nadalje je zbog $Cv \geqq 0$ $C(x+v) \geqq Cx$.
(b) Zbog $x \in EF(P')^c$ postoji $x^1 \in DUC$ takav da vrijedi $Cx^1 \geqq Cx$, odnosno $C(x^1-x) \geqq 0$. Stavi li se $v=x^1-x$, proizlazi da je $x \in M(v)$.
(c) Iz $x \in M(v)$ proizlazi da za neki $j \in J$ vrijedi $v_j=1$ i $x_j=1$ ili $v_j=-1$ i $x_j=0$. Za bilo koji od ova dva slučaja proizlazi $x+v \in DUC$.

U ovoj lemi sadržan je i dokaz za slijedeći teorem:

Teorem 3.1.1. $\cup_{i \in K} M(v^i)$ je skup neefikasnih točaka u (P'), tj. $EF(P')^c = \cup_{i \in K} M(v^i)$.

Dokaz: u lemi 3.1.1. (a) dokazano je $\cup_{i \in K} M(v^i) \subseteq EF(P')^c$, a u (b) je dokaz za $EF(P')^c \subseteq \cup_{i \in K} M(v^i)$.

Može se pokazati da za generiranje skupa $EF(P')^c$ kao $\cup_{i \in K} M(v^i)$ nije potreban cijeli skup $\{v^i / i \in K\}$, već se može raditi i s njegovim podskupom. Kako se može odrediti taj podskup, može se zaključiti iz slijedeće leme:

Lema 3.1.2. Neka su $v^1, v^2 \in V$, te $v_j^1 = v_j^2$ za $j \notin J_0$ i $v_j^1=0$ za $j \in J_0$. Tada je $M(v^2) \subset M(v^1)$.

Dokaz: neka je $y \in M(v^2)$. Prema lemi 3.1.1.(a) $y+v^2 \in DUC$. To znači da je za bilo koji $j \in J$ $y_j=0$ ili 1 i $y_j+v_j^2=0$ ili 1. Zbog $v_j^1=v_j^2$ za $j \notin J_0$ vrijedi i $y_j+v_j^1=0$ ili 1, a zbog $v_j^1=0$ za $j \in J_0$ je $y_j+v_j^1=0$ ili 1. Dakle je $y+v^1 \in DUC$, pa prema lemi 3.1.1.(c) slijedi $y \in M(v^1)$.

Primjer 3.1.2. $v^1=(1\ {-1}\ 0\ 0)$, $v^2=(1\ {-1}\ 0\ 1)$. $J_0=\{3,4\}$,
$M(v^1)=\{(0\,1\,1\,1), (0\,1\,1\,0), (0\,1\,0\,1), (0\,1\,0\,0)\}$
$M(v^2)=\{(0\,1\,1\,1), (0\,1\,0\,1)\}$.

Za vektore v^1 i v^2 sa svojstvom iz leme 3.1.2. kaže se da v^1 pokriva v^2 (v^1 je pokrivajući element za v^2).

Ova lema je korisna kod generiranja skupa V. Naime, ima li neki vektor m nula, on pokriva sve one vektore koji se u preostalim komponentama podudaraju s njim. Dakle njih 3^m-1.

Za vektore koji se pokrivaju važi i slijedeća lema:

Lema 3.1.3. Neka su v^1 i $v^2 \in V$ takvi da v^1 pokriva v^2. Tada vrijedi $M(v^2)+v^2 \subset M(v^1)+v^1$.

Dokaz: pretpostavimo $x \in M(v^2)$. Nadalje neka je $y_j=x_j+v_j^2$ za $j \in J_0$ i $y_j=x_j$ za $j \notin J_0$. Prema lemi 3.1.1.(a) za $j \in J_0$ je $y_j=0$ ili 1. Zbog toga je $y \in M(v^1)$ i vrijedi $y+v^1=x+v^2$.

3.2. Veza između problema (P′) i (P)

Rješenje problema (P) povezano je s rješenjem problema (P′). Uključe li se u dosadašnja razmatranja ograničenja $Ax \leqq b$, nije teško zaključiti slijedeće:

(i) Svaki $x \in EF(P') \cap F$ je ujedno efikasan i u (P)
(ii) Neefikasna točka u (P′) nije nužno i neefikasna u (P).

Te tvrdnje strože su formulirane i dokazane u slijedećoj lemi:

Lema 3.2.1.

(a) Ako je za neki $u \in K$ $Av^u \leqq 0$, tada je $F \cap M(v^u) \subseteq EF(P)^c$.
(b) Pretpostavimo $x^0 \notin EF(P')$, $x^0 \in EF(P)$ i neka je $I(x^0) = \{i \in K : x^0 \in M(v^i)\}$. Tada $x^0 + v^i \notin F$ $\forall$ $i \in I(x^0)$.

Dokaz:

(a) Neka je $x \in F \cap M(v^u)$. Tada $x + v^u \in DUC$ i $A(x+v^u) = Ax + Av^u \leqq Ax \leqq b$ tj. $x + v^u \in F$.

(b) Neka je $x^0 \in EF(P)$. Zbog $C(x^0+v^i) \geq Cx^0$ slijedi da $x^0 + v^i \notin F$ $\forall$ $i \in I(x^0)$.

3.3. Algoritam (G. R. Bitran [1])

Osnovna ideja za postizanje skupa EF(P) je da se taj skup odredi kao unija točaka efikasnih u (P') i u (P) (kao $EF(P') \cap F$) i onih točaka koje su neefikasne u (P') ali su efikasne u (P).

Algoritam se izlaže po koracima uz odgovarajuće komentare:
Neka je $I^1 = \{1 \leqq i \leqq r : Av^i \leqq 0\}$ i $I^2 = \{1, 2, \ldots, r\} - I^1$.

1. korak
Konstruira se podskup $\bar{V} = \{v^i\}_{i=1}^r$ od V potreban za određivanje skupa $EF(P')^c = \cup_{i=1}^r M(v^i) = \cup_{i \in K} M(v^i)$.

2. korak
Odredi se skup $EF(P')^c$.

3. korak
Odredi se skup točaka efikasnih u (P') i u (P)
$EF(P') \cap F = (DUC - EF(P')^c) \cap F$
Preostalo je da se identificiraju one točke neefikasne u (P') koje su efikasne u (P).

4. korak
(a) Odredi se skup $\Psi = \cup_{i \in I^1} M(v^i)$. Prema lemi 3.2.1.(a) točke iz ovog skupa pripadaju skupu $EF(P)^c$.
(b) Odredi se skup $\Delta_i = M(v^i) + \{v^i\}$, $i \in I^2$. U ovom skupu nalaze se one točke iz DUC koje dominiraju točke iz $M(v^i)$ u smjeru v^i. Preostale točke iz EF(P) su u nekima Δ_i, $i \in I^2$.
(c) Odredi se skup $\Omega_i = M(v^i) - \Psi$, $i \in I^2$. Ovime se iz skupa $M(v^i)$ ($i \in I^2$, tj. $Av^i > 0$) isključuju točke iz Ψ (tj. one koje su dominirane u nekom drugom smjeru v^u, $Av^u \leqq 0$).
(d) Odredi se skup $\Lambda_i = \Omega_i - \{x \in \Omega_i : \exists y \in EF(P') \cap F, Cy \geq Cx\}$, $i \in I^2$. Time se iz skupa Ω_i isključuju one točke koje su dominirane s nekom od točaka efikasnih u (P) dobivenih u 3. koraku.
(e) Odredi se skup $\eta_i = \Lambda_i \cap F$, $i \in I^2$.
(f) Odredi se skup $\theta_i = \{x \in \eta_i : \nexists y \in \Delta_i \cap F \text{ i } Cy \geq Cx\}$ i skup $\theta_i^c = \eta_i - \theta_i$ $i \in I^2$.

U θ_i nalaze se točke koje nisu dominirane u smjeru v^i, a u θ_i^c su točke koje su dominirane u smjeru v^i.

(g) Odredi se skup $\Phi = \cup_{i\epsilon I^2}\theta_i - \cup_{i\epsilon I^2}\theta_i^c$. Time su određene one točke koje su neefikasne u EF(P') a efikasne u (P).

5. korak
$EF(P) = (EF(P') \cap F)$
Točkama efikasnim u (P') i (P) dodaju se točke iz Φ i time je kompletiran skup EF(P).

Primjer 3.3.1. Riješiti problem

$$(P) \mathrm{Max}\{Cx: x \epsilon F\}$$

pri čemu je $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ $F = \{x \epsilon R^3: x_1 + x_2 + x_3 \leqq 2,\ x_j = 0, 1,\ j = 1, 2, 3\}$

Za ovaj primjer dobije se

$V = \{(1\,1\,1), (1\,1\,0), (1\,1\,-1), (1\,0\,1), (1\,0\,0), (1\,0\,-1), (1\,-1\,0), (1\,-1\,-1), (0\,1\,1)\}$

1. korak
v^5 pokriva vektore v^1, v^2, v^3, v^4, v^6, v^7 i v^8 s $J_0 = \{2, 3\}$. Zbog toga je skup $\{v^5, v^9\}$ dovoljan za konstrukciju skupa $EF(P')^c$.
Također dobije se $I^1 = \emptyset$, $I^2 = \{5, 9\}$.

2. korak
$EF(P')^c = M(v^5) \cup M(v^9) = \{(0\,1\,1), (0\,1\,0), (0\,0\,1), (0\,0\,0), (1\,0\,0)\}$

3. korak

$$EF(P') \cap F = (DUC - EF(P')^c) \cap F = \{(1\,1\,1), (1\,1\,0), (1\,0\,1)\} \cap F = \{(1\,1\,0), (1\,0\,1)\}$$

4. korak

(a) $\Psi = \emptyset$

(b) $\Delta_5 = \{(1\,1\,1), (1\,1\,0), (1\,0\,1), (1\,0\,0)\}$
$\Delta_9 = \{(0\,1\,1), (1\,1\,1)\}$

(c) $\Omega_5 = \{(0\,1\,1), (0\,1\,0), (0\,0\,1), (0\,0\,0)\}$
$\Omega_9 = \{(1\,0\,0), (0\,0\,0)\}$

(d) $\Lambda_5 = \emptyset$
$\Lambda_9 = \{(1\,0\,0)\}$

(e) $\eta_5 = \emptyset$
$\eta_9 = \{(1\,0\,0)\}$

(f) $\theta_5 = \emptyset$ $\theta_5^c = \emptyset$
$\theta_9 = \{(1\,0\,0)\}$ $\theta_9^c = \emptyset$

(g) $\Phi = \{(1\,0\,0)\}$

5. korak
$EF(P) = (EF(P') \cap F) \cup \Phi = \{(1\,1\,0), (1\,0\,1), (1\,0\,0)\}$

Kako skup DUC za zadani problem sadrži svega 8 elemenata, lako se provjeri da je stvarno dobiven skup efikasnih rješenja za zadani problem.

4. DRUGI ALGORITAM

4.1. Definicije i teoretski rezultati

U izlaganju ovog algoritma uz prethodno definirane pojmove koriste se još neki.

Definicija 4.1.1. Za dva skupa X, $Y \subseteq R^n$ i matricu C, s $Y \not\succ X$ označava se skup točaka iz X koje nisu dominirane ni s jednom točkom $y \epsilon Y$ s obzirom na C ($Y \not\succ X = \{x/x \epsilon X$ i $\not\exists y \epsilon Y, C(y-x) \geq 0\}$).

Uz preslikavanje M(v) uvodi se novo preslikavanje N : V→DUC dano slijedećom tabelom (u tabeli je uz preslikavanje N(v) dano i preslikavanje M(v) zbog uočavanja međusobne veze):

v	$x \epsilon M(v)$	$x \epsilon N(v)$
v_j	x_j	x_j
0	0, 1	0, 1
1	0	1
-1	1	0

Tabela 4.1.1.

Primjer 4.1.1. Neka je v=(0 1 -1 0). Dobije se
$N(v) = \{(0\,1\,0\,0), (0\,1\,0\,1), (1\,1\,0\,0), (1\,1\,0\,1)\}$

Preslikavanjem M(v) određen je podskup točaka iz DUC koje su dominirane u smjeru v, a N(v) je podskup točaka iz DUC koje dominiraju točke iz M(v).

Veza između skupova M(v) i N(v) može se formulirati u obliku poučka

Poučak 4.1.1. Za svaki $v \epsilon V$ vrijedi $N(v) = \{v\} + M(v)$

Na slijedećem primjeru to se lako vidi:

Primjer 4.1.2. v=(0 1 -1 0)

$$M(v) = \{(0\,0\,1\,0), (0\,0\,1\,1), (1\,0\,1\,0), (1\,0\,1\,1)\}$$
$$N(v) = \{(0\,1\,0\,0), (0\,1\,0\,1), (1\,1\,0\,0), (1\,1\,0\,1)\}$$

U prethodnoj točki skup M(v) poslužio je za formiranje skupa neefikasnih rješenja problema (P′) zbog $EF(P')^c = \bigcup_{i \epsilon K} M(v^i)$. Nažalost, iako je N(v) skup točaka iz DUC koje dominiraju točke iz M(v), ne vrijedi ni $EF(P') = \bigcup_{i \epsilon K} N(v^i)$ ni $EF(P') \subseteq \bigcup_{i \epsilon K} N(v^i)$, odnosno, može postojati točka $x \epsilon EF(P')$ takva da vrijedi $x \notin N(v^i)\ \forall\ i \epsilon K$.

Slijedeći primjer ilustrira takvu situaciju:

Primjer 4.1.3. (G.R. Bitran [2], primjer 2.1.) Dan je problem

$$(P')\ \max \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x : x \epsilon DUC \right\}.$$

U skladu s definicijama je

$$V=\{(1\,1)\},\ M(v)=\{(0\,0)\},\ N(v)=\{(1\,1)\}.$$

Lako se vidi da je skup efikasnih točaka za zadani problem

$$EF(P')=\{(1\,0),\ (1\,1),\ (0\,1)\}$$

a one sve nisu sadržane u $N(v)$.

Iako u ovom slučaju vrijedi $EF(P')\supseteq N(v)$, to ne mora vrijediti općenito. Primjer za to je slijedeći:

Primjer 4.1.4. Neka je $C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ & 0\end{bmatrix}$. Tada je $V=\{v^1=(1\,0),\ v^2=(0\,1),\ v^3=(1\,1)\}$. Nadalje je $N(v^1)=\{(1\,0),\ (1\,1)\}$, $N(v^2)=\{(0\,1),\ (1\,1)\}$, $N(v^3)=\{(1\,1)\}$. Neka je $z=(1\,1)$ i $y=(1\,0)$. Očito je da vrijedi $z=y+v^2$, odnosno z dominira y u smjeru v^2 pa $y\notin EF(P')$.

U lemi 3.1.2 pokazano je da za sve v^1, $v^2\in V$ takve da v^1 pokriva v^2, vrijedi $M(v^2)\subset M(v^1)$. Ova tvrdnja može se pojačati:

Poučak 4.1.2. Neka su $v^1\neq v^2$, v^1, $v^2\in V$ i neka je $J_0=\{j\in J\colon v_j^1=0\}$. Tada je $v_j^1\neq v_j^2$ za $j\notin J_0$ onda i samo onda ako je $M(v^2)\subset M(v^1)$ (ili $N(v^2)\subset N(v^1)$).

Dokaz: Nužnost je dokazana u lemi 3.1.2.

Dovoljnost: pretpostavi se da za $j\notin J_0$ vrijedi $v_j^1\neq v_j^2$. Po definiciji preslikavanja M slijedi $M(v^1)\cap M(v^2)=\emptyset$ ako je $v_j^2\neq\emptyset$, a u slučaju $v_j^2=0$ postoji $x\in M(v^2)$ takav da je $x_j\neq y_j$ $\forall$ $v\in M(v^1)$. U oba slučaja dolazi se u kontradikciju s pretpostavkom $M(v^2)\subset M(v^1)$. Za dokazivanje tvrdnje $N(v^2)\subset N(v^1)$ uz dokaz poučka 4.1.2. koristi se poučak 4.1.1. i definicija skupa $M(v)$.

Direktna posljedica poučka 4.1.2. je ta da je skup pokrivajućih elemenata od V dovoljan za generiranje skupova $\cup_{i\varepsilon K}M(v^i)$ i $\cup_{i\varepsilon K}N(v^i)$ zbog $\cup_{i=1}{}^{r}M(v^i)=\cup_{i\varepsilon K}M(v^i)$ i $\cup_{i=1}{}^{r}N(v^i)=\cup_{i\varepsilon K}N(v^i)$.

Važno je spomenuti da skup $\overline{V}$ pokrivajućih elemenata skupa V nije najmanji podskup skupa V koji ima ta svojstva (vidjeti u radu G. R Bitran [2] primjer 2.11). No, nije pronađena karakterizacija za takav podskup u općem slučaju.

Poučak 4.1.3. Neka su v^1, $v^2\in V$. Tada je $N(v^1)\cap M(v^2)=\emptyset$ onda i samo onda ako je $v_j^1\cdot v_j^2>0$ za neki $j\in J$.

Dokaz: Nužnost: pretpostavimo da je $v_j^1\cdot v_j^2\leqq 0$ $\forall$ $j\in J$. Tada se može konstruirati $x\neq 0$, $x\in N(v^1)\cap M(v^2)$ na slijedeći način

$$x_j=\begin{cases}1 \text{ ako vrijedi } v_j^1=1 \text{ ili } v_j^2=-1\\ 0 \text{ ako vrijedi } \begin{cases}v_j^1=-1 \text{ ili } v_j^2=1\\ v_j^1=0 \text{ i } v_j^2=0\end{cases}\end{cases}$$

U pretpostavljenom slučaju je dakle $x\in N(v^1)\cap M(v^2)$.

Dovoljnost: pretpostavimo $x\in N(v^1)\cap M(v^2)$. To znači da je $x-v^1\in DUC$ i $x+v^2\in DUC$, odnosno da je $x_j=0$ za $v_j^1=0$ ili -1 i $v_j^2=0$ ili 1 i $x_j=1$ za $v_j^1=1$ ili 0 i $v_j^2=0$ ili -1.

U oba slučaja vrijedi $v_j^1\cdot v_j^2\leqq 0$ $\forall$ $j\in J$.

Korolar 4.1.1. Za svaki $v \in V$ vrijedi $N(v) \cap M(v) = \emptyset$.

Korolar 4.1.2. Neka su $v_1, v_2 \in V$ i neka je $J_0 = \{j \in J : v_j^1 = 0\}$. Ako je $v_j^2 = v_j^1$ za $j \in J_0$, tada je $N(v^1) \cap M(v_2) = \emptyset$ i $N(v^2) \cap M(v^1) = \emptyset$.

Poučak 4.1.4. Neka su $v^1, v^2 \in V$. Tada $M(v^1) \cap M(v^2) = \emptyset$ (ili $N(v^1) \cap N(v^2) = \emptyset$) onda i samo onda ako je $v_j^1 \cdot v_j^2 < 0$ za neki $j \in J$.

Dokaz. Nužnost: neka je $v_j^1 \cdot v_j^2 \geqq 0$ za sve $j \in J$ i neka je x konstruiran na slijedeći način

$$x_j = \begin{cases} 1 \text{ ako su obje komponente } v_j^1 \text{ i } v_j^2 = -1 \text{ ili } 1 \\ 0 \text{ ako nije ni jedan od gornja dva slučaja} \end{cases}$$

Očito je $x + v^1$ i $x + v^2 \in DUC$ ili $\notin DUC$ pa je zbog toga $x \in M(v^1) \cap M(v^2)$ ($x \in N(v^1) \cap N(v^2)$). Zbog toga, da bi vrijedilo $M(v^1) \cap M(v^2) = \emptyset$ ($N(v^1) \cap \cap N(v^2) = \emptyset$), mora biti za najmanje jedan $j \in J$ $v_j^1 \cdot v_j^2 < 0$.

Dovoljnost: pretpostavimo $x \in M(v^1) \cap M(v^2)$. To znači da je $x + v^1 \in DUC$ i $x + v^2 \in DUC$, odnosno da je

$$x_j = \begin{cases} 0 \text{ za } v_j^1 = \ 0 \text{ ili } 1 \text{ i } v_j^2 = \ 0 \text{ ili } 1 \\ 1 \text{ za } v_j^1 = -1 \text{ ili } 0 \text{ i } v_j^2 = -1 \text{ ili } 0 \end{cases}$$

pa je u svakom slučaju $v_j^1 \cdot v_j^2 \geqq 0$.

Pretpostavimo da je $x \in N(v^1) \cap N(v^2)$. Otuda je $x - v^1 \in DUC$ i $x - v^2 \in DUC$, odnosno

$$x_j = \begin{cases} 0 \text{ za } v_j^1 = 0 \text{ ili } -1 \text{ i } v_j^2 = 0 \text{ ili } -1 \\ 1 \text{ za } v_j^1 = 1 \text{ ili } \ 0 \text{ i } v_j^2 = 1 \text{ ili } \ 0, \end{cases}$$

pa je $v_j^1 \cdot v_j^2 \geqq 0$.

Zbog razumijevanja algoritma korisno je dosadašnje teoretske rezultate povezati s nekim pojmovima iz teorije grafova. Ako se elementi skupova $\cup_{i \in K} M(v^i)$ i $\cup_{i \in K} N(v^i)$ promatraju kao čvorovi grafa koji se mogu pridružiti vrhovima hiperkocke određene skupom DUC, ti grafovi ne moraju biti povezani, tj. čvorovi ne moraju pripadati susjednim vrhovima u DUC

U slijedećem primjeru konstruirana je takva situacija:

Primjer 4.1.5. (G. R. Bitran [2], primjer 2.9.) Matrica kriterija C zadana je redovima $c^1 = (1\,1\,1\,1)$, $c^2 = (1\,-2\,1\,0)$, $c^3 = (-1\,2\,0\,1)$, $c^4 = (-1\,2\,-1\,0)$ i $c^5 = (1\,-2\,0\,-1)$. Za tu matricu je $V = \{(v^1 = (1\,1\,1\,-1),\ v^2 = (1\,0\,-1\,1)\}$, $M(v^1) = \{(0\,0\,0\,1)\}$, $M(v^2) = \{(0\,0\,1\,0),\ (0\,1\,1\,0)\}$, $N(v^1) = \{(1\,1\,1\,0)\}$, $N(v^2) = \{(1\,0\,0\,1),\ (1\,1\,0\,1)\}$ i vidi se da ni $M(v^1) \cup M(v^2)$ ni $N(v^1) \cup N(v^2)$ nisu povezani. Zbog $\cup_{i \in K} M(v^i) = EF(P')^c$, može se zaključiti da ni skup neefikasnih rješenja problema (P') nije nužno povezan.

Korisno je postignute teoretske rezultate formulirati i u slijedećem obliku:

— ako je $y \in N(v^1) \cap M(v^2)$, tada postoji $z \in N(v^2)$ takav da je $z = y + v^2$, tj. z dominira y u smjeru v^2

— ako je $N(v^1) \cap M(v^2) = \emptyset$, može postojati $z \in N(v^2)$ takav da z dominira $y \in N(v^1)$ u smjeru v^2 (tj. činjenica da vrijedi $N(v^1) \cap M(v^2) = \emptyset$ ne mora značiti i to da $y \in N(v^1)$ nije dominiran u smjeru v^2). Takva situacija konstruirana je u radu G.R. Bitran [2] u primjeru 2.1.

4.2. Algoritam (G.R. Bitran [2])

Ideja algoritma za postizanje skupa EF(P) na temelju iznesenih teoretskih rezultata u točki 4.1. može se prikazati pomoću pojmova iz teorije grafova. Vrhovi jedinične hiperkocke mogu se promatrati kao čvorovi orijentiranog grafa u kojem su lukovi elementi od $\overline{V}$, pri čemu su čvorovi x^1 i x^2 povezani lukom $v \in \overline{V}$ s početnim čvorom x^1 i završnim čvorom x^2 ako je $x^2 = x^1 + v$ ili, drugim riječima, kada je $x^2 \in N(v)$ i $x^1 \in M(v)$. U tom slučaju kaže se da je x^2 sljedbenik od x^1. Taj graf označi se s $G(DUC, \overline{V})$.

Neka su svojstva tog grafa značajna za razumijevanje algoritma:

(a) zbog toga jer ne mora svaki element iz DUC biti u nekom $N(v)$, slijedi da neki vrhovi od $G(DUC, \overline{V})$ mogu biti izolirani čvorovi;

(b) u svakom putu završni čvor je efikasan u (P'), dok su svi prethodnici elementi skupa $\bigcup_{i=1}^{r} M(v^i)$;

(c) u grafu $G(DUC, \overline{V})$ nema ciklusa. To svojstvo grafa je posljedica činjenice da je suma elemenata bilo kojeg podskupa skupa $\overline{V}$ različita od 0.

Algoritam se iznosi postepeno uz odgovarajuće komentare koji bi trebali omogućiti njegovo lakše razumijevanje.

Prvi dio

Odrediti skup $\overline{V}$.

Drugi dio

Odrediti skup vrhova jedinične hiperkocke koji su bilo izolirani čvorovi, bilo završni čvorovi u $G(DUC, \overline{V})$. Taj skup označi se s D, a može se odrediti na osnovu slijedećeg svojstva njegovih elemenata: $x \in D$ onda i samo onda ako je $x \in DUC$ i $x + v \notin DUC$ $\forall v \in \overline{V}$.

Treći dio

Neka je $E_2 = \emptyset$.

1. korak

   Formira se skup $ED = (D \cap F) \not> (D \cap F)$. U ovom koraku dobiju se izolirani i završni čvorovi grafa $G(DUC, \overline{V})$ koji mogu biti efikasne točke za (P) ukoliko ne postoji efikasna točka izvan tog skupa koja bi ih dominirala. Takva točka mogla bi biti samo neka od prethodnika nekog od završnih čvorova koji nije moguć (nije iz $D \cap F$).

   Dakle, treba ispitati prethodnike završnih čvorova koji nisu mogući.

2. korak

   Formira se skup $E_3 = ED \not> (D \setminus F)$.

   Iz skupa $D \setminus F$ uklanjaju se oni završni čvorovi koji su dominirani nekim elementom iz ED. Ako je $E_3 = \emptyset$, $EF(P) = ED$ i algoritam staje. Ako je $E_3 \neq \emptyset$, ide se na korak 3.

3. korak

   Formiraju se skupovi $E_1 = E_3 \not> ED$ i $E_2 = ED \setminus E_1$.

   Točke iz E_1 su sigurno i iz EF(P) jer nisu dominirane ni s točkama iz $D \cap F$ ni s onima iz $D \setminus F$, pa ih ne mogu dominirati ni prethodnici čvorova iz $D \setminus F$.

4. korak
Odrede se svi prethodnici čvorova $x \in E_3$. S E_4 označi se podskup prethodnika koji su u F, a s E_5 se označi podskup onih koji nisu mogući. U E_4 još je moguće naći točke iz EF(P). One se identificiraju provjerom dominacije s elementima skupova E_1 i E_2, s tim da se pri tom reducira mogući skup ispitivanjem dominacije pomoću točaka koje su sigurno iz EF(P) ili su dominirane s EF(P).

5. korak
Odredi se skup $E_6 = E_1 \triangleright E_4$.

6. korak
Odredi se skup $E_2 = E_6 \triangleright E_2$.

7. korak
Odredi se skup $E_6 = E_2 \triangleright E_6$.

8. korak
Odredi se skup $E_6 = E_6 \triangleright E_6$ i stavi se $E_2 = E_2 \cup E_6$.
Točke iz E_2 su efikasne u (P) ako među prethodnicima čvorova iz E_5 nema onih koji dominiraju točke iz E_2. Zbog toga se u idućim koracima ispituju točke iz skupa E_5.

9. korak
Odredi se skup $E_5 = E_1 \triangleright E_5$. U ovom koraku iz skupa E_5 izbace se sve one točke koje su dominirane s nekim $x \in E_1$ $(E_1 \subseteq EF(P))$.

10. korak
Odredi se skup $E_5 = E_2 \triangleright \grave{E}_5$. Stavi se $E_3 = E_5$. Izbace se sve točke dominirane s E_2 (u E_2 su točke iz EF(P) i možda iz $EF(P)^c$).
Ako je $E_3 = \emptyset$, postupak je gotov i $EF(P) = E_1 \cup E_2$.
Ako je $E_3 \neq \emptyset$, ide se na korak 4.

Kada se postupak zaustavi, svi čvorovi grafa $G(DUC, \overline{V})$ su ispitani — bilo implicite bilo eksplicite. Konačni skup $EF(P) = E_1 \cup E_2$ je skup točaka iz F koje nisu dominirane ni s jednim mogućim čvorom iz $G(DUC, \overline{V})$.

Primjer 4.2.1. Pomoću prikazanog algoritma treba riješiti zadatak iz primjera 3.3.1. Međurezultati potrebni u ovom postupku, a koji su određeni u primjeru 3.3.1, ne računaju se iznova.

Prvi dio
$\overline{V} = \{v_1 = (1\ 0\ 0),\ v^2 = (0\ 1\ 1)\}$
Ovaj skup određen je u primjeru 3.3.1.

Drugi dio
$D = \{(1\ 1\ 1),\ (1\ 1\ 0),\ (1\ 0\ 1)\}$

Treći dio
$E_2 = \emptyset$, $D \cap F = \{(1\ 1\ 0),\ (1\ 0\ 1)\}$
1. korak $ED = \{(1\ 1\ 0),\ (1\ 0\ 1)\}$
2. korak $E_3 = \{(1\ 1\ 1)\}$

3. korak $E_1=\{(1\,1\,0), (1\,0\,1)\}$, $E_2=\emptyset$
4. korak $E_4=\{(0\,1\,1), (1\,0\,0)\}$, $E_5=\emptyset$
5. korak $E_6=\{(1\,0\,0)\}$
6. korak $E_2=\emptyset$
7. korak $E_6=\{(1\,0\,0)\}$
8. korak $E_6=\{(1\,0\,0)\}$, $E_2=E_6$
9. korak $E_5=\emptyset$, $E_3=E_5=\emptyset$

$EF(P)=E_1 \cup E_2=\{(1\,0\,0), (1\,0\,1), (1\,0\,0)\}$.

5. NEKI PROBLEMI PRIMJENE VIŠEKRITERIJALNOG 0-1 PROGRAMIRANJA

Brojnost do sada razvijenih modela jednokriterijalnog 0-1 i cjelobrojnog linearnog programiranja, u cilju rješavanja odgovarajućih realnih problema (više takvih modela prikazano je u radu T. Hunjak [4]), te činjenica da je mnogo realnije tretirati te probleme kao probleme višekriterijalnog odlučivanja, ukazuju na važnost i isplativost ulaganja napora za pronalaženje efikasnih algoritama za višekriterijalno programiranje.

Računarska iskustva autora tih algoritama pokazuju da je dobra strategija u povećanju njihove efikasnosti specijalizacija općih algoritama na temelju svojstava realnih problema. Naime, pokazalo se[1)] da vremena za postizanje skupa EF(P) značajno ovise o broju efikasnih rješenja, odnosu broja negativnih i nenegativnih elemenata u matrici C, te odnosu vektora b i vektora-sume redova matrice A. Autor ovoga rada načinio je program za algoritam prikazan u točki 4, specijalno za slučaj kada matrica C ne sadrži negativne elemente.[2)] Taj slučaj odgovara problemu višekriterijalne selekcije projekata (vidjeti rad T. Hunjak [5]). Još nisu u potpunosti ispitane mogućnosti tog programa, posebno kako rješava probleme većih dimenzija.[3)]

---

1) Vidjeti u radu G.R. Bitran [1] tabelu 1 na str. 130 i tabelu 2 na str. 131, te u radu [2] tabele 4.1, 4.2, 4.3, 4.4.

2) Ta varijanta algoritma opisana je u radu G.R. Bitran [2].

3) Algoritmi prikazani u točkama 3 i 4 testirani su na problemima s manje od 20 varijabli.

LITERATURA

1. *G.R. Bitran, Linear multiple objective programs with zero-one variables, Mathematical Programming, Vol. 13, 1977, No. 2, 121—139.*

2. *G.R. Bitran, Theory and algorithms for linear multiple objective programs with zero-one variables, Mathematical Programming, Vol. 17, 1979, 362—390.*

3. *G.R. Bitran, A combined approach to solve binary multicriteria problems, Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 29, 1982, No. 2, 181—201.*

4. *T. Hunjak, Primjena cjelobrojnog programiranja u investicijskom odlučivanju, magistarski rad, Ekonomski fakultet Zagreb, 1981.*

5. *T. Hunjak, Investicijska odluka kao problem višekriterijalnog programiranja, rad saopćen na simpoziju SYMOPIS'83, Herceg-Novi, 1983.*

6. *P.L. Yu, Cone Convexity, Cone Extreme Points, and Nondominated Solutions in Decision Problems with Multiobjectives, Journal of Optimization Theory ond Aplications, Vol. 14, 1974, No. 3, 319—377.*

7. *D. Klein, E. Hannan, An algorithm for the multiple objective integer linear programiming problem, European Journal of Operational Research, Vol. 9, 1982, 378—385.*

8. *J.F. Shapiro, Multiple Criteria Public Investment Decision Making by Mixed Integer Programming, in Proceedings of the Conference on Multicriterion Decision Making, Jouy En Josas, 1975, 170—181.*

Primljeno: 1983-12-30

Mr Tihomir Hunjak, Two algorithms for linear multiple objective programs with zero-one variables

SUMMARY

Two algorithms and related theoretical results are presented for linear multiple objective programs with zero-one variables.

(Prijevod: Mr Tihomir Hunjak)