Dr Ivan Lončar, docent
Fakultet organizacije i informatike
V a r a ž d i n

UDK 51*
Znanstveni rad

N E P R E K I D N O S T S A V R Š E N E κ - N O R M A L N O S T I

Topološki prostor X je κ-normalan (Ščepin |2|) ako svaka dva disjunktna regularno zatvorena podskupa u njemu imaju disjunktne okoline. Ako je k tome svaki regularno zatvoreni podskup prostora X nul-skup, kažemo da je X savršeno κ-normalan. Ščepin |2| dokazano je da je produkt metričkih prostora savršeno κ-normalan.

U radu dokazujemo savršenu κ-normalnost limesa inverznog niza savršeno κ-normalnih prostora uz zatvorena ireducibilna preslikavanja. Dokazuje se (savršena) κ-normalnost limesa dobro uredjenog sistema $X = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, \omega_\tau\}$, $d(X_\alpha) < \aleph_\tau$, *uz zatvorene ireducibilne projekcije* $f_\alpha : X \to X_\alpha$. *Dobiveni teoremi primjenjuju se na inverzne sisteme separabilnih prostora.*

U Dodatku data je primjena na povezanost limesa.

1. UVOD

Jedna od značajnih generalizacija pojma normalnosti topološkog prostora je κ-normalnost i savršena κ-normalnost koju je uveo Ščepin |1|. Njezina važnost proizlazi iz činjenice da je produkt separabilnih metričkih prostora savršeno κ-normalan (Ščepin |1|), dok je poznato da produkt $R^{\aleph_1}$ nije normalan. Mi želimo ovaj rezultat Ščepina prenijeti na inverzne sisteme. Zbog toga u ovoj uvodnoj točki dajemo definicije potrebne u ostalim točkama rada.

1.1. Inverzne sisteme označavat ćemo s $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$.

Ako je A dobro uredjen skup, zvat ćemo sistem $\underline{X}$ dobro uredjenim. Ako je A skup svih ordinala $<\omega_\tau$, cf $(\omega_\tau) = \omega_\tau$ i za svaki

---

* *AMS (MOS) subject classification (1980), Primary 54 C05, Secondary 54 D 15*

limitni ordinal $\alpha\in A$ je X_α homeomorfan limesu sistema $\{X_\beta, f_{\beta\gamma}, A^*\}$, $A^* = \{\beta : \beta\in A, \beta<\alpha\}$, kažemo da je $\underline{X}$ neprekidan inverzni sistem.

1.2. Za topološko svojstvo P kažemo da je neprekidno ako lim $\underline{X}$ posjeduje svojstvo čim ga posjeduju prostori $X_\alpha \in \underline{X}$. Analogno se definira prebrojiva neprekidnost, odnosno uvjetna neprekidnost nekog topološkog svojstva.

1.3. S N odnosno W_o označavat ćemo skup svih konačnih odnosno prebrojivih ordinala.

1.4. Gustoća d(X) topološkog prostora X je najmanji kardinalan broj za koji postoji podskup $A\subset X$ koji je svuda gust u X i potencije $|A| = d(X)$.

1.5. Ako je U otvoren u X, tada je $d(U)<d(X)$.

1.6. Nadalje, ako je $\{U_\mu\}$, $\mu\in M$, $|M|>d(X)$, $|M|$ regularan kardinal, padajuća familija otvorenih nepraznih skupova sa svojstvom $\bigcap_\mu U_\mu = \emptyset$, tada postoji $\mu_o \in M$ takav da je $U\mu = U_{\mu_o}$ za sve $\mu>\mu_o$.

1.7. Nasljednu gustoću hd(X) definiramo kao sup d(M), M potprostor od X.

1.8. (Smirnov; Sierpinski; cit. u Engelking |1|, pp. 155., problem 2.7.9. (e)). Topološki prostor X zadovoljava $hd(X)<\aleph_\alpha$, onda i samo onda ako za svaki rastući niz $F_o\subset F_1\subset F_2\subset\ldots$ $\ldots\subset F_\xi\subset\ldots$, $\xi<\omega_\alpha$, zatvorenih skupova $F_\xi\subseteq X$ postoji $\xi_o<\omega_\alpha$ takav da je $F_\xi = F_{\xi_o}$ za sve $\xi>\xi_o$.

1.9. (Tkačenko |1|). Neka je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, \Omega\}$ dobro uredjeni inverzni sistem. Ako je $hd(X_\alpha)<\lambda$ za sve $\alpha\in\Omega$, tada $hd(\lim\limits_{\leftarrow} \underline{X})\leqslant\lambda$.

1.10. Preslikavanje $f: X\to Y$ je ireducibilno ako ne postoji zatvoren $F\subset X$ sa svojstvom $f(F) = Y$ ili, ekvivalentno, ako je za svaki neprazan otvoren U X neprazna mala slika $f^{\#}(U) = \{y : y\in Y, f^{-1}(y)\subseteq U\}$.

1.11. Ako je $f : X \to Y$ zatvoreno ireducibilno, tada je za svaki neprazan otvoren $U \subset Y$ otvorena i neprazna mala slika $f^{\#}(U)$. K tome je $f(\overline{U}) = \overline{f^{\#}(U)}$, te je slika regularno zatvorenog skupa regularno zatvoren skup. (Vidi: Arhangelskij i Ponomarev |1|, pp. 356., upražnenie 108).

1.12. Podskup A prostora X je regularno zatvoren (otvoren) ako je $A = \overline{\mathrm{Int}\,A}$ ($A = \mathrm{Int}\,\overline{A}$).

2. SAVRŠENA κ-NORMALNOST LIMESA

2.1. Definicija (Ščepin |2|). Topološki prostor X je κ-normalan ako svaka dva disjunktna regularno zatvorena podskupa iz X imaju disjunktne okoline u X.

2.2. Teorem. (Lončar |1|). Neka je $\underline{X} = \{X_n, f_{nm}, N\}$ inverzni niz κ-normalnih prebrojivo kompaktnih prostora X_n i zatvorenih ireducibilnih veznih preslikavanja f_{nm}. Inverzni limes $X = \varprojlim \underline{X}$ je κ-normalan.

2.3. (Ščepin |2|). Za topološki prostor X ekvivalentni su slijedeći uvjeti:

a) X je κ-normalan i svaki regularno zatvoreni podskup iz X je presjek prebrojivo mnogo regularno otvorenih skupova.

b) Svaki regularno zatvoreni skup A prostora X je nul-skup, tj. postoji neprekidna realna funkcija $f: X \to R$ sa svojstvom $A = f^{-1}(0)$.

c) Za svaka dva disjunktna otvorena skupa, $U, V \subseteq X$ postoji neprekidna realna funkcija $f : X \to R$ koja je na U negativna, a za V pozitivna.

2.4. Definicija. (Ščepin |2|). Topološki prostor X je savršeno κ-normalan ako zadovoljava bilo koji od uvjeta a), b) i c).

2.5. (Ščepin |2|). Produkt metričkih prostora je savršeno -normalan.

Napomenimo da produkt $N^{\aleph_1}$ nije normalan (Engelking |1|, pp. 160, Problem 2.7.16. (a)).

Dokažimo sada slijedeći teorem o prebrojivoj neprekidnosti savršene κ-normalnosti.

2.6. Teorem. Ako je $\underline{X} = \{X_n, f_{nm}, N\}$ inverzni niz savršeno κ-normalnih prostora X_n i zatvorenih ireducibilnih preslikavanja f_{nm}, tada je $X = \varprojlim \underline{X}$ savršeno κ-normalan.

Dokaz: Prije svega projekcije $f_n : X \to X_n$ su zatvorene (Zenor |1|). Da su ireducibilne, nije teško dokazati. Iz 1.11. slijedi da su $f_n(U)$ regularno zatvoreni za svaki regularno zatvoreni U X i svaki $n \in N$. Jasno da je $U = \bigcap_{n \in N} f_n^{-1} f_n(U)$. Kako je X_n savršeno κ-normalan, to postoji $g_n : X_n \to I$ sa svojstvom $g_n^{-1}(0) = f_n(U)$.

Funkcija $g(x) = \sum_{n \in N} \frac{g_n(x_n)}{2^n}$, $x = (x_n) \in X$, je neprekidna funkcija $g : X \to I$. Nije teško provjeriti da je $g^{-1}(0) = U$ i dokaz savršene κ-normalnosti je - zbog 2.3. b) - gotov.

Napomenimo da je ovaj teorem analogan teoremu o prebrojivoj neprekidnosti savršene normalnosti (Cook and Fitzpatrick |1|).

2.7. Teorem. Neka je $X = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, \Omega\}$ dobro uredjeni inverzni sistem prostora X_α sa $d(X) \leq \aleph_\tau$ i zatvorenih ireducibilnih preslikavanja $f_{\alpha\beta}$ i surjektivnih projekcija $f_\alpha : X \to X_\alpha$, tada je $d(X) \leq \aleph_\tau$.

Dokaz. Neka je Y_1 gust u X_1. U svakom originalu $f_1^{-1}(y_1), y_1 \in Y_1$ odaberimo $x_1 \in X$ i skup tako odabranih $x_1 \in X$ označujemo s Y. Tvrdimo da je Y gust u X. Naime, za svaku baznu okolinu $f_\alpha^{-1}(V_\alpha)$ postoji - zbog zatvorenosti i ireducibilnosti preslikavanja $f_{1\alpha}$ - neprazna i otvorena mala slika $f_{1\alpha}^{\#}(V_\alpha)$. Očito je $f_1^{-1}(f_{1\alpha}^{\#}(V_\alpha)) \subseteq f_\alpha^{-1}(V_\alpha)$.

Skup na lijevoj strani sadrži u sebi original $f_1^{-1}(y_1)$ za neki $y_1 \in Y_1 \cap f^{\#}_{1\alpha}(V_\alpha)$. Dokaz je gotov.

2.8. Korolar. Ako je $\underline{X}$ inverzni sistem separabilnih prostora, zatvorenih ireducibilnih veznih preslikavanja i surjektivnih projekcija, tada je $X = \lim\limits_{\leftarrow} \underline{X}$ separabilan.

2.9. LEMA. Neka je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, \omega_\tau\}$ regularan dobro uređen inverzni sistem prostora X_α sa svojstvom $d(X_\alpha) < \aleph_\tau$. Neka su $f_{\alpha\beta}$ zatvorene ireducibilne surjekcije a projekcije $f_\alpha : X \to X_\alpha$ surjekcije, tada za svaki otvoreni skup $U \subseteq X$ postoji $\alpha \in \Omega_\tau$ sa svojstvom $U \subseteq f_\alpha^{-1}(\mathrm{Int}\ \overline{f(U)}) \subseteq U$ za sve $\alpha \geq \alpha_0$. Ako je U regularno otvoren, tj. $U = \mathrm{Int}\ U$, tada je $\mathrm{Int}\ U = f_\alpha^{-1}(\mathrm{Int}\ \overline{f_\alpha(U)})$.

Dokaz. Kako za svako $x \in U$ postoji bazna okolina $f_\alpha^{-1}(V_\alpha)$, to je $U \cap f_\alpha^{-1}(\mathrm{Int}\ \overline{f_\alpha(\ )}) \neq 0$ za svaki $\alpha < \omega_\tau$. Kako je familija $\{f_\alpha^{-1}(\mathrm{Int}\ \overline{f_\alpha(U)}), \alpha < \omega_\tau\}$ padajuća, mora postojati $\alpha < \omega_\tau$ za koji je $U \subseteq f_\alpha^{-1}(\mathrm{Int}\ \overline{f_\alpha(U)})$. Drugu polovinu relacije dokazujemo na slijedeći način:

Kako je $U = \lim \{f_\alpha(U)\}$, to je $U = \bigcap_\alpha f_\alpha^{-1}\ \overline{f_\alpha(U)}$.

Dakle je

$$\bigcap_\alpha f_\alpha^{-1}(\mathrm{Int}\ \overline{f_\alpha(U)}) \subseteq U \ldots\ldots \quad (1)$$

Svi skupovi $f_\alpha^{-1}(\mathrm{Int}\ \overline{f_\alpha(U)})$ ne mogu sjeći $W = X \setminus U$ jer bi tada imali familiju $W_\alpha = W \cap f_\alpha^{-1}(\mathrm{Int}\ \overline{f_\alpha(U)})$ s praznim presjekom radi (1). Iz 1.6. slijedi da postoji $\alpha_0 < \omega_\tau$ sa svojstvom $W_{\alpha_0} = W_\alpha$, $\alpha > \alpha_0$. Odatle pak slijedi $\bigcap_\alpha W_\alpha = W_{\alpha_0}$ što je nemoguće radi $\bigcap_\alpha W_\alpha = \emptyset$. Mora, dakle, postojati α_0 za koji je $f_{\alpha_0}^{-1}(\mathrm{Int}\ \overline{f_{\alpha_0}(U)}) \subseteq U$. Radi usmjerenosti skupa može se uzeti da su odabrani α za lijevu i desnu polovinu relacije jednaki. Dokaz je gotov.

2.10. Teorem. Pod pretpostavkama leme 2.9. je $X = \lim \underline{X}$ κ-normalan ako su svi X_α κ-normalni.

Dokaz. Neka su A i B dva regularno zatvorena skupa u limesu X. Skupovi $X \setminus A$ i $X \setminus B$ su regularno otvoreni, pa je zbog 2.9.

$$X \setminus A = f_\alpha^{-1}(\mathrm{Int}\ \overline{f_\alpha(X \setminus A)})$$

Dakle je $$A = f_\alpha^{-1}(X_\alpha \setminus \mathrm{Int}\ \overline{f_\alpha(X \setminus A)}) \qquad (2)$$

Slično je $$B = f_\alpha^{-1}(X_\alpha \setminus \mathrm{Int}\ \overline{f_\alpha(X \setminus B)}).$$

Skupovi
$$A_\alpha = X_\alpha \setminus \mathrm{Int}\ \overline{f_\alpha(X \setminus A)}$$
$$B_\alpha = X_\alpha \setminus \mathrm{Int}\ \overline{f_\alpha(X \setminus A)}$$
su regularno zatvoreni i disjunktni zbog (2).

Kako je X_α κ-normalan, postoje otvoreni skupovi $U_\alpha \supset A_\alpha$, $V_\alpha \supset B_\alpha$ sa svojstvom $U_\alpha \cap V_\alpha = \emptyset$. Očito je $f_\alpha^{-1}(U_\alpha) \cap f_\alpha^{-1}(V_\alpha) = \emptyset$ i $f_\alpha^{-1}(U_\alpha) \supseteq A$, $f_\alpha^{-1}(V_\alpha) \supseteq B$. Dokaz je gotov.

2.11. Teorem. Ako su, uz pretpostavke leme 2.9, svi X_α savršeno κ-normalni, tada je $X = \lim \underline{X}$ savršeno κ-normalan.

Dokaz. Dokažimo da X zadovoljava uvjet c) uz 2.3. Neka su U i V disjunktni otvoreni skupovi iz X. Disjunktni su i otvoreni $\mathrm{Int}\ \bar{U}$, $\mathrm{Int}\ \bar{V}$. Prema lemi 2.9. postoji $\alpha < \omega_\tau$ sa svojstvom

$$\mathrm{Int}\ \bar{U} = f_\alpha^{-1}(\mathrm{Int}\ \overline{f_\alpha(U)})$$
$$\mathrm{Int}\ \bar{V} = f_\alpha^{-1}(\mathrm{Int}\ \overline{f_\alpha(V)}).$$

Kako je X savršeno κ-normalan, postoji prema c) iz 2.3. neprekidna realna funkcija $f : X \to R$ koja je na $\mathrm{Int}\ \overline{f_\alpha(U)}$ pozitivna, a na $\mathrm{Int}\ \overline{f_\alpha(V)}$ negativna. Funkcija $ff_\alpha : X \to R$ je pozitivna na U a negativna na V. Dokaz je gotov.

Za separabilne prostore iz teorema 2.10. slijedi

2.12. Teorem. Neka je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, \omega_\tau\}$ neprebrojiv regularan inverzni sistem separabilnih prostora X_α i zatvorenih ireducibilnih veznih preslikavanja $f_{\alpha\beta}$ te surjektivnih projekcija $f_\alpha : X \to X_\alpha$. Ako su svi X_α κ-normalni, tada je i $X = \lim \underline{X}$ κ-normalan.

Analogno iz teorema 2.11. slijedi

2.13. Teorem. Ako su uz pretpostavke teorema 2.12. prostori X_α savršeno κ-normalni, tada je i $X = \lim \underline{X}$ savršeno κ-normalan.

Kako je u dokazu važne leme 2.9. osnovnu ulogu igrala činjenica da je $d(\lim \underline{X}) < \aleph_\tau$, to nam rezultat Tkačenko iz 1.9. omogućava da iskažemo teorem koji ne sadrži pretpostavke o veznim preslikavanjima.

2.14. Teorem. Neka je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, \omega_\tau\}$ regularan dobro uredjen inverzni sistem prostora X_α sa svojstvom $hd(X_\alpha) < \aleph_\tau$ i surjektivnim projekcijama $f_\alpha : X \to X_\alpha$. Ako su svi X_α κ-normalni (savršeno κ-normalni), tada je $X = \lim \underline{X}$ κ-normalan (savršeno κ-normalan).

Specijalno za nasljedno separabilne prostore imamo:

2.15. Teorem. Neka je $\underline{X}$ neprebrojiv regularan inverzni sistem nasljedno separabilnih prostora X_α i surjektivnih projekcija $f_\alpha : X = \lim \underline{X} \to X_\alpha$.

Ako su svi X_α κ-normalni (savršeno κ-normalni), tada je X κ-normalan (savršeno κ-normalan).

Prostori N i R su nasljedno separabilni i savršeno κ-normalni pa su limesi sistema $\{N, f_{\alpha\beta}, \omega_\tau\}$, $\{R, f_{\alpha\beta}, \omega_\tau\}, \omega_\tau$ neprebrojivi, regularni, savršeno κ-normalni a nisu normalni (vidi napomenu u 2.5.).

3. DODATAK

Relacija iz leme 2.9. omogućava dokaz slijedećeg teorema o uvjetnoj neprekidnosti povezanosti.

3.1. Teorem. Neka je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, \omega_\tau\}$ regularan dobro uredjen inverzni sistem sa svojstvima: $d(X_\alpha) < \aleph_\tau$, $f_{\alpha\beta}$ zatvorena i ireducibilna, projekcije $f_\alpha : X \to X_\alpha$ surjektivna preslikavanja. Tada je povezanost svih X_α nuždan i dovoljan uvjet povezanosti limesa $X = \lim \underline{X}$.

Dokaz. Kad X ne bi bio povezan, bio bi unija dva disjunktna neprazna otvoreno-zatvorena skupa U i V. Jasno je sada $U = \mathrm{Int}\, \overline{U}$, $V = \mathrm{Int}\, \overline{V}$. Prema lemi 2.9. i zbog usmjerenosti skupa ω_τ postoji $\alpha < \omega_\tau$ za koji je $U = f_\alpha^{-1}(\mathrm{Int}\, \overline{f_\alpha(U)})$ $V = f_\alpha^{-1}(\mathrm{Int}\, \overline{f_\alpha(V)})$. Skupovi $\mathrm{Int}\, \overline{f_\alpha(U)}$, $\mathrm{Int}\, \overline{f_\alpha(V)}$ su neprazni, disjunktni i otvoreni. Kako zbog surjektivnosti projekcije f_α mora biti $X_\alpha = \mathrm{Int}\, \overline{f_\alpha(U)} \cup \mathrm{Int}\, \overline{f_\alpha(V)}$, dobili smo kontradikciju s povezanošću prostora X_α. Dokaz je gotov.

Analogno dokazujemo

3.2. Teorem. Neka je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, \omega_\tau\}$ regularan dobro uredjen inverzni sistem prostora X_α sa svojstvom $hd(X_\alpha) < \aleph_\tau$ i surjektivnih projekcija $f_\alpha : X \to X_\alpha$. Povezanost svih prostora X_α je nuždan i dovoljan uvjet povezanosti limesa $X = \lim \underline{X}$.

Iz 3.1. za separabilne prostore slijedi

3.3. Korolar. Neka je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, \omega_\tau\}$ neprebrojiv regularan inverzni sistem prostora X_α, zatvorenih ireducibilnih veznih preslikavanja $f_{\alpha\beta}$ i surjektivnih projekcija $f_\alpha : X = \lim \underline{X} \to X_\alpha$. Povezanost svih X_α je nuždan i dovoljan uvjet povezanosti limesa X.

Specijalno ako je $X_\alpha = R$, tada zatvorena ireducibilna preslikavanja postaju savršena pa surjektivnost projekcija slijedi iz surjektivnosti $f_{\alpha\beta}$. Dakle

3.4. Korolar. Limes sistema $\{R, f_{\alpha\beta}, \omega_\tau\}$, ω_τ neprebrojiv regularan, $f_{\alpha\beta}$ zatvorena ireducibilna, je povezan.

Za nasljedno separabilne prostore iz 3.2. dobivamo

3.5. Teorem. Neka je $\underline{X}$ neprebrojiv regularan inverzni sistem nasljedno separabilnih prostora X_α i surjektivnih projekcija $f_\alpha : X \to X_\alpha$. Povezanost svih X_α je nuždan i dovoljan uvjet povezanosti limesa $X = \lim \underline{X}$.

Specijalno je, dakle, limes sistema $\{R, f_{\alpha\beta}, \omega_\tau\}$ povezan ako je ω_τ neprebrojiv regularan ordinal i $f_\alpha : X \to X_\alpha$ surjekcije.

L I T E R A T U R A

Arhangelskij A.V., Ponomarev V.I.

|1| Osnovy obščej topologii v zadačah i upražnenijah, Moskva, 1974.

Cook H. and Fitzpatrick P., Jr.

|1| Inverse limits of perfectly normal spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 19. (1968), 189-192.

Chigogidze A.

|1| On a generalization of perfectly normal spaces, Topology and its Applications, 13 (1982), 15-20.

Engelking R.

|1| General Topology, PWN, Warszawa, 1977.

Lončar I.

|1| Inverse limits, for spaces which generalize compact spaces (izaći će u: Glasnik matematički).

Ščepin, E.V.
|1| *Topologija predelnyh prostranstv nesčetnyh obratnyh spektrov, UMN, 1976, 31, vgp. 5 (191), 191-226.*

|2| *O topologičeskyh proizvedenijah, gruppah i novom klasse prostranstv bolle obščyh čem metričeskie, DAN SSSR, 1976, tom 226, no 3, 527-529.*

Zenor, P.
|1| *On countable paracompactnes and normality, Prace Mat. 13 (1969), 23-32.*

Tkačenko M.G.
|1| *Cepi i kardinaly, DAN SSSR, 239, 3 (1978), 546-549.*

Primljeno: 1982-03-08

Lončar I. The Continuity of Perfect κ-Normality

S U M M A R Y

In the present paper perfect κ-normality for the limit of the inverse sequence of perfectly κ-normal spaces with irreducible closed mappings is proved.

κ-normality and perfect κ-normality for the limit of the system $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, \omega_\tau\}$, $d(X_\alpha) < \aleph_\tau$, *where* $f_{\alpha\beta}$ *are irreducible closed mappings, are also proved.*