Mr August Krsnik, viši predavač
Fakultet organizacije i informatike
Varaždin

UDK: 65.012.122
Stručni rad

MINIMALIZACIJA TRANSPORTNIH TROŠKOVA

U ovom članku autor daje kratak prikaz razvitka linearnog programiranja i njegovu primjenu. Zatim na jednom primjeru prijevoza opeke, na osnovi primjene jedne transportne metode, prikazuje utvrđivanja minimalnih transportnih troškova. Primjer može poslužiti kadrovima koji rade kao disponenti motornih vozila za prijevoz tereta u transportnim organizacijama udruženog rada.

1. UVOD

Na svim područjima ljudske djelatnosti nastojimo izvršiti neki zadatak sa što manje materijalnih žrtava i što manje utrošenog radnog vremena. Na taj način utječemo na smanjenje troškova, što ima za posljedicu povećanja dohotka ili sniženje prodajne cijene proizvoda ili usluga. Pronalaženje najmanjih troškova često nije moguće postići operativnom rutinom ili intuicijom, pa se u tu svrhu pronalaze razne metode. Danas se u suvremenom svijetu mnogi znanstvenici bave operacijskim istraživanjima u cilju smanjenja svih vrsta troškova. Međutim, ova tehnika zahtijeva dobro poznavanje matematičkih metoda ,a ove metode često su strane rukovodećim strukturama u OUR-ima, što je potpuno i razumljivo. U ovom radu pokušat ćemo obraditi jedan primjer utvrđivanja minimalnih transportnih troškova za prijevoz istovrsnih proizvoda.

Ukoliko neki homogeni proizvod treba distribuirati iz nekoliko centara proizvodnje (ishodišta) u više centara potrošnje (odredišta), onda se to najjednostavnije može riješiti korištenjem transportnog problema linearnog programiranja. Pri tome mora biti zadana fiksna ponuda i fiksna potražnja, i to tako da se iscrpljenjem ponuda zadovolji potražnja a da troškovi transporta budu minimalni prilikom prijevoza proizvoda od centra proizvodnje do centra potrošnje.[1] Zato se ovom tehnikom pronalazi količina robe ili proizvoda koju će centar proizvodnje uputiti centru potrošnje, a da pri tome roba od centra proizvodnje do centra potrošnje pređe najkraći put te da se tako transport obavi uz najniže troškove. Budući da u cijeni koštanja prijevoza u cestovnom prometu udio troškova goriva iznosi oko 36%, to sniženje transportnih troškova ima utjecaja na energetsku bilancu zemlje što je vrlo aktualno u nas.

---

1) *Dr Lj. Martić: Matematičke metode za ekonomske analize, svezak II, Narodne novine, Zagreb, 1966, str. 182.*

Zbog sveg prije iznijetog transportne metode našle su vrlo široku primjenu u raznim gospodarstvenim problemima. Zbog svog visokog udjela u cijeni koštanja troškovi prijevoza sirovina i gotovih proizvoda odlučujući su faktor pri izboru lokacije novih proizvodnih kapaciteta. Minimalne troškove prijevoza ustanovit ćemo pomoću metoda transportnog problema linearnog (u nekim slučajevima nelinearnog) programiranja. No i problemi koji nisu vezani za prijevoz robe i dobara mogu biti prilagođeni za rješavanje pomoću metode transportnog problema. Tako npr. pomoću ovih metoda može se riješiti raspodjela prijevoznih sredstava (kamiona, vagona, aviona itd.) na njihove korisnike. Ovim metodama može se riješiti i raspodjela proizvoda na strojeve na kojima će se oni izrađivati s obzirom na proizvodnost i kapacitet strojeva.

Neosporno je da se svi ovi problemi rješavaju transportnim metodama tako da je opći ili zajednički cilj zadovoljen na najbolji način.

Mi ćemo u ovom radu primijeniti transportne metode u pronalaženju najnižih transportnih troškova za prijevoz opeke iz triju ciglana na četiri razna gradilišta. U ovom primjeru koristili smo kao transportno sredstvo kamione nosivosti 24 tone jer je to najviša uvjetovana nosivost kamiona koji se mogu na našim cestama korsititi, što dozvoljava Zakon o sigurnosti saobraćaja. Transportni troškovi utvrđeni su na temelju kalkulacije jednog OOUR-a koji se bavi prijevozom tereta. Zadatak je pronaći minimalne troškove prijevoza opeke.

U razmatranje smo uzeli jedan model manjih dimenzija kako bismo izbjegli pretjerano velik broj iteracija.

2. RAZVITAK OPERACIJSKIH ISTRAŽIVANJA

Sve strahote II svjetskog rata primorale su znanstvenike da riješe neke kritične probleme. Tako se operacijsko istraživanje kao znanstvena oblast pojavila za vrijeme II svjetskog rata, i to na području vojne strategije i taktike. Primjena operacijskih istraživanja donijela je znatne koristi za potrebe ratovanja pe se brzo proširila i na druga područja ljudske djelatnosti. Privreda, kao najsvrsishodnija ljudska djelatnost, ubrzo je uvidjela korisnost primjene operacijskih istraživanja za potrebe ratovanja, pa je ovu oblast matematičkog programiranja uspješno počela primjenjivati.

Za vrijeme II svjetskog rata u Velikoj Britaniji formirane su grupe stručnjaka da riješe neke kritične ratne probleme. Ovi timovi stručnjaka dobro su poznavali matematičko-analitičke metode pa su zato rezultati istraživanja bili vrlo dobri. Uz ove rezultate posebno se spominje doprinos optimalnog istraživanja na poboljšanju preciznosti bombardiranja vojno-strateških točaka neprijatelja.

Iz toga proizlazi da je kolijevka operacijskih istraživanja Velika Britanija, a naziv joj potječe po posebno imenovanom kabinetu u britanskom vojnom ministarstvu: »DEPARTMENT OF OPERATIONS RESEARCH«.

Operacijsko istraživanje u privredi zapravo je staro kao i privreda jer je čovjek, kad je vršio izbor mogućnosti, bio uvijek u dilemi. U pojetčku je do svojih odluka dolazio na temelju iskustava i osjećaja, kasnije je počeo upotrebljavati matematičke i statističke metode. Otada već možemo govoriti o formalnoj primjeni operacijskih istraživanja.

Jedna od bitnih značajki operacijskih istraživanja jest ta da problemi, koji se proučavaju i rješavaju ovom tehnikom, zahtijevaju mnogo vremena na numeričkom računanju, a to uspješno rješavaju samo elektronička računala. Zato razvitak operacijskih istraživanja treba povezivati s napretkom elektroničko-računske tehnike kao jednim od primarnih uvjeta za primjenu operacijskih istraživanja.

3. PRIMJENA OPERACIJSKIH ISTRAŽIVANJA

U današnjim vrlo složenim uvjetima privređivanja, koji postaju sve kompleksniji, zamršeniji, što naročito dolazi do izražaja u procesu udruživanja rada i sredstava, u kooperaciji, a s time u vezi i u složenosti problema raspodjele zajedničkog prihoda i dohotka, primjena operacijskih istraživanja dobiva sve značajnije mjesto.

Budući da privredni procesi postaju veoma komplicirani, to se u pronalaženju najpovoljnijih rješenja sve više primjenjuju znanstvene metode.

Linearno programiranje može se primijeniti na mnoga područja ljudske djelatnosti; tako na primjer:

— u poljoprivredi, u rješavanju problema plodoreda obradivih površina po kulturama što je vrlo značajno za velike poljoprivredne kombinate; nadalje, u ishrani stoke izborom najekonomičnije smjese hrane koja sadrži neophodnu količinu potrebnih sastojaka; zatim na rješavanju problema optimalizacije količine i vrste stoke,

— u energetici pri rješavanju problema elektrifikacije raznih područja gdje treba izabrati racionalni tip električne centrale koja treba zadovoljiti potrebe određenog područja. Problem se odnosi na optimalno iskorištenje različitih izvora energije,

— u metalurgiji pri rješavanju problema racionalnog izbora sastava punjenja peći tako da otopljeni metal najbolje zadovoljava određena svojstva, a da cijena topljenja bude najniža,

— u ishrani pri rješavanju pitanja dijetalne ishrane; nadalje, može se rješavati izbor optimalnih sastava ishrane, zatim minimalizacija troškova ishrane. Primjena ove tehnike u ishrani temelji se na poznavanju određenih sastojaka u raznim prehrambenim proizvodima, pa uz poznavanje raspoloživih količina prehrambenih proizvoda i cijena omogućava postavljanje matematičkog modela radi zadovoljenja potrebe prehrane uz minimalne troškove,

— u planiranju proizvodnje s obzirom na izbor asortimana proizvodnje i iskorištenja kapaciteta,

— pri krojenju materijala u cilju minimalizacije otpadaka. Tako se u drvnoj industriji mogu postići značajni ekonomski efekti uz primjenu ove metode pri krojenju piljenica.[2)]

Sigurno bismo mogli navesti još mnogo raznih primjera primjene linearnog programiranja, ali već iz prije izloženog može se zaključiti da ova tehnika predstavlja vrlo uspješno sredstvo u donošenju poslovnih odluka u gospodarenju organizacija udruženog rada.

4. OSNOVNI PODACI ZA OBRADU

Podatke za obradu ovog primjera uzeli smo iz organizacije udruženog rada cestovnog saobraćaja koja u svojem sastavu ima putnički i teretni saobraćaj. Osnovna organizacija udruženog rada koja obavlja prijevoz robe ima u svojem sastavu voznog parka, osim klasičnih kamiona koji su predmet ovog sitraživanja, i razna vozila za prijevoz robe specijalnog tretmana.

Troškovi prijevoza zaračunavaju se po jednoj toni, što opet ovisi o duljini relacije na kojoj se roba treba prevesti.

Osnovna organizacija udruženog rada treba prevesti 12 000 tona opeke za jedan građevinski OUR. Opeku treba prevesti iz triju ciglana, koje imaju različitu lokaciju, na četiri razna gradilišta. Transportni OOUR traži takvu mogućnost prijevoza koja će mu osigurati minimalne troškove prijevoza. Građevinski OUR dao je dispoziciju po pojedinim gradilištima i raspoložive količine opeke u pojedinim ciglanama. Na osnovi primljene dispozicije transportni OOUR sastavlja slijedeću tabelu:

Tabela 1. Potrebne i raspoložive količine, odredišta i ishodišta

Ciglane	Gradilišta G_1	Gradilišta G_2	Gradilišta G_3	Gradilišta G_4	Raspoloživa količina u tonama
C_1					4 000
C_2					5 000
C_3					3 000
Potrebna količina	900	2 100	3 800	5 200	12 000

Kako se ciglane i radilišta nalaze u različitim mjestima, to su i troškovi prijevoza po jednoj toni prijevoza različiti. Zato smo sastavili tabelu troškova prijevoza po jednoj toni opeke. Zbog lakšeg rada označili smo u tabeli 1 i 2 ciglane simbolima C_1, C_2 i C_3, a gradilišta simbolima G_1, G_2, G_3 i G_4, pa ćemo se u daljoj obradi ovog primjera služiti ovim simbolima.

2) *Mr M. Bojanić: Ekonomski efekti matematičkog modeliranja u industriji namještaja, doktorska disertacija, Ekonomski fakultet, Zagreb, 1982, str. 289.*

Tabela 2. Troškovi prijevoza po toni opeke

Ciglane	Gradilišta			
	G_1	G_2	G_3	G_4
C_1	530	510	540	450
C_2	490	450	470	250
C_3	520	480	500	380

Iz prethodnih tabela vidljivo je da je potrebno sastaviti takav plan prijevoza opeke od ciglane do gradilišta da ukupni troškovi prijevoza budu najmanji jer se cijene međusobno razlikuju od ishodišta do odredišta a isto je i s raspoloživim i potrebnim količinama u ciglanama i gradilištima.

5. FORMIRANJE MODELA

Na osnovi postavljenog zadatka u tabelama 1 i 2 možemo formirati model te utvrditi funkciju cilja (kriterija) i ograničavajuće faktore. U zadatku se traži da se pronađe plan snabdijevanja gradilišta G_1, G_2, G_3 i G_4 s opekom iz ciglana C_1, C_2 i C_3, i to uz najniže troškove prijevoza. To drugim riječima znači da svakoj ciglani treba odrediti količinu opeke koju će isporučiti jednom ili većem broju gradilišta. Ovdje napominjemo da je građevinski OUR dao transportnom OOUR-u zadatak da sva gradilišta budu snabdjevena s potrebnom količinom opeke u određenom roku. U pogledu ciglana nisu stavljena nikakva ograničenja pa transportna organizacija sama po svom planu može odrediti iz koje će ciglane na koje gradilište transportirati opeku. Količina opeke, koja će se transportirati iz pojedine ciglane na pojedino gradilište, predstavlja u modelu varijabilne veličine i označit ćemo ih sa χ_{ij}, tj. χ_{ij} je količina opeke koju će i-ta ciglana isporučiti j-tom gradilištu. Ograničavajući faktori navedeni su u tabeli 1, a koeficijenti za postavljanje funkcije cilja u tabeli 2. Prema tome ograničavajući faktori sastoje se u ograničenoj raspoloživoj količini koju može svaka ciglana isporučiti svakom gradilištu. Program se može ostvariti samo ako je ukupna količina opeke s kojom raspolažu ciglane jednaka ukupnoj potrebnoj količini svih gradilišta. Zato u ovom modelu postoje tri grupe ograničavajućih faktora.

To su slijedeći faktori:

— raspoložive količine opeke u svakoj ciglani,

— potrebne količine opeke svakom gradilištu i

— postojanje jednakosti između raspoloživih količina opeke u svim ciglanama i potrebnih količina na svim gradilištima.

Pogledajmo sada kako izgledaju ograničavajući faktori kod prve grupe. Ciglana C_1 ima na raspolaganju 4 000 tona opeke koja se može isporučiti gradilištima. Količinu opeke koja se iz ciglane C_1 isporučuje gradilištu G_1 označit ćemo sa χ_{11}, gradilištu G_2 sa χ_{12}, gradilištu G_3 sa χ_{13}, a gradilištu

G_4 sa χ_{14}. Zbroj svih isporučivih količina opeke iz ciglane C_1 mora biti jednak raspoloživoj količini opeke za isporuku. Napisano u obliku jednadžbe imamo:

$$\chi_{11} + \chi_{12} + \chi_{13} + \chi_{14} = 4\,000$$

Postupimo li analogno s ostalim ciglanama, dobijemo slijedeće jednadžbe:

$$\chi_{21} + \chi_{22} + \chi_{23} + \chi_{24} = 5\,000$$
$$\chi_{31} + \chi_{32} + \chi_{33} + \chi_{34} = 3\,000.$$

Potrebne količine opeke na svakom gradilištu predstavljaju ograničavajuće faktore druge grupe. Ta ograničenja izrazit ćemo slijedećim jednadžbama:

$$\chi_{11} + \chi_{21} + \chi_{31} = 900$$
$$\chi_{12} + \chi_{22} + \chi_{32} = 2\,100$$
$$\chi_{13} + \chi_{23} + \chi_{33} = 3\,800$$
$$\chi_{14} + \chi_{24} + \chi_{34} = 5\,200.$$

U ovim ograničavajućim faktorima date su potrebe svakog gradilišta za opekom iz navedenih ciglana. Tako gradilište G_1 može dobiti opeku od svake od navedenih ciglana. Količinu opeke koju gradilište G_1 dobije iz ciglane C_1 označit ćemo sa χ_{11}, iz ciglane C_2 sa χ_{21} i iz ciglane C_3 sa χ_{31}. Istim postupkom došli smo do ostalih jednadžbi. Napominjemo da ukupne količine opeke moraju biti jednake potrebnoj količini pojedinih gradilišta. Ograničenje iz treće grupe faktora zadovoljeno je ovom jednakosti pa se može izostaviti iz modela:

$$4\,000 + 5\,000 + 3\,000 = 900 + 2\,100 + 3\,800 + 5\,200.$$

Iz dosadašnjeg razmatranja ograničavajućih faktora možemo napisati sedam jednadžbi ograničenja, tj:

$$\chi_{11} + \chi_{12} + \chi_{13} + \chi_{14} = 4\,000$$
$$\chi_{21} + \chi_{22} + \chi_{23} + \chi_{24} = 5\,000$$
$$\chi_{31} + \chi_{32} + \chi_{33} + \chi_{34} = 3\,000$$
$$\chi_{11} + \chi_{21} + \chi_{31} = 900$$
$$\chi_{12} + \chi_{22} + \chi_{32} = 2\,100$$
$$\chi_{13} + \chi_{23} + \chi_{33} = 3\,800$$
$$\chi_{14} + \chi_{24} + \chi_{34} = 5\,200.$$

Kada su definirani ograničavajući faktori, prelazi se na definiranje kriterija (cilja) optimanlosti minimalnih ukupnih transportnih troškova. Funkciju cilja (kriterija) možemo utvrditi na osnovi tabele 2. Ukupne troškove transporta čine troškovi prijevoza opeke iz svih ciglana na sva gradilišta.

Troškovi prijevoza opeke iz ciglane C_1 na gradilište G_1, G_2, G_3 i G_4 jesu:
C_1: $530\chi_{11} + 510\chi_{12} + 540\chi_{13} + 450\chi_{14}$.

Analogno tome formiramo i ostale troškove prijevoza opeke iz ostalih ciglana na spomenuta gradilišta, pa imamo:
C_2: $490\chi_{21} + 450\chi_{22} + 470\chi_{23} + 250\chi_{24}$
C_3: $520\chi_{31} + 480\chi_{32} + 500\chi_{33} + 380\chi_{34}$.

Zbrajanjem troškova prijevoza za sve ciglane dobijemo ukupne troškove transporta te formiramo funkciju cilja (kriterija) za ovaj model transporta. Označimo li ovu funkciju sa Z_o, imamo funkciju cilja u ovom obliku:

$$Z_o = 530\chi_{11} + 510\chi_{12} + 540\chi_{13} + 450\chi_{14} + \\ + 490\chi_{21} + 450\chi_{22} + 470\chi_{23} + 250\chi_{24} + \\ + 520\chi_{31} + 480\chi_{32} + 500\chi_{33} + 380\chi_{34}.$$

Zadatak će sada glasiti: treba naći negativne vrijednosti varijabli χ_{ij} $(i = 1,2,3;\ j = 1,2,3,4)$ koje će osigurati da funkcija cilja postigne minimalnu vrijednost i koje će istovremeno zadovoljiti sistem jednadžbi ograničavajućih faktora. Sada možemo reći da je model formiran i da je primjena neke transportne metode moguća. Rješavanje transportnog problema odvija se u dvije faze, i to pronalaženjem početnog i optimalnog rješenja.

6. PRONALAŽENJE POČETNOG RJEŠENJA

Početno rješenje problema prijevoza navedenog tereta može se pronaći pomoću jedne od ovih metoda (krietrija):

- dijagonalni kriterij ili »lijevi gornji kut«,
- jedinični koeficijent i
- najveća razlika između dva najmanja koeficijenta iz funkcije kriterija.

Mi ćemo početno rješenje našega problema naći dijagonalnim kriterijem.

Dijagonalni kriterij zahtijeva da se početno rješenje pronalazi na taj način što se prilazi raspodjeli tereta narednog ishodišta tek onda kada je u cijelosti izvršena raspodjela u prethodnom ishodištu.

Za potrebe daljnjeg rada formirat ćemo tabelu 3 u kojoj ćemo unijeti podatke iz ranijih tabela 1 i 2. U gornjem dijelu pojedinog kvadrata upisat ćemo troškove prijevoza opeke po toni.

Tabela 3.

Ciglane	Gradilšta G_1	G_2	G_3	G_4	Raspoložive količine
C_1	530 χ_{11}	510 χ_{12}	540 χ_{13}	450 χ_{14}	4 000
C_2	450 χ_{21}	450 χ_{22}	470 χ_{23}	250 χ_{24}	5 000
C_3	520 χ_{31}	480 χ_{32}	500 χ_{33}	380 χ_{34}	3 000
Potrebne količine	900	2 100	3 800	5 200	12 000

Da dođemo do početnog rješenja, pomoću dijagonalnog kriterija polazimo od slijedećih radnji. Najprije ćemo na osnovi raspoloživih količina opeke C_1 nastojati zadovoljiti sve potrebe gradilišta upisane u tabeli 3.

Ciglana C_1 raspolaže s 4 000 tona opeke, pa ako zadovolji rgadilište G_1 s 900 tona, preostaje joj da podmiri potrebe gradilišta G_2 s 2 100 tona i potrebe gradilišta G_3 s 1 000 tona. Kako smo na ovaj način iscrpili raspoložive količine ciglane C_1, prelazimo na ciglanu C_2 koja raspolaže s 5 000 tona opeke. Kako su gradilišta G_1 i G_2 u potpunosti podmirila svoje potrebe iz ciglane C_1, to će ciglana C_2 sudjelovati u podmirenju potreba gradilišta G_3 s 2 800 tona i gradilišta G_4 s 2 200 tona opeke. Nastavimo li dalje s ovim promatranjem, dolazimo do početnog rješenja koje ćemo unijeti u tabelu 4.

Tabela 4. Početno rješenje

Ciglane	Gradilišta G_1	G_2	G_3	G_4	Raspoložive količine
C_1	530 $\chi_{11} = 900$	510 $\chi_{12} = 2\,100$	540 $\chi_{13} = 1\,000$	450 $\chi_{14} = 0$	4 000
C_2	490 $\chi_{21} = 0$	450 $\chi_{22} = 0$	470 $\chi_{23} = 2\,800$	250 $\chi_{24} = 2\,200$	5 000
C_3	520 $\chi_{31} = 0$	480 $\chi_{32} = 0$	500 $\chi_{33} = 0$	380 $\chi_{34} = 3\,000$	3 000
Potrebne količine	900	2 100	3 800	5 200	12 000

Iz tabele 4 je vidljivo da početno rješenje čine varijable:

$\chi_{11} = 900$ $\chi_{12} = 2\,100$ $\chi_{13} = 1\,000$

$\chi_{23} = 2\,800$ $\chi_{24} = 2\,200$

$\chi_{34} = 3\,000$.

Ostale varijable u početnom rješenju imaju vrijednost nula, kao što je to vidljivo i iz tabele 4.

Ovo dobiveno početno rješenje jedno je od bazično mogućih rješenja i kažemo da je nedegenerirano jer ima $m + n - 1$ varijablu pozitivne vrijednosti.[3] U našem primjeru $m = 3$, a $n = 4$ (zadane su 3 ciglane i 4 gradilišta) što daje 6 varijabli $\chi_{ij} > 0$ pa je početno rješenje nedegenerirano.

Vrijednost funkcije cilja (kriterija) za ovo početno rješenje, kao jedno od bazična mogućih rješenja, iznosi:

$Z_o = 530\chi_{11} + 510\chi_{12} + 540\chi_{13} + 470\chi_{23} + 250\chi_{24} + 380\chi_{34}$, odnosno

$Z_o = 530 \cdot 900 + 510 \cdot 2\,100 + 540 \cdot 1\,000 + 470 \cdot 2\,800 + 250 \cdot 2\,200 + 380 \cdot 3\,000$

3) *Dr. Lj. Martić: Matematičke metode za ekonomske analize, II, Narodne novine, Zagreb, 1966, str. 194.*

$Z_o = 477\,000 + 1\,071\,000 + 540\,000 + 1\,316\,000 + 550\,000 + 1\,140\,000$
$Z_o = 5\,094\,000$ dinara.

Da li je s ovim početnim rješenjem pronađeno optimalno rješenje, odnosno da li se troškovi transporta mogu smanjiti?

7. PRONALAŽENJE OPTIMALNOG RJEŠENJA

Optimalno rješenje jednog transportnog problema može se pronaći pomoću dviju metoda; ako je već postavljen početni program. To su:

1. »Stepping stone« metoda i
2. Modificirana metoda.

Mi ćemo navedeni model transporta riješiti po prvoj metodi po kojoj se optimalno rješenje pronalazi postupno, i to preko niza mogućih rješenja.

Svako naredno moguće rješenje treba da smanji vrijednost funkcije cilja jer se u ovom slučaju traži njena minimalna vrijednost. Navedena »Stepping stone« metoda traži utvrđivanje svih mogućih prijedloga za promjenu jednog rješenja kako bi se mogao izabrati najpovoljniji prijedlog.

Pogledamo li tabelu 4, možemo utvrditi da početno rješenje možemo promijeniti utoliko koliko je potrebno da se gradilište G_4 opskrbi opekom iz ciglane C_1. Taj zahvat bit će moguć samo ukoliko se smanji vrijednost varijabli χ_{13} i χ_{24}, a poveća vrijednost varijable χ_{23}. Promjena prijevoznih troškova po jednoj toni opeke koja se upućuje gradilištu G_4 iznosi:
$d_{14} = c_{14} - c_{13} + c_{23} - c_{24} = 450 - 540 + 470 - 250 = 130.$

Ovdje smo sa d_{ij} označili promjenu prijevoznih troškova po jedinici iz i-te ciglane na j-to gradilište. Kako je ovdje $d_{14} = 130$, može se zaključiti da provođenjem ovog prijedloga ne bi došlo do smanjenja vrijednosti funkcije cilja, već do njenog povećanja. Zato moramo sada izvršiti promjenu prijevoznih troškova po jedinici (1 toni) za sve varijable koje u početnom rješenju imaju vrijednost nula.

Tako je za:

$\chi_{14} = 0 \quad d_{14} = c_{14} - c_{13} + c_{23} - c_{24} = 450 - 540 + 470 - 250 = 130$
$\chi_{21} = 0 \quad d_{21} = c_{21} - c_{11} + c_{13} - c_{23} = 490 - 530 + 540 - 470 = 30$
$\chi_{22} = 0 \quad d_{22} = c_{22} - c_{12} + c_{13} - c_{23} = 450 - 510 + 540 - 470 = 10$
$\chi_{31} = 0 \quad d_{31} = c_{31} - c_{11} + c_{13} - c_{23} + c_{24} - c_{34} = 520 - 530 + {}$
$+ 540 - 470 + 250 - 380 = -7$
$\chi_{32} = 0 \quad d_{32} = c_{32} - c_{12} - c_{13} - c_{23} + c_{24} - c_{34} = 480 - 510 + {}$
$+ 540 - 470 + 250 - 380 = -9$
$\chi_{33} = 0 \quad d_{33} = c_{33} - c_{23} + c_{24} - c_{34} = 500 - 470 + 250 - 380 = -10.$

Na osnovi prethodnog računa proizlazi da su razlike d_{ij} u ovom problemu:
$d_{14}, d_{21}, d_{22} > 0$
$d_{31}, d_{32}, d_{33} < 0.$

U ovom transportnom problemu traže se minimalni troškovi prijevoza te će na smanjenje funkcije cilja utjecati samo oni prijedlozi čiji su $d_{ij} < 0$. Kako svi $d_{ij} < 0$ nisu međusobno jednaki, to će izazvati i nejednako smanjenje vrijednosti funkcije cilja. Budući da želimo što više smanjiti vrijednost funkcije cilja, to ćemo od svih $d_{ij}<0$ izabrati onaj koji ima najveću negativnu vrijednost, a to je $d_{33} = -10$. Iz ovog se dalje utvrđuje da treba povećati vrijednost varijable χ_{24}, a smanjiti vrijednost varijabli χ_{23} i χ_{34} ukoliko se želi promijeniti vrijednost varijable χ_{33}. Pri tome, u isto vrijeme, jedna od varijabli χ_{23} ili χ_{34} mora biti jednaka nuli kako bismo mogli imati bazično moguće rješenje.

Vrijednost varijabli koje treba smanjiti iznose:
$\chi_{23} = 2\,800$ i $\chi_{34} = 3\,000$.

Budući da smo ovdje dobili vrijednost varijabli od 2 800 i 3 000, to ćemo za vrijednost 2 800 povećati vrijednost varijable χ_{24}, a umanjiti vrijednost varijabli χ_{23} i χ_{34}, pri čemu varijabla χ_{33} uzima vrijednost 2 800. Na taj način dolazimo do slijedećeg bazičnog rješenja koje dajemo u tabeli 5. Vrijednost ostalih varijabli ostala je nepromijenjena, te ovo bazično moguće rješenje sačinjavaju slijedeće varijable:
$\chi_{11} = 900$, $\chi_{12} = 2\,100$, $\chi_{13} = 1\,000$, $\chi_{24} = 5\,000$, $\chi_{33} = 2\,800$ i $\chi_{34} = 200$.

Tabela 5. Optimalno rješenje

Ciglane	Gradilišta				Raspoložive količine
	G_1	G_2	G_3	G_4	
C_1	530 $\chi_{11} = 900$	510 $\chi_{12} = 2\,100$	540 $\chi_{13} = 1\,000$	450 $\chi_{14} = 0$	4 000
C_2	490 $\chi_{21} = 0$	450 $\chi_{22} = 0$	470 $\chi_{23} = 0$	250 $\chi_{24} = 5\,000$	5 000
C_3	520 $\chi_{31} = 0$	480 $\chi_{32} = 0$	500 $\chi_{33} = 2\,800$	380 $\chi_{34} = 200$	3 000
Potrebne količine	900	2 100	3 800	5 200	12 000

Zbog toga vrijednost funkcije cilja iznosi:

$Z_1 = 530 \cdot \chi_{11} + 510 \cdot \chi_{12} + 540 \cdot \chi_{13} + 250 \cdot \chi_{33} + 380 \cdot \chi_{34}$

$Z_1 = 530 \cdot 900 + 510 \cdot 2\,100 + 540 \cdot 1\,000 + 250 \cdot 5\,000 + 500 \cdot 2\,800 + 380 \cdot 200$

$Z_1 = 477\,000 + 1\,071\,000 + 540\,000 + 1\,250\,000 + 1\,400\,000 + 76\,000$

$Z_1 = 4\,814\,000$ dinara.

Iz prethodnog proizlazi da je funkcija cilja, u odnosu na početno stanje, umanjena za 5 094 000 — 4 814 0000 = 280 000 dinara, tj. troškovi prijevoza opeke bit će za 280 000 dinara manji ukoliko se prijevoz izvrši prema rješenju iz tabele 5. Prema tome rješenju treba se iz ciglane C_1 prevesit na gradilište G_1 900 tona opeke, na gradilište G_2 2 100 tona, a na gradilište G_3 1 000 tona opeke. Nadalje, iz ciglane C_2 treba na gradilište G_4 prevesti svu raspoloživu količinu, tj. 5 000 tona cigle, dok iz ciglane C_3 treba prevesti na gradilište G_3 2 800 tona i na gradilište G_4 200 tona opeke. Ovdje se sada može postaviti pitanje da li je pronađeno optimalno rješenje. Kažemo da optimalno rješenje nije pronađeno ako postoji bar jedan

$d_{ij} < 0$. Zbog toga ćemo na osnovi tabele 5 za sve χ_{ij} čija je vrijednost jednaka nuli izračunati razlike d_{ij}, tj.:

$\chi_{14} = 0 \; d_{14} = c_{14} - c_{13} + c_{33} - c_{34} = 450 - 540 + 500 - 380 = 30$

$\chi_{21} = 0 \; d_{21} = c_{21} - c_{11} + c_{13} - c_{33} + c_{34} - c_{24} =$
$= 490 - 530 + 540 - 500 + 380 - 250 = 130$

$\chi_{22} = 0 \; d_{22} = c_{22} - c_{12} + c_{13} - c_{33} + c_{34} - c_{24} =$
$= 450 - 510 + 540 - 500 + 380 - 250 = 110.$

$\chi_{23} = 0 \; d_{23} = c_{23} - c_{33} + c_{34} - c_{24} = 470 - 500 + 380 - 250 = 100.$

$\chi_{31} = 0 \; d_{31} = c_{31} - c_{11} + c_{13} - c_{33} = 520 - 530 + 540 - 500 = 30$

$\chi_{32} = 0 \; d_{32} = c_{32} - c_{12} + c_{13} - c_{33} = 480 - 510 + 540 - 500 = 10.$

Kako su svi $d_{ij} > 0$, moramo utvrditi da je optimalno rješenje pronađeno u tabeli 5, dakle u prvoj iteraciji. Interpretiramo li sada rješenje u duhu našeg zadatka, dolazimo do zaključka da će iz ciglane C_1 trebati transportirati na gradilište G_1 900 tona opeke, na gradilište G_2 2 100 tona te na gradilište G_3 1 000 tona opeke. Iz ciglane C_2 svu raspoloživu količinu opeke transportirat ćemo na gdailište G_4, tj. svih 5 000 tona opeke. Konačno iz ciglane C_3 transportirat ćemo 2 800 tona opeke na gradilište G_3, a 200 tona opeke na gradilište G_4. Jedino ako se držimo ovog plana u transportu, troškovi prijevoza bit će minimalni, tj. oni će tada iznositi 4 814 000 dinara za transport 12 000 tona opeke.

8. ZAKLJUČAK

Operacijska istraživanja mogu se primijeniti na svim područjima ljudske djelatnosti.

Mi smo u izradi ovog modela primijenili transportni problem, na osnovi čega možemo zaključiti da se ovom tehnikom mogu uspješno rješavati problemi oko prijevoza dobara, i to ukoliko su troškovi i uvjeti linearni i ukoliko je proizvod homogen. Naš primjer pokazuje mogućnost kako bi transportni OUR prije licitiranja nekog posla trebao utvrditi do koje razine može sniziti cijenu prijevoza, a da kod toga posla ne ostvari gubitak, ukoliko postoji konkurencija na tržištu transportnih usluga. Ovaj OUR nakon izrađenog programa transporta mogao bi licitirati posao uz najmanje troškove za naručioca. Međutim, ukoliko transportni OUR nema konkurenta, mogao bi na temelju plana transporta, koji će osigurati najmanje troškove, i početnog rješenja problema ostvariti i veći dohodak, zaključenjem posla po početnom rješenju, a izvršavajući narudžbu po optimalnom rješenju.

U konkretnom primjeru efekat iznosi 280 000 dinara ili 5,5% u odnosu na početno stanje.

Svakako da će donošenje jedne ispravne poslovne odluke ovisiti o tome koliko je OUR sposoban da riješi jedan takav zadatak, a donijeti neku odluku trebalo bi da znači odabrati onu najbolju po kojoj će OUR postignuti najviše efekta.

LITERATURA

1. *M. Bojanić: Ekonomski efekti matematičkog modeliranja u industriji namještaja, doktorska disertacija, ekonomski fakultet, Zagreb, 1982.*
2. *S. Dobrenić: Linearno programiranje u privrednoj organizaciji, Informator, Zagreb, 1966.*
3. *B. Kreko: Linearno programiranje, Savremena administracija, Beograd, 1966.*
4. *Lj. Martić: Matematičke metode za ekonomske analize, svezak I, Narodne novine, Zagreb, 1966.*
5. *Lj. Martić: Matematičke metode za ekonomske analize, II svezak, Narodne novine, Zagreb, 1966.*
6. *Lj. Martić: Primjena matematičkih metoda u ekonomskoj analizi, Zbirka zadataka, Informator, Zagreb, 1971.*
7. *J. Petrić: Matematičke metode planiranja i upravljanja u radnim organizacijama, Informator, Zagreb, 1968.*
8. *R. Stanojević: Linearno programiranje, Institut za ekonomiku industrije, Beograd, 1966.*

Primljeno: 1983-04-26

Krsnik A. Minimalization of transport costing

SUMMARY

Today, operations research are widly applied to many fields of human activities. The application of mathematical programming to transport problems requires a thorough knowledge of econometric methods and analysis. The mathematical solving of models is extremly time consuming, so that the usage of computer techniques is necessary.

This paper considers the application of linear programming to transport problems. Minimal transport cost conditions ar determined, as well as the possible effects of transporting according to the optimal solution. The usage of operations research before making of ecrtain business decisions in organizations of associated labour is recommended.

(Prijevod: Barbara Markek)