Dr Ivan Lončar, docent
Fakultet organizacije i informatike
Varaždin

UDK 51
Znanstveni rad

LINDELÖFOV BROJ I INVERZNI SISTEMI

U radu se izučavaju dobro uređeni inverzni sistemi $X = \{X_\alpha, f_\beta, \Omega\}$ *sa svojstvom* $hl(X_\alpha) < \aleph_\tau$ *i* $cf(\Omega) > \aleph_{\tau+1}$. *Dokazano je da je* $hl(\lim X) < \aleph_\tau$. *Na temelju toga dokazana je relativna neprekidnost normalnosti, savršene normalnosti i povezanosti.*

Za takve inverzne sisteme dokazano je da su projekcije $f_\alpha: X \to X_\alpha$ *monotone, zatvorene, kvocijentne, odnosno nasljedno kvocijentne ako su takva vezna preslikavanja* $f_{\alpha\beta}: X_\beta \to X_\alpha$.

U odjeljku 8. dokazano je da je limes inverznog niza Lindelöfovih prostora Linndelöfov prostor ako su vezna preslikavanja zatvorena. Analogni teorem vrijedi za neprekidne inverzne sisteme.

1. UVOD

1.1. Definicija. (Engelking [1], pp. 248.). Lindelöfov broj l(X) topološkog prostora X je najmanji kardinalan broj m sa svojstvom da svaki otvoreni pokrivač prostora X ima potpokrivač potencije $\leq m$.

Regularan prostor X sa svojstvom $l(X) = \aleph_0$ zove se Lindelöfov prostor.

Nasljedni Lindelöfov broj hl(X) definira se relacijom: $hl(X) = \sup\{l(M) : M$ prostor prostora $X\}$.

Za ovaj rad bit će važna slijedeća karakterizacija broja hl(X) (vidi Engelking [1], pp. 284., Problem 3.12.7 (b)).

1.2. LEMA. Za topološki prostor X je $hl(X) < \aleph_\tau$ onda, i samo onda, kada za svaki rastući niz $U_0 \subset U_1 \subset \ldots \subset U_\alpha \ldots, \alpha < \omega_\tau$, otvorenih skupova $U_\alpha \subset X$ postoji $\alpha_0 < \omega_\tau$ sa svojstvom $U_\alpha = U_{\alpha_0}$ za svaki $\alpha \geq \alpha_0$.

1.3. NAPOMENA. Prelaskom na komplemente možemo reći da je $hl(X) < \aleph_\tau$ onda, i samo onda, kada za svaki padajući niz $F_0 \supset F_1 \supset \ldots \supset F_\alpha \supset \ldots, \alpha < \omega_\tau$, zatvorenih podskupova $F_\alpha \subset X$ postoji $\alpha_0 < \omega_\tau$ sa svojstvom $F_\alpha = F_{\alpha_0}$ za sve $\alpha \geq \alpha_0$.

U radu ćemo promatrati specijalne inverzne sisteme.

1.4. Definicija. Dobro uređeni inverzni sistem $X = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, \Omega\}$ zvat ćemo L_τ-sistem ako je $hl(X_\alpha) < \aleph_\tau$, $a \in \Omega$ i k tome $cf(\Omega) > \aleph_{\tau+1}$.

AMS(MOS) subject classification (1980), Primary 54D20, Secondary 54B25.

2. OSNOVNA SVOJSTVA L_τ-SISTEMA

L_τ-sistemi imaju nekoliko važnih svojstava koja igraju važnu ulogu u dokazivanju normalnosti, savršene normalnosti i povezanosti limesa.

2.1. LEMA. Za svaki L_τ-sistem je $hl(\lim X) < \aleph_\tau$.

Dokaz. Neka je $\underline{X}=\{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, \Omega\}$ L_τ-sistem s limesom X i neka je $F_0 \supset F_1 \supset \ldots \supset F_\mu \supset \ldots$, $\mu<\omega_\tau$, transfinitni niz zatvorenih skupova u X. Za svaki $\alpha\varepsilon\Omega$ promatrajmo niz $\overline{f_\alpha(F_0)} \supset \overline{f_\alpha(F_1)} \supset \ldots \supset \overline{f_\alpha(F_\mu)} \supset \ldots$, $\mu<\omega_\tau$. Kako je $hl(X_\alpha)<\aleph_\tau$, postoji $\mu_\alpha<\omega_\tau$ sa svojstvom $F_\mu=F_{\mu_\alpha}$ za sve $\mu\geq\mu_\alpha$. Funkcija $\alpha \longrightarrow \mu_\alpha$ definira preslikavanje $\omega_{\tau+1} \longrightarrow \omega_\tau$. Postoji barem jedan $\mu_0 \epsilon \omega_\tau$ za koji postoji $\aleph_{\tau+1}$ indeksa $\alpha\epsilon\Omega$ sa svojstvom $\mu_\alpha=\mu_0$. Prelaskom na taj kofinalni dio možemo pretpostaviti da svi indeksi α imaju svojstvo $\mu_\alpha=\mu_0$. Dakle je za sve α i sve $\mu\geq\mu_0$ ispunjena relacija $\overline{f_\alpha(F_\mu)}=\overline{f_\alpha(F_{\mu_0})}$. Kako za svaki zatvoreni $F_\mu \subset X$ vrijedi relacija $F_\mu=\lim\{\overline{f_\alpha(F_\mu)}, f_{\alpha\beta}/\overline{f_\beta(F_\mu)}, \Omega\}$, to će biti $F_\mu= F_{\mu_0}$ za sve $\mu\geq\mu_0$. Dokaz je gotov.

2.2. NAPOMENA. Analogna lema vrijedi za sisteme kod kojih je $hl(X_\alpha)_\alpha<\aleph_\tau$ i $cf(\Omega)\leq\aleph_{\tau-1}$. Za sisteme kod kojih je $cf(\Omega)=\aleph_\tau$ i $hl(X_\alpha)<\aleph_\tau$ je $hl(\lim X)\leq\aleph_\tau$ (Tkačenko [1]).

2.3. TEOREM. Neka je $X=\{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, \Omega\}$ L_τ-sistem. Za svaki zatvoreni $F \subset X = \lim \underline{X}$ postoji indeks $\alpha\epsilon\Omega$ i zatvoreni $F_\alpha \subset X_\alpha$ sa svojstvom $F=f_\alpha^{-1}(F_\alpha)$.

Dokaz. Promatrajmo transfinitni niz $f_0^{-1}(\overline{f_0(F)}) \supset f_1^{-1}(\overline{f_1(F)}) \supset \ldots \supset f_\beta^{-1}(\overline{f_\beta(F)}) \supset \ldots$, $\beta\epsilon\Omega$. Primjenom leme 1.3. utvrđujemo da postoji $\alpha\epsilon\Omega$ takav da je $f_\beta^{-1}(\overline{f_\beta(F)}) = f_\alpha^{-1}(\overline{f_\alpha(F)})$ za sve $\beta\geq\alpha$. Dakle je $F = f_\beta f_\beta^{-1}(\overline{f_\beta(F)}) = f_\alpha^{-1}(\overline{f_\alpha(F)})$. Dokaz je gotov.

2.4. LEMA. Uz pretpostavke teorema 2.3. svaki je otvoreni skup limesa original nekog otvorenog skupa iz nekog prostora inverznog sistema.

2.5. KOROLAR. Neka je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, \Omega\}$ L_τ-sistem i $\underline{Y} = \{Y_\alpha, f_{\alpha\beta}/Y_\beta, \Omega\}$, $f_{\alpha\beta}(Y_\beta) \subset Y_\alpha$, njegov zatvoreni podsistem. Ako je $\lim \underline{X} = X \neq \emptyset$ i projekcije f_α: $X \longrightarrow X_\alpha$ surjekcije, tada je $\lim Y = \underline{Y} \neq \emptyset$.

Dokaz. Imamo niz $f_0^{-1}(Y_0) \supset f_1^{-1}(Y_1) \supset \ldots \supset f_\alpha^{-1}(Y_\alpha) \supset \ldots$ zatvorenih podskupova limesa. Zbog surjektivnosti projekcija f_α svi skupovi niza su neprazni. Lema 2.1. osigurava egzistenciju takvog indeksa α da je $f_\beta^{-1}(Y_\beta) = f_\alpha^{-1}(Y_\alpha)$ za sve $\beta\geq\alpha$. Odatle slijedi da je $Y = \lim \underline{Y} = {}_\beta f^{-1}{}_\beta(Y_\beta) = f_\alpha^{-1}(Y_\alpha) \neq \emptyset$. Dokaz je gotov.

2.6. KOROLAR. Neka je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, \Omega\}$ L_τ-sistem. Za svaku točku $x\epsilon X = \lim \underline{X}$ postoji indeks $\alpha\epsilon\Omega$ sa svojstvom $x = f_\alpha^{-1}(f_\alpha(x))$.

3. NORMALNOST LIMESA

3.1. TEOREM. Neka je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, \Omega\}$ L_τ-sistem. Ako su svi prostori X_α normalni, tada je i $X = \lim \underline{X}$ normalan prostor.

D o k a z. Neka su F_1 i F_2 dva disjunktna zatvorena podskupa limesa X. Prema lemi 2.3. postoje dva indeksa α_1 i α_2 za koje je $F_1 = f_{\alpha_1}^{-1}(F_{\alpha_1})$, $F_2 = f_{\alpha_2}^{-1}(F_{\alpha_2})$. Zbog usmjerenosti skupa Ω možemo uzeti da je $\alpha_1 = \alpha_2$. U tom slučaju su F_{α_1} i F_{α_2} disjunktni zatvoreni skupovi prostora X_{α_1}. Iz normalnosti tog prostora slijedi da postoje otvoreni skupovi U_{α_1} i U_{α_2} koji su disjunktne okoline skupova F_{α_1} i F_{α_2}. Originali $f_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1})$ i $f_{\alpha_2}^{-1}(U_{\alpha_2})$ su disjunktne okoline skupova F_{α_1} i F_{α_2}. Dokaz je gotov.

4. SAVRŠENA NORMALNOST LIMESA

4.1. TEOREM. Ako su svi prostori X_α L_τ-sistema savršeno normalni, tada je $X = \lim \underline{X}$ savršeno normalan.

D o k a z. Normalnost limesa slijedi iz teorema 3.1. Treba još dokazati da je svaki zatvoreni $F \subset X$ tipa G_δ. To slijedi iz činjenice da je svaki zatvoreni F original nekog zatvorenog $F_\alpha \subset X_\alpha$ (Teorem 2.3.). Kako je F_α tipa G_δ, to je i F tipa G_δ. Dokaz je gotov.

5. NASLJEDNA NORMALNOST LIMESA

5.1. TEOREM. Neka je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, \Omega\}$ L_τ-sistem. Ako su prostori X_α nasljedno normalni, tada je i $X = \lim \underline{X}$ nasljedno normalan.

D o k a z. Neka su A i B dva separirana skupa limesa X, tj. $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$. Za skupove $\bar{A}$ i $\bar{B}$ postoji, zbog usmjerenosti skupa Ω, takav indeks $\alpha \in \Omega$ za koji je $A = F_\alpha^{-1}(A_\alpha)$ i $B = f_\alpha^{-1}(B_\alpha)$. Iz $\bar{A} \cap B = \emptyset$ slijedi $A_\alpha \cap f_\alpha(B) = 0$, gdje je $f_\alpha(A) \subset A_\alpha$. Odatle slijedi da je $\overline{f_\alpha(A)} \cap f_\alpha(B) = \emptyset$. Analogno se dokazuje da je $f_\alpha(A) \cap \overline{f_\alpha(B)} = \emptyset$. To znači da su skupovi $f_\alpha(A)$ i $f_\alpha(B)$ separirani u nasljedno normalnom prostoru X_α. Postoje zbog toga otvoreni disjunktni skupovi $U_\alpha \supset f_\alpha(A)$ i $V_\alpha \supset f_\alpha(B)$. Očito je $A \subset f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ i $B \subset f_\alpha^{-1}(V_\alpha)$. Dokaz je gotov.

5.2. NAPOMENA. Analognim dokazom uz stalnu primjenu važnog teorema 2.3. moguće je dokazati kolektivnu normalnost limesa L_τ-sistema ako su prostori sistema kolektivno normalni. Moguće je također dokazati neprekidnost preostalih raznih vrsta normalnosti.

6. POVEZANOST LIMESA

6.1. TEOREM. Neka $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, \Omega\}$ L_τ-sistem sa surjektivnim projekcijama. Povezanost prostora X_α je nuždan i dovoljan uvjet povezanosti limesa X.

D o k a z. Neka je, nasuprot tvrdnji teorema, X nepovezan. Tada postoje zatvoreni disjunktni skupovi F_1, F_2 limesa X sa svojstvom $F_1 \cup F_2 = X$. Zbog teorema 2.3. postoji indeks $\alpha \in \Omega$ za koji je $F_1 = f_\alpha^{-1}(f_\alpha(F_1))$ i $F_2 = f_\alpha^{-1}(f_\alpha(F_2))$. To znači da su $f_\alpha(F_1)$ i $f_\alpha(F_2)$ disjunktni zatvoreni skupovi koji, zbog pretpostavke o surjektivnosti projekcija, pokrivaju prostor X_α.

To je nemoguće zbog povezanosti prostora X_α. Dobivena kontradikcija završava dokaz.

6.2. KOROLAR. Neka je X L_τ-sistem. Monotonost svih preslikavanja $f_{\alpha\beta}$ je nuždan i dovoljan uvjet monotonosti projekcija $f_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$.

6.3. TEOREM. Neka je $\underline{X}$ L_τ-sistem s nealternirajućim veznim preslikavanjima $f_{\alpha\beta}$ i surjektivnim projekcijama. Tada su projekcije nealternirajuća preslikavanja.

D o k a z. Prema definiciji nealternirajućih preslikavanja (Whyburn [1], pp. 127) treba dokazati da su za svaki $x_\alpha \in X_\alpha$ i svaku separaciju $X \setminus f_\alpha^{-1}(x_\alpha) = U_1 \cup U_2$, gdje su U_1, U_2 disjunktni otvoreni skupovi, ispunjene relacije $U_1 = f_\alpha^{-1}(f_\alpha(U_1))$, $U_2 = f_\alpha^{-1}(f_\alpha(U_2))$. Zbog usmjerenosti skupa Ω i definicije L_τ-sistema postoji takav $\beta > \alpha$ za koji je $U_1 = f_\beta^{-1}(U_{1\beta})$, $U_2 = f_\beta^{-1}(U_{2\beta})$. Skupovi $U_{1\beta}$ i $U_{2\beta}$ su otvoreni i disjunktni a zbog surjektivnosti projekcija je $X_\beta \setminus f_{\alpha\beta}^{-1}(x_\alpha) = U_{1\beta} \cup U_{2\beta}$. Kako je $f_{\alpha\beta}$ nealternirajuće preslikavanje, to je $U_{1\beta} = f_{\alpha\beta}^{-1} f_{\alpha\beta}(U_{1\beta})$, $U_2 = f_{\alpha\beta}^{-1} f_{\alpha\beta}(U_{2\beta})$. Iz svih relacija jednostavno slijedi da je $U_1 = f_\alpha^{-1} f_\alpha(U_1)$, $U_2 = f_\alpha^{-1} f_\alpha(U_2)$. Dokaz je gotov.

6.4. NAPOMENA. U literaturi o inverznim sistemima ne postoje teoremi koji govore o nealternirajućim projekcijama.

7. ZATVORENE, KVOCIJENTNE I NASLJEDNO KVOCIJENTNE PROJEKCIJE

Svojstva L_τ-sistema dozvoljavaju da se dokaže zatvorenost i kvocijentnost projekcija ako su takva vezna preslikavanja.

7.1. TEOREM. Neka je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, \Omega\}$ L_τ-sistem. Ako su vezna preslikavanja zatvorena, tada su i projekcije zatvorena preslikavanja.

D o k a z. Neka je F zatvoren podskup limesa. Dokažimo da je $f_\alpha(F)$ zatvoren za svaki $\alpha \in \Omega$. Prema teoremu 2.3. postoji $\beta \geq \alpha$ za koji je $F = f_\beta^{-1}(\overline{f_\beta(F)})$. To znači da je $f_\beta(F) = \overline{f_\beta(F)}$. Zbog zatvorenosti preslikavanja f je $f_\alpha(F) = f_{\alpha\beta}(f_\beta(F)) = f_{\alpha\beta}(\overline{f_\beta(F)}) = \overline{f_{\alpha\beta}(f_\beta(F))} = \overline{f_\alpha(F)}$. Dokaz je gotov.

7.2. TEOREM. Ako su vezna preslikavanja L_τ-sistema X kvocijentna preslikavanja, tada su i projekcije kvocijentna preslikavanja.

D o k a z. Neka je $F_\alpha \subset X_\alpha$ skup čiji je original $f_\alpha^{-1}(F_\alpha)$ zatvoren u limesu X. Dokažimo da je i F_α zatvoren. Prema teoremu 2.3. postoji $\beta > \alpha$ za koji je $f_\alpha^{-1}(F_\alpha) = f_\beta^{-1}(\overline{f_\beta(f_\alpha^{-1} F_\alpha)})$. Odatle slijedi da je $f_{\alpha\beta}^{-1}(F_\alpha) = \overline{f_\beta(f_\alpha^{-1}(F_\alpha))}$. Zbog kvocijentnosti preslikavanja $f_{\alpha\beta}$ je F_α zatvoren. Dokaz je gotov.

Potpuno analogno se dokazuje slijedeći teorem.

7.3. TEOREM. Ako su vezna preslikavanja L_τ-sistema X nasljedno kvocijentna, tada su i projekcije nasljedno kvocijentna preslikavanja.

8. INVERZNI SISTEMI LINDELÖFOVIH PROSTORA

8.1. NAPOMENA. Poznat je primjer inverznog niza Lindelöfovih prostora čiji limes nije Lindelöfov prostor (vidi Engelking [1], pp. 249., Problem 5.5.4.(c)). Nasuprot tome mi dokazujemo slijedeći teorem.

8.2. TEOREM. Ako je $\underline{X} = \{X_n, f_{nm}, N\}$ inverzni niz Lindelöfovih prostora X_n i zatvorenih veznih preslikavanja f_{nm}, tada je $X = \lim \underline{X}$ Lindelöfov prostor.

D o k a z. Neka je $\{F_\mu, \mu \in M\}$ prebrojivo centrirana familija zatvorenih podskupova limesa X. Bez utjecaja na općenitost možemo pretpostaviti da je ta familija zatvorena s obzirom na prebrojive presjeke. Za svaki $n \in N$ promatrajmo familiju $\{f_n(F_\mu), \mu \in M\}$. To je prebrojivo centrirana familija zatvorenih podskupova prostora X_n jer su po teoremu Zenora projekcije f_n zatvorena preslikavanja. Kako je X_n Lindelöfov prostor, to je $Y_n = {}_\mu f_n(F_\mu)$ neprazan. Pokažimo da je za m>n ispunjena relacija $f_{nm}(Y_m) = Y_n$. Za svaku točku $y_n \in Y_n$ neprazni su skupovi $Z_\mu = f_{nm}^{-1}(y_n) \cap f_m(F_\mu)$. Familija $\{Z_\mu\}$ je prebrojivo centrirana, a $f_{nm}^{-1}(y_n)$ Lindelöfov prostor. Odatle slijedi da je $Z = {}_\mu Z_\mu$ neprazan. Očito je da iz $z \in Z$ slijedi $z \in Y_m$ i $f_{nm}(z) = y_n$. Inverzni sistem $Y = \{Y_n, f_{nm}/Y_m, N\}$ ima surjektivna vezna preslikavanja te mu je limes Y neprazan. Nije teško dokazati da je $Y \subset \cap \cap \{f_\mu, \mu \in M\}$. Dokaz je gotov.

8.3. TEOREM. Ako je $X = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, \Omega\}$ neprekidni inverzivni sistem Lindelöfovih prostora X_α i zatvorenih preslikavanja $f_{\alpha\beta}$, tada je $X = \lim \underline{X}$ Lindelöfov prostor.

D o k a z. Prije svega projekcije f_α su zatvorene (Lončar [1]). Kao i u prethodnom dokazu možemo promatrati neprazan zatvoreni skup $Y_\alpha = {}_\mu f_\alpha(F_\mu)$ i dokazati da je za $\beta \geq \alpha$ $f_{\alpha\beta}(Y_\beta) = Y_\alpha$. Sistem $\underline{Y} = \{Y_\alpha, f_{\alpha\beta}/Y_\beta, \Omega\}$ je neprekidan sa surjektivnim veznim preslikavanjima. Zbog toga je neprazan $Y = \lim \underline{Y}$. Kako je $Y \subset \cap \{F_\mu, \mu \in M\}$, dokaz je gotov.

Ako su X_α Lindelöfovi P-prostori, tada sva neprekidna preslikavanja $f_{\alpha\beta}: X_\beta \longrightarrow X_\alpha$ postaju zatvorena. Iz teorema 8.3. dobivamo sada ovaj korolar.

8.3.1. KOROLAR. Limes inverznog niza ili neprekidnog inverznog sistema Lindelöfovih P-prostora je Lindelöfov prostor.

8.3.2. PROBLEM. Da li je limes niza P-prostora opet P- prostor?

Prostor koji je unija prebrojivo mnogo kompakata zovemo σ-kompakt. Regularni σ-kompakti su Lindelöfovi prostori. Dokazano je da je produkt prebrojivo mnogo reguliranih σ-kompakata Lindelöfov prostor. (vidi Engelking [1], pp. 251.). Odatle slijedi

8.4. TEOREM. Limes inverznog niza reguliranih σ-kompaktnih prostora je Lindelöfov prostor.

Za nasljedno Lindelöfove prostore možemo dokazati ovaj teorem.

8.5. TEOREM. Limes inverznog niza nasljedno Lindelöfovih prostora je nasljedno Lindelöfov prostor.

D o k a z. U skladu s napomenom 1.3. treba dokazati da za svaku familiju $F_0 \supset F_1 \supset \ldots \supset F_\mu \supset \ldots$, $\mu < \omega_1$, zatvorenih podskupova limesa X postoji $\mu_0 < \omega_1$ takav da je $F_\mu = F_{\mu_0}$ za sve $\mu \geq \mu_0$. Za svaki $n \in N$ možemo u prostoru $X \in_n X$ promatrati familiju $f_n(F_0) \supset f_n(F_1) \supset \ldots$ koji je duljine ω_1. Kako je X_n nasljedno Lindelöfov, postoji μ_n takav da je $f_n(F_{\mu_n}) = f_n(F_\mu)$ za sve $\mu \geq \mu_n$. Na taj način je za svaki $n \in N$ određen odgovarajući μ_n. Niz $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$ ima u ω_1 gornju ogradu $\mu = \sup \mu_n$. Očito je za sve $\mu' \geq \mu$ ispunjena relacija $f_n(F_{\mu'}) = f_n(F_\mu)$. To je moguće samo onda kada je $F_{\mu'} = F_\mu$, $\mu' \geq \mu$. Dokaz je gotov.

8.6. NAPOMENA. Lindelöfov prostor je nasljedno Lindelöfov onda, i samo onda, kada je savršeno normalan. (Engelking [1], pp. 249., Exercis 3.8.A.(b)). Odatle slijedi da je prethodni rezultat generalizacija teorema o prebrojivoj neprekidnosti svojstva »savršena normalnost + lindelöfovost« (Nagami [1]). Spomenimo da je savršena normalnost prebrojivo neprekidna (Cook and Fitzpatrick [1]).

8.7. TEOREM. Neka je $\underline{X}$ dobro uređeni inverzni sistem kofinalnosti $> \omega_1$. Ako su prostori sistema nasljedno Lindelöfovi, tada je i $X = \lim \underline{X}$ nasljedno Lindelöfov prostor.
D o k a z. Direktna primjena leme 2.1.

8.8. NAPOMENA. Pasinkov [1] dokazao je da je svaki Lindelöfov prostor limes inverznog sistema metričkih prostora prebrojive baze. Dokazao je također da je limes svakog inverznog sistema Lindelöfovih prostora realno kompaktan prostor.

Vaughan [1] uveo je totalno Lindelöfove prostore. To su regularni prostori u kojima svaka prebrojiva centrirana baza filtra posjeduje finiju prebrojivo centriranu bazu filtra koja je totalna (tj. svaka od nje finija baza filtra ima nepraznu adherenciju). Vaughan je dokazao da je X totalno Lindelöfov onda, i samo onda, kada za svaku prebrojivo centriranu bazu filtra $\mathcal{F} = \{F_\alpha : F_\alpha \subset X\}$ postoji finija baza filtra $\zeta = \{G_\mu : G_\mu \subset X\}$ sa svojstvom da je adherencija ad $\zeta = {}_\mu G_\mu$ neprazan kompaktan podskup. Na temelju toga je dokazao da je produkt konačno mnogo totalno Lindelöfovih prostora totalno Lindelöfov prostor, dok je produkt prebrojivo mnogo totalno Lindelöfovih prostora Lindelöfov prostor. Odatle odmah slijedi ovaj teorem.

8.9. TEOREM. Limes niza totalno Lindelöfovih prostora je Lindelöfov prostor.

8.10. NAPOMENA. Svaki Lindelöfov P-prostor (tj. prostor u kojemu je presjek prebrojivo mnogo otvorenih skupova otvoren skup) i svaki σ-kompakt je totalno Lindelöfov prostor. Prema tome, iz 8.9. slijedi korolar 8.3.1. i teorem 8.4.

8.11. PROBLEM. Neka je $\underline{X}$ inverzni niz totalno Lindelöfovih prostora i zatvorenih veznih preslikavanja. Da li je $X = \lim \underline{X}$ totalno Lindelöfov prostor?

Alster [1] promatra Lindelöfove prostore X u kojima svaki zatvoreni podskup F sadrži kompaktan podskup sa nepraznom unutrašnjošću (u odnosu na F). Za takve prostore je dokazano da je $X^{\aleph_0} x$ Y Lindelöfov za svaki nasljedno Lindelöfov prostor Y. Uzmemo li da je Y jediničan prostor, dobivamo da je za takve prostore $X^{\aleph_0}$ Lindelöfov prostor. Odatle slijedi

8.12. TEOREM. Ako je $\underline{X}=\{X_n, f_{nm}, N\}$ inverzni niz Lindelöfovih prostora X_n u kojima svaki zatvoreni $F_n \subset X_n$ sadrži kompakt $K_n \subset X_n$ sa svojstvom $\mathrm{Int}_{F_n}(K_n) \neq \emptyset$, tada je $X=\lim \underline{X}$ Lindelöfov prostor.

9. STROGO NULA-DIMENZIONALAN LIMES

9.1. Definicija. (Engelking [1], pp. 443.). Topološki prostor X je nula-dimenzionalan ako je neprazan T_1-prostor koji posjeduje bazu sastavljenu od otvoreno-zatvorenih skupova.

9.2. (Engelking [1], pp. 446., 6.2.15. Corollary.). Limes inverznog sistema nula-dimenzionalnih prostora je nula-dimenzionalan ili prazan.

9.3. Definicija. (Engelking [1], pp. 443.). Topološki prostor X je strogo nula-dimenzionalan ako je neprazan Tihonovljev prostor u kojemu svaki konačan funkcionalno otvoreni pokrivač $\{U_i\}_{i=1}^{k}$ ima konačno otvoreno profinjenje $\{V_i\}_{i=1}^{m}$ sa svojstvom $V_i \cap V_j = \emptyset$ za $i \neq j$.

9.4. Svaki nula-dimenzionalan Lindelöfov prostor je strogo nula-dimenzionalan.

9.5. (Engelking [1], pp. 467., Problem 3.3.25.). Limes inverznog niza strogo nula-dimenzionalnih prostora ne mora biti strogo nula-dimenzionalan.

Nasuprot ovome mi dokazujemo tri teorema o neprekidnosti stroge nula-dimenzionalnosti uz dodatni uvjet da su prostori sistema Lindelöfovi.

9.6. TEOREM. Neka je $\underline{X}=\{X_n, f_{nm}, N\}$ inverzni niz Lindelöfovih strogo nula-diemzionalnih prostora X_n i zatvorenih surjektivnih veznih preslikavanja f_{nm}. Inverzni limes $X=\lim \underline{X}$ je Lindelöfov strogo nula-dimenzionalan prostor.

Dokaz. Nepraznost limesa X slijedi iz surjektivnosti veznih preslikavanja. X je Lindelöfov prema teoremu 8.2., a prema 9.2. je nula-dimenzionalan. Da je X strogo nula-dimenzionalan slijedi iz 9.4. Dokaz je gotov.

9.7. TEOREM. Neka je $\underline{X}=\{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, \Omega\}$ neprekidan inverzni sistem Lindelöfovih strogo nula-dimenzionalnih prostora X_α i zatvorenih veznih preslikavanja $f_{\alpha\beta}$. Ako je $X=\lim\underline{X}$ neprazan, tada je strogo nula-dimenzionalan Lindelöfov prostor.

Dokaz. Slijedi iz 8.3. slično kao što prethodni teorem slijedi iz 8.2.

Dokažimo na kraju teorem za nasljedno Lindelöfove prostore.

9.8. TEOREM. Neka je $\underline{X}=\{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, \Omega\}$ dobro uređeni sistem nasljedno Lindelöfovih strogo nula-dimenzionalnih prostora. Ako je $\mathrm{cf}(\Omega) \neq \aleph_1$, tada je $X=\lim\underline{X}$ prazan ili nasljedno Lindelöv strogo nula-dimenzionalan prostor.

Dokaz. Iz 8.5. i 8.7. slijedi da je X nasljedno Lindelöfov prostor. Ako je neprazan, tada je prema 9.2. nula-dimenzionalan. Iz 9.4. sada slijedi da je strogo nula-dimenzionalan. Dokaz je gotov.

ZAKLJUČAK

U radu je pokazano da inverzni sistemi nasljedno Lindelöfovih prostora imaju karakteristična svojstva. Jedno od tih svojstava je da je svaki zatvoreni skup limesa takvog sistema original nekog zatvorenog podskupa iz prostora sistema. Ovo svojstvo omogućava dokaz neprekidnosti normalnosti, savršene normalnosti i kolektivne normalnosti te dokaz da su projekcije zatvorene (kvocijentne, nasljedno kvocijentne) ako su takva vezna preslikavanja.

Dokazano je također da je limes inverznog niza Lindelöfov prostor ako su prostori niza Lindelöfovi a vezna preslikavanja zatvorena.

LITERATURA

[1] Alster K. *A class of spaces whose Cartesian product with every hereditaryly Lindelöf space is Lindelöf,* Fund. Math. 114(1981), 173—181.

[1] Cook K. and B. Fitzpatrcik, Jr. *Inverse limits of perfecty normal spaces,* Amer. Math. Soc. 19(1968), 189—192.

[1] Engelking R. *General Topology,* PWN, Warszawa, 1977.

[1] Lončar I. *Inverzni limesi prebrojivo kompaktnih prostora,* Zbornik radova Fakulteta organizacije i informatike Varaždin, 4(1980), 223—243.

[1] Nagami K. *Countable paracompactness of inverse limits and products,* Fund. Math. 73(1972), 261—270.

[1] Pasinkov V.A. *O spektral'noj razložimosti topologičeskih prostranstv,* Mat. Sbor. 66(108)(1965), 35—78.

[1] Tkačenko M.G. *Some results on inverse spektra I.,* Comment. Math. Univ. carol., 22(1981), 621—633.

[1] Vaughan J.E. *Products of topological spaces,* General Topology and Appl. 8(1978), 207—217.

[1] Whyburn G.T. *Analytic Topology,* Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 28(1942), 1971.

Primljeno: 1982-11-11

Lončar I. Lindelöf number and inverse systems

SUMMARY

This paper contains some results on iverse systems and limits of the Lindelöf and hereditarily Lindelöf spaces. Among others it is proved that the limit of an inverse sequence is Lindelöf if the spaces of the sequence are Lindelöf spaces and the bonding mappings are closed.

(Prijevod: Ivan Lončar)