Mr Božidar Balog, viši predavač
Fakultet organizacije i informatike
V a r a ž d i n

UDK 51
Znanstveni rad

W-KONGRUENCIJE PRAVACA U SVJETLU MOUTARDOVIH TRANSFORMACIJA

U teoriji kongruencija pravaca (kontinuirani dvoparametarski skup pravaca) veliku važnost imaju W-kongruencije pravaca (kongruencije Weingartena). One se definiraju kao kongruencije pravaca kod kojih je umnožak Gaussovih zakrivljenosti obiju žarišnih ploha jednak recipročnoj vrijednosti četvrte potencije udaljenosti graničnih točaka, tj.

$$K_1 \cdot K_2 = \frac{1}{d^4}$$

U radu autor se koristio svojstvom W-kongruencija pravaca da asimptotske linije žarišnih ploha odgovaraju (korespondiraju) jedne drugima. Obradjene su Moutardove diferencijalne jednadžbe i transformacije tih jednadžbi kako bismo ih poslije u teoremu koristili za konstrukciju W-kongruencije. Detaljno je dokazan taj teorem kao i njegov obrat.

1. TRANSFORMACIJA MOUTARDOVIH JEDNADŽBI

Moutardove diferencijalne jednadžbe kao i transformacije Moutardovih jednadžbi pomoći će nam pri odredjivanju W-kongruencije pravaca. Radi toga ćemo najprije obraditi svojstva tih jednadžbi i pokazati kako se jedna Moutardova jednadžba može, pomoću zgodno odabrane funkcije, transformirati u jednu drugu diferencijalnu jednadžbu.

U našem daljnjem razmatranju poći ćemo od definicije Moutardovih jednadžbi.

Definicija 1. Zadana je neka funkcija f dviju varijabli u,v:

$$f = f(u,v) \tag{1}$$

Tada se diferencijalna jednadžba oblika:

$$f_{uv} = Qf \tag{2}$$

zove Moutardova jednadžba. Pri tome Q je integracijska konstanta.

Mi ćemo sada pomoću jednog rješenja gornje jednadžbe transformirati tu jednadžbu u jednu drugu Moutardovu jednadžbu.

Neka je funkcija g

$$g = g\ (u,v)$$

jedno rješenje gornje jednadžbe (2), tada će biti:

$$g_{uv} = Qg \tag{3}$$

Iz (2) i (3) dobijemo vrijednosti integracijske konstante:

$$Q = \frac{1}{f}\, f_{uv}$$

$$Q = \frac{1}{g}\, g_{uv}$$

Izjednačenjem ovih izraza dobijemo:

$$\frac{1}{g}\, g_{uv} = \frac{1}{f}\, f_{uv}$$

$$\frac{1}{g}\, g_{uv} - \frac{1}{f}\, f_{uv} = 0 \ /\ .2fg$$

$$2fg_{uv} - 2gf_{uv} = 0$$

Na povoljnim mjestima ovoj ćemo jednadžbi dodati i oduzeti izraze $f_v g_u$; $f_u g_v$:

$$f_v g_u + fg_{uv} - g_v f_u - gf_{uv} + f_u g_v + fg_{uv} - g_u f_v - gf_{uv} = 0$$

Uzmemo li u obzir pravilo za deriviranje umnoška, moći ćemo pisati:

$$\frac{\partial}{\partial v}(fg_u) - \frac{\partial}{\partial v}(gf_u) + \frac{\partial}{\partial u}(fg_v) - \frac{\partial}{\partial u}(gf_v) = 0$$

To se nadalje može pisati u obliku:

$$\frac{\partial}{\partial v}(fg_u - gf_u) + \frac{\partial}{\partial u}(fg_v - gf_v) = 0$$

Ako okrugle zagrade pišemo u obliku determinanti, imat ćemo:

$$\frac{\partial}{\partial v}\begin{vmatrix} f & g \\ f_u & g_u \end{vmatrix} + \frac{\partial}{\partial u}\begin{vmatrix} f & g \\ f_v & g_v \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

Uvjet (4) smo dobili uz pretpostavku da je funkcija $g = g(u,v)$ jednorješenje Moutardove jednadžbe (2).

Sada ćemo uvesti novu funkciju

$$h = h\,(u,v)$$

i to tako da za tu funkciju budu ispunjeni uvjeti:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}(gh) &= \begin{vmatrix} f & g \\ f_u & g_u \end{vmatrix} \\ \frac{\partial}{\partial v}(gh) &= -\begin{vmatrix} f & g \\ f_v & g_v \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{5}$$

Sada trebamo dokazati da tako definirana funkcija $h=h(u,v)$ formira jednu novu Moutardovu jednadžbu, ali tako da u toj jednadžbi budu uvedena funkcija $g = g(u,v)$ kao rješenje jednadžbe

$$f_{uv} = Qf$$

Odredimo sada derivaciju:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f_u g - f g_u}{g^2} = \frac{1}{g^2}\begin{vmatrix} g & f \\ g_u & f_u \end{vmatrix}$$

Ovo dalje možemo pisati:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{f}{g}\right) = -\frac{1}{g^2}\begin{vmatrix} f & g \\ f_u & g_u \end{vmatrix}$$

Ako uzmemo u obzir uvjete (5), dobijemo:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{f}{g}\right) = -\frac{1}{g^2}\cdot\frac{\partial}{\partial u}(gh).$$

Prema tome, za funkciju h dobili smo još dvije jednadžbe:

$$\frac{1}{g^2}\cdot\frac{\partial}{\partial u}(gh) = -\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{f}{g}\right)$$

$$\frac{1}{g^2}\cdot\frac{\partial}{\partial v}(gh) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{f}{g}\right) \tag{6}$$

Budući da su mješovite derivacije jednake

$$\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{f}{g}\right)\right\} = \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{f}{g}\right)\right\},$$

to će, prema tome, biti:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{1}{g^2}\cdot\frac{\partial}{\partial u}(gh)\right\} = -\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{1}{g^2}\cdot\frac{\partial}{\partial v}(gh)\right\}$$

Izvršimo deriviranje:

$$-\frac{2}{g^3}g_v\cdot\frac{\partial}{\partial u}(gh)+\frac{1}{g^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}(gh) - \frac{2}{g^3}g_u\frac{\partial}{\partial v}(gh)+\frac{1}{g^2}\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}(gh) = 0$$

$$-\frac{2}{g^3}\left\{g_u\frac{\partial}{\partial v}(gh)+g_v\frac{\partial}{\partial u}(gh)\right\}+\frac{2}{g^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}(gh) = 0$$

$$-g_u(g_vh+gh_v)-g_v(g_uh+gh_u)+g\frac{\partial}{\partial v}(g_uh+gh_u) = 0$$

$$-g_ug_vh-g_ugh_v-g_ug_vh-gg_vh_u+g(g_{uv}h+g_uh_v+g_vh_u+gh_{uv}) = 0$$

$$-g_ug_vh-gg_uh_v-g_ug_vh-gg_vh_u+gg_{uv}h+gg_uh_v+gg_vh_u+g^2h_{uv} = 0$$

$$-2g_ug_vh + g^2h_{uv} + gg_{uv}h = 0$$

$$g^2h_{uv} = 2g_ug_vh - gg_{uv}h$$

$$g^2h_{uv} = h\,(2g_ug_v - g_{uv}g) \tag{7}$$

Odredimo sada drugu mješovitu derivaciju od $\frac{1}{g}$:

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\left(\frac{1}{g}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(-\frac{1}{g^2} \cdot g_u\right) = \frac{2}{g^3} g_u g_v - \frac{1}{g^2} g_{uv}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\left(\frac{1}{g}\right) = \frac{1}{g^3}(2g_u g_v - g_{uv} g)$$

Odatle dobijemo:

$$2g_u g_v - g_{uv} g = g^3 \cdot \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\left(\frac{1}{g}\right)$$

Ako to uvrstimo u gornji izraz, tada imamo:

$$g^2 h_{uv} = h \cdot g^3 \cdot \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\left(\frac{1}{g}\right) \quad /: g^2$$

$$h_{uv} = g \cdot \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\left(\frac{1}{g}\right) \cdot h \tag{8}$$

Sada uvedemo novu funkciju Q_1 od rješenja g Moutardove jednadžbe (2):

$$Q_1 = g \cdot \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\left(\frac{1}{g}\right) \tag{9}$$

U tom slučaju (8) možemo pisati u obliku:

$$h_{uv} = Q_1 h \tag{10}$$

a to je jedna Moutardova jednadžba.

Odavde možemo izvući zaključak koji ćemo pisati u obliku jednog teorema.

Teorem 1. Zadana je neka funkcija

$$f = f(u,v) \tag{1}$$

za koju imamo Moutardovu diferencijalnu jednadžbu:

$$f_{uv} = Qf \tag{2}$$

Neka je funkcija

$$g = g\ (u,v)$$

jedno rješenje te jednadžbe. Tada se gornja Moutardova jednadžba (2) može transformirati u Moutardovu jednadžbu

$$h_{uv} = Q_1 h \tag{10}$$

gdje funkcija

$$h = h(u,v)$$

zadovoljava izraze

$$\frac{\partial}{\partial u}(gh) = \begin{vmatrix} f & g \\ f_u & g_u \end{vmatrix} \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(gh) = -\begin{vmatrix} f & g \\ f_v & g_v \end{vmatrix}$$

dok je

$$Q_1 = g\,\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{1}{g}\right) \tag{9}$$

funkcija rješenja g Moutardove jednadžbe (2).

2. MOUTARDOVA JEDNADŽBA ZA VEKTOR KOJI IMA SMJER NORMALNE PLOHE (M)

Najprije ćemo uvesti neke oznake pomoću kojih ćemo se služiti u obradi ovog paragrafa:

$\vec{O}M$ - radijvektor točke M na plohi (M)

u,v - asimptotske linije plohe (M)

$\vec{O}M_u$ - smjer tangencijalnog vektora na u - liniju plohe (M)

$\vec{O}M_v$ - smjer tangencijalnog vektora na v - liniju plohe (M)

$\vec{n}$ - jedinični vektor normalne plohe (M)

$\vec{n}_u$ - smjer tangente sferne slike asimptotske u - linije

$\vec{n}_v$ - smjer tangente sferne slike asimptotske v - linije

Mi ćemo promatrati takvu plohu (M) kod koje su u-linije i v-linije asimptotske linije te plohe. Asimptotske linije neke plohe su takve krivulje na toj plohi kod kojih je u svakoj točki normalna zakrivljenost jednaka nuli. To znači da se kod asimptotskeih linija tangencijalna ravnina plohe poklapa s rektifikacijskom ravninom asimptotske linije.

Ako želimo da kroz svaku točku plohe (M) prolaze dvije asimptotske linije, mora Gaussova zakrivljenost u svakoj točki biti negativna. To znači da je svaka točka takve plohe hiperbolička. Osim toga, kod takve plohe tangente asimptotskih linija okomite su na tangente sfernih slika tih asimptotskih linija. Prema tome, radi ortogonalnosti, bit će:

$$\vec{OM}_u \cdot \vec{n}_u = 0 \qquad \vec{OM}_v \cdot \vec{n}_v = 0 \tag{11}$$

Jedinični vektor normale plohe $\vec{n}$ okomit je takodjer na vektore $\vec{OM}_u$, $\vec{OM}_v$ jer oni leže u tangencijalnoj ravnini te plohe - tada će biti:

$$\vec{OM}_u \cdot \vec{n} = 0 \qquad \vec{OM}_v \cdot \vec{n} = 0 \tag{12}$$

Iz toga izlazi da je vektor $\vec{OM}_u$ okomit i na vektor $\vec{n}_u$ i na vektor $\vec{n}$. Tada možemo napisati:

$$\vec{OM}_u = \lambda \vec{n}_u \times \vec{n} \tag{13}$$

Slično je vektor $\vec{OM}_v$ okomit na vektore $\vec{n}$ i $\vec{n}_v$ - tada imamo:

$$\vec{OM}_v = \mu \vec{n} \times \vec{n}_v \tag{14}$$

Lako je uočiti da su λ i μ jednaki, to dobijemo izjednačenjem mješovitih derivacija vektora $\vec{OM}$. Dakle:

$$\lambda = \mu \tag{15}$$

Ovdje treba napomenuti da su λ i μ funkcije od u,v.

Sada ćemo pomoću funkcije λ uvesti jedan novi vektor $\vec{\xi}$ i to na slijedeći način:

$$\vec{\xi} = \vec{n} \sqrt{\lambda} \tag{16}$$

Ovaj vektor ima smjer normale plohe (M). Zato će biti:

$$\vec{\xi} \times \vec{n} = 0$$

Odredimo sada derivaciju vektora $\vec{\xi}$ po varijabli u:

$$\vec{\xi}_u = \vec{n}_u \cdot \sqrt{\lambda} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \lambda_u \vec{n} \; / \cdot \sqrt{\lambda}$$

$$\vec{\xi} \sqrt{\lambda} = \vec{n}_u \cdot \lambda + \frac{1}{2} \lambda_u \vec{n}$$

Iz ovog izraza možemo odrediti derivaciju $\vec{n}_u$:

$$\vec{n}_u = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \vec{\xi} - \frac{1}{2\lambda} \lambda_u \vec{n}$$

Uzmimo sada izraz (13) za $\vec{OM}_u$ i u njega uvrstimo gornju vrijednost za $\vec{n}_u$ kao i vrijednost vektora $\vec{n}$ iz (16) - dobijemo:

$$\vec{OM}_u = \lambda\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \vec{\xi} - \frac{1}{2\lambda} \lambda_u \vec{n}\right) \times \vec{\xi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

Budući da je $\vec{n} \times \vec{\xi} = 0,$

to ćemo dobiti:

$$\vec{OM}_u = \lambda \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cdot \vec{\xi}_u \times \vec{\xi}$$

$$\vec{OM}_u = \vec{\xi}_u \times \vec{\xi}$$

Sličan izraz bismo dobili za $\vec{OM}_v$. Prema tome, dobijemo dvije jednadžbe:

$$\vec{OM}_u = \vec{\xi}_u \times \vec{\xi} \qquad (17)$$

$$\vec{OM}_v = \vec{\xi} \times \vec{\xi}_v$$

Sada ćemo iz ovih dviju jednadžbi izvesti mješovite derivacije - one moraju biti jednake:

$$\vec{OM}_{uv} = \vec{OM}_{vu}$$

$$\vec{\xi}_{uv} \times \vec{\xi} + \vec{\xi}_u \times \vec{\xi}_v = \vec{\xi}_u \times \vec{\xi}_v + \vec{\xi} \times \vec{\xi}_{vu}$$

$$\vec{\xi}_{uv} \times \vec{\xi} + \vec{\xi}_{uv} \times \vec{\xi} = 0$$

$$2\,\vec{\xi}_{uv} \times \vec{\xi} = 0 \;/ :2$$

$$\vec{\xi}_{uv} \times \vec{\xi} = 0$$

Ako je vektorski produkt dvaju vektora jednak nuli, tada su ti vektori kolinearni. Prema tome će biti:

$$\vec{\xi}_{uv} = Q\vec{\xi} \qquad (18)$$

a ovo je jedna Moutardova jednadžba.

Zaključak: Vektor $\vec{\xi}$, definiran izrazom

$$\vec{\xi} = \vec{n} \cdot \sqrt{\lambda}, \qquad (16)$$

zadovoljava Moutardovu jednadžbu

$$\vec{\xi}_{uv} = Q\,\vec{\xi} \qquad (18)$$

Ovo smo sve izveli za plohu (M), uz uvjete koje smo postavili na početku ovog paragrafa. Osim toga, jednadžba (18) nam daje tri Moutardove jednadžbe: za svaku komponentu vektora $\vec{\xi}$ imamo jednu Moutardovu jednadžbu.

Neka su:

$$\bar{x} = \bar{x}\,(u,v)$$
$$\bar{y} = \bar{y}\,(u,v)$$
$$\bar{z} = \bar{z}\,(u,v)$$

komponente vektora $\vec{\xi}$, tada se ova jednadžba može pisati u obliku:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{uv} &= Q\bar{x} \\ \bar{y}_{uv} &= Q\bar{y} \\ \bar{z}_{uv} &= Q\bar{z} \end{aligned} \qquad (19)$$

3. KONSTRUKCIJA W-KONGRUENCIJE PRAVACA POMOĆU MOUTARDOVIH JEDNADŽBI

Moutardova jednadžba i Moutardove transformacije omogućuju nam da pomoću neke zadane plohe (M) konstruiramo W-kongruenciju pravaca. Mi ćemo to izreći jednim teoremom.

Teorem 2. Zadana nam je neka ploha (M) na kojoj su sve točke hiperboličke. Na njoj odaberemo u-linije i v-linije tako da su to asimptotske linije plohe (M).

Neka je $\vec{n}$ jedinični vektor normalne te plohe i neka je on vezan s vektorom $\vec{OM}_u$ jednadžbom

$$\vec{OM}_u = \lambda \vec{n}_u \times \vec{n} \tag{13}$$

gdje je λ funkcija od u,v.

Definirajmo nadalje vektor $\vec{\xi}$, i to tako da je:

$$\vec{\xi} = \vec{n}\sqrt{\lambda} \tag{16}$$

Na taj način pomoću vektora $\vec{\xi}$ možemo odrediti jednadžbe kojima je zadana ploha (M)

$$\begin{aligned} \vec{OM}_u &= \vec{\xi}_u \times \vec{\xi} \\ \vec{OM}_v &= \vec{\xi} \times \vec{\xi}_v \end{aligned} \tag{17}$$

Pri tome vektor $\vec{\xi}$ zadovoljava Moutardovu jednadžbu

$$\vec{\xi}_{uv} = Q\vec{\xi}. \tag{18}$$

Svako rješenje g te jednadžbe transformira koordinate tog vektora $\vec{\xi}$(prema Moutardovim formulama za transformaciju u teoremu 1) u koordinate vektora $\vec{\eta}$.

Taj vektor pomoću jednadžbi:

$$\begin{aligned} \vec{ON}_u &= \vec{\eta}_u \times \vec{\eta} \\ \vec{ON}_v &= \vec{\eta} \times \vec{\eta}_v \end{aligned} \tag{20}$$

opisuje plohu (N).

Ako uzmemo da je (M) jedna žarišna ploha kongruencije, tada je gore dobivena ploha kongruencije - a to je druga žarišna ploha kongruencije. A ta kongruencija je upravo jedna W-kongruencija pravaca.

Dokaz: Mi ćemo najprije odrediti jednadžbe plohe (N) koja se pomoću rješenja g jednadžbe (18) može dobiti uz vektor $\vec{\eta}$. Zatim treba dokazati da će pravac MN biti zajednička tangenta tih dviju ploha i dirat će te plohe upravo u točkama M i N. Na taj način ti pravci postaju pravci kongruencije. Mi prema tome moramo dokazati da je vektor $\vec{MN}$ okomit na normalama ploha (M) i (N).

Podjimo od činjenice da je vektor $\vec{\xi}$ vezan s plohom (M) na način:

$$\vec{\xi} = \vec{n}\sqrt{\lambda} \tag{13}$$

gdje je λ funkcija koja se pojavljuje u izrazu:

$$\vec{OM}_u = \lambda\vec{n}_u \times \vec{n}\,. \tag{16}$$

Taj vektor zadovoljava Moutardovu jednadžbu:

$$\vec{\xi}_{uv} = Q\vec{\xi}. \tag{18}$$

Neka je g jedno rješenje gornje jednadžbe. Tada postoji neki vektor $\vec{\eta}$(i to samo jedan) takav da on zadovoljava jednu drugu Moutardovu jednadžbu:

$$\vec{\eta}_{uv} = Q_1\vec{\eta} \tag{21}$$

gdje je:

$$Q_1 = g\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{1}{g}\right) \tag{22}$$

Ovo je sve prema teoremu 1.

Medjutim, ovdje je važno napomenuti slijedeće: svako rješenje g jednadžbe (18) daje vektor $\vec{\eta}$, a time i plohu (N) kojoj pripada taj vektor $\vec{\eta}$.

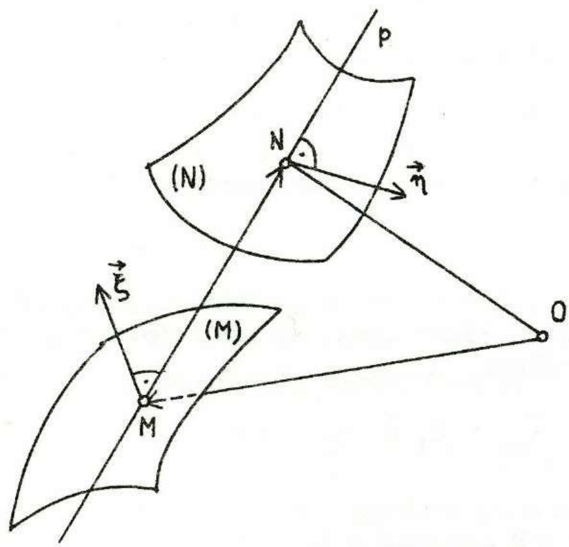
Ako smo za plohu (M) imali jednadžbu (17):

$$\begin{aligned} \vec{OM}_u &= \vec{\xi}_u \times \vec{\xi} \\ \vec{OM}_v &= \vec{\xi} \times \vec{\xi}_v, \end{aligned} \tag{17}$$

tada ćemo za plohu (N) imati analogno:

$$\begin{aligned} \vec{ON}_u &= \vec{\eta}_u \times \vec{\eta} \\ \vec{ON}_v &= \vec{\eta} \times \vec{\eta}_v. \end{aligned} \tag{20}$$

Svaka vrijednost g dat će drugačiju vrijednost vektora μ, a time i drugu plohu (N). Mi moramo uzeti takav g da integracijska konstantna poprimi takvu vrijednost da pravci koji prolaze točkama M i N budu zajedničke tangente ploha (M) i (N) u točkama M, odnosno N. U tom slučaju bi plohe (M) i (N) bile žarišne plohe neke kongruencije pravaca.



Pravac MN imat će smjer: $\vec{MN} = \vec{ON} - \vec{OM}$ (23)

Prema (5) za funkciju g bit će:

$$\frac{\partial}{\partial u}(g\vec{\eta}) = \begin{vmatrix} \xi & g \\ \xi_u & g_u \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(g\vec{\eta}) = - \begin{vmatrix} \vec{\xi} & g \\ \vec{\xi}_v & g_v \end{vmatrix} \tag{24}$$

Mi moramo na neki način eliminirati ovu funkciju g. Derivirajmo te jednadžbe po u i v:

$$\vec{\eta}g_u + g\vec{\eta}_u = \vec{\xi}g_u - \vec{\xi}_u g$$

$$\vec{\eta}g_v + g\vec{\eta}_v = -\vec{\xi}g_v + g\vec{\xi}_v$$

$$g\vec{\xi}_u + g\vec{\eta}_u = \vec{\xi}g_u - \vec{\eta}g_u$$

$$g\vec{\eta}_v - g\vec{\xi}_v = -\vec{\xi}g_v - \vec{\eta}g_v$$

$$g\frac{\partial}{\partial u}(\vec{\xi} + \vec{\eta}) = g_u(\vec{\xi} - \vec{\eta})$$

$$g\frac{\partial}{\partial v}(-\vec{\xi} + \vec{\eta}) = -g_v(\vec{\xi} + \vec{\eta}).$$

Ova dva izraza mogu biti ispravna samo onda ako su vektori kolinearni. Mi ćemo tu kolinearnost izraziti pomoću iščezavanja vektorskog produkta - dakle:

$$\frac{\partial}{\partial u}(\vec{\xi} + \vec{\eta}) \times (\vec{\xi} - \vec{\eta}) = 0$$

$$(\vec{\xi} + \vec{\eta}) \times \frac{\partial}{\partial v}(\vec{\xi} - \vec{\eta}) = 0$$

$$(\vec{\xi}_u + \vec{\eta}_u) \times (\vec{\xi} - \vec{\eta}) = 0.$$

$$(\vec{\xi} + \vec{\eta}) \times (\vec{\xi}_v - \vec{\eta}_v) = 0.$$

Uzmimo sada vektor pravca kongruencije:

$$\vec{MN} = \vec{ON} - \vec{OM}.$$

Derivirajmo najprije po u, a zatim po v - dobijemo:

$$\frac{\partial}{\partial u}(\vec{ON} - \vec{OM}) = \vec{ON}_u - \vec{OM}_u$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(\vec{ON} - \vec{OM}) = \vec{ON}_v - \vec{OM}_v$$

Za derivacije vektora $\vec{OM}$ i $\vec{ON}$ uzmemo izraze (17) i (20)

$$\frac{\partial}{\partial u}(\vec{ON} - \vec{OM}) = \vec{\eta}_u \times \vec{\eta} - \vec{\xi}_u \times \vec{\xi}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(\vec{ON} - \vec{OM}) = \vec{\eta} \times \vec{\eta}_v - \vec{\xi} \times \vec{\xi}_v.$$

Sada ćemo desnim stranama gornjih jednadžbi dodati izraze (25) koji iščezavaju - dobijemo:

$$\frac{\partial}{\partial u}(\vec{ON} - \vec{OM}) = \vec{\eta}_u \times \vec{\eta} - \vec{\xi}_u \times \vec{\xi} + (\vec{\xi}_u + \vec{\eta}_u)\times(\vec{\xi} - \vec{\eta})$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(\vec{ON} - \vec{OM}) = \vec{\eta} \times \vec{\eta}_v - \vec{\xi} \times \vec{\xi}_v + (\vec{\xi} + \vec{\eta}) \times (\vec{\xi}_v - \vec{\eta}_v)$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(\vec{ON}-\vec{OM}) = \vec{\eta}_u \times \vec{\eta} - \vec{\xi}_u \times \vec{\xi} + \vec{\xi}_u \times \vec{\xi} + \vec{\eta}_u \times \vec{\xi} - \vec{\xi}_u \times \vec{\eta} - \vec{\eta}_u \times \vec{\eta}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(\vec{ON}-\vec{OM}) = \vec{\eta} \times \vec{\eta}_v - \vec{\xi} \times \vec{\xi}_v + \vec{\xi} \times \vec{\xi}_v + \vec{\eta} \times \vec{\xi}_v - \vec{\xi} \times \vec{\eta}_v - \vec{\eta} \times \vec{\eta}_v$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(\vec{ON} - \vec{OM}) = \vec{\eta}_u \times \vec{\xi} + \vec{\eta} \times \vec{\xi}_u$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(\vec{ON} - \vec{OM}) = \vec{\eta}_v \times \vec{\xi} + \vec{\eta} \times \vec{\xi}_v$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(\vec{ON} - \vec{OM}) = \frac{\partial}{\partial u}(\vec{\eta} \times \vec{\xi})$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(\vec{ON} - \vec{OM}) = \frac{\partial}{\partial v}(\vec{\eta} \times \vec{\xi})$$

Integriramo li prvu i drugu jednadžbu i ako zgodno odaberemo konstante integracije - dobijemo:

$$\vec{ON} - \vec{OM} = \vec{\eta} \times \vec{\xi}$$

ili prema (23)

$$\vec{MN} = \vec{\eta} \times \vec{\xi}$$

Odavde zaključujemo da je vektor $\vec{MN}$ okomit na vektore $\vec{\xi}$ i $\vec{\eta}$. Budući da vektori $\vec{\xi}$ i $\vec{\eta}$ imaju smjerove normale ploha (M) i (N), to će pravac MN imati smjer zajedničke tangente ploha (M) i (N). Dakle, pravci MN su zaista pravci kongruencije, za koju su plohe (M) i (N) žarišne plohe. Sve funkcije s kojima smo radili u ovom paragrafu jesu funkcije dviju varijabli u,v - a to je takodjer u skladu s definicijom kongruencije pravaca.

Postavlja se sada drugo pitanje: da li je to W-kongruencija pravaca. Kod W-kongruencije pravaca upravo smo pošli od činjenice da su u-linije i v-linije na plohi (M) asimptotske linije te plohe. No u-linije i v-linije na plohi (N) takodjer su asimptotske linije jer za plohu (N) vrijede slične jednadžbe (20) kao i jednadžbe (17) za plohu (M).

Ploha (M) pomoću rješenja g Moutardove jednadžbe

$$\vec{\xi}_{uv} = Q\,\vec{\xi}$$

generira jednu drugu plohu (N) pomoću vektora $\vec{\eta}$. Te dvije plohe odredjuju, kao žarišne plohe, jednu W-kongruenciju pravaca. To znači da ploha (M) može generirati beskonačno mnogo ploha (N), a što ovisi o rješenju g jednadžbe (18). Prema tome od neke plohe (M), za koju smo dali uvjete u paragrafu 2, možemo načiniti beskonačno mnogo W-kongruencija pravaca jer će svako rješenje g dati jednu od takvih kongruencija.

4. OBRAT TEOREMA 2.

U teoremu 2. dokazali smo da plohe (M) i (N), od kojih drugu dobijemo pomoću Moutardovih transformacija, postaju žarišne plohe jedne W-kongruencije pravaca. Medjutim, nas sada zanima slijedeći problem: može li se svaka W-kongruencija pravaca dobiti pomoću Moutardovih transformacija. U tom smislu dobit ćemo jedan teorem koji je obrat teorema 2.

Teorem 3. Svaka W-kongruencija pravaca može se dobiti pomoću neke Moutardove transformacije.

Dokaz: Kod dokazivanja ovog teorema polazimo od toga da nam je zadana neka W-kongruencija pravaca. Neka su plohe (M) i (N) žarišne plohe te kongruencije. Neka su zatim za te plohe (M) i (N) dani uvjeti za W-kongruencije -a to znači da su linije, i to u-linije i v-linije, na tim plohama asimptotske krivulje. Zbog toga će za te plohe vrijediti Moutardove jednadžbe.

Neka vektor $\vec{\xi}$ ima smjer normale plohe (M), a vektor $\vec{\eta}$ smjer normale plohe (N). Tada će za te vektore vrijediti Moutardove jednadžbe:

$$\vec{\xi}_{uv} = Q\vec{\xi}$$

$$\vec{\eta}_{uv} = Q_1\vec{\eta}$$

Trebamo sada dokazati da je druga jednadžba dobivena transformacijom pomoću jednog rješenja prve jednadžbe.

Budući da su plohe (M) i (N) žarišne plohe neke kongruencije, to će pravac MN imati smjer koji je okomit i na vektor $\vec{\xi}$ i na vektor $\vec{\eta}$.

To znači da će $\vec{MN}$ imati smjer vektorskog produkta vektora ξ i η. Dakle:

$$\vec{MN} = m\ (\vec{\eta}\ x\vec{\xi})$$

ili:

$$\vec{ON} - \vec{OM} = m\ (\vec{\eta}\ x\vec{\xi}) \tag{26}$$

Ovdje je m faktor proporcionalnosti - a to je takodjer funkcija od u i v:

$$m = m\ (u,v)$$

Zanima nas sada kolika je vrijednost te funkcije m i da li ona mijenja vrijednost od pravca do pravca kongruencije. Da bismo to doznali, gornji izraz (26) derivirat ćemo po u:

$$\vec{ON}_u - \vec{OM}_u = m_u(\vec{\eta} \times \vec{\xi}) + m\ (\vec{\eta}_u \times \vec{\xi}) + m\ (\vec{\eta} \times \vec{\xi}_u)$$

Vrijednosti $\vec{ON}_u$ i $\vec{OM}_u$ zamijenimo izrazima (20) i (17):

$$\vec{\eta}_u \times \vec{\eta} - \vec{\xi}_u \times \vec{\xi} = m_u(\vec{\eta} \times \vec{\xi}) + m(\vec{\eta}_u \times \vec{\xi}) + m\ (\vec{\eta} \times \vec{\xi}_u)$$

Gornji izraz množimo skalarno najprije s $\vec{\xi}$, a zatim s $\vec{\eta}$- dobijemo dvije jednadžbe:

$$(\vec{\eta}_u\vec{\eta}\vec{\xi}) - (\vec{\xi}_u\vec{\xi}\vec{\xi}) = m_u(\vec{\eta}\vec{\xi}\vec{\xi}) + m\ (\vec{\eta}_u\vec{\xi}\vec{\xi}) + m\ (\vec{\xi}\vec{\eta}\vec{\xi}_u)$$

$$(\vec{\eta}_u\vec{\eta}\vec{\eta}) - (\vec{\xi}_u\vec{\xi}\vec{\eta}) = m_u\ (\vec{\eta}\vec{\xi}\vec{\eta}) + m\ (\vec{\eta}_u\vec{\xi}\vec{\eta}) + m\ (\vec{\xi}_u\vec{\eta}\vec{\eta})$$

$$(\vec{\eta}_u\vec{\eta}\vec{\xi}) = m\ (\vec{\xi}\vec{\eta}\vec{\xi}_u)$$

$$-\ (\vec{\xi}_u\vec{\xi}\vec{\eta}) = m\ (\vec{\eta}_u\vec{\xi}\vec{\eta})$$

Pomnožimo lijeve i desne strane ovih jednadžbi:

$$-\ (\vec{\xi}_u\vec{\xi}\vec{\eta})\ (\vec{\eta}_u\vec{\eta}\vec{\xi}) = m^2\ (\vec{\xi}\vec{\eta}\vec{\xi}_u)\ (\vec{\eta}_u\vec{\xi}\vec{\eta})$$

Izmijenimo redoslijed faktora mješovitih produkata:

$$(\vec{\xi}\vec{\eta}\vec{\xi}_u)\ (\vec{\xi}\vec{\eta}\vec{\eta}_u) = m^2\ (\vec{\xi}\vec{\eta}\vec{\xi}_u)\ (\vec{\xi}\vec{\eta}\vec{\eta}_u)$$

Odatle dobijemo:

$$(\vec{\xi}\vec{\eta}\vec{\xi}_u)\ (\vec{\xi}\vec{\eta}\vec{\eta}_u)\ (1 - m^2) = 0$$

Budući da kod W-kongruencije normale žarišnih ploha ne zatvaraju pravi kut, to je vrijednost i prvog i drugog mješovitog produkta različita od nule (vektori $\vec{\xi}$ i $\vec{\eta}$ su okomiti na jednom te istom pravcu kongruencije).

Prema tome mora biti:

$$1 - m^2$$

ili

$$m = \pm 1$$

Mi ćemo uzeti slučaj:

$$m = 1 \tag{28}$$

(Kada bismo uzeli m = -1, samo bi se mijenjala orijentacija vektora normale).

U slučaju da je m = 1, izlazi:

$$m_u = 0$$

To uvrstimo u izraz (27)

$$(\vec{\eta}_u \times \vec{\eta}) - (\vec{\xi}_u \times \vec{\xi}) = (\vec{\eta}_u \times \vec{\xi}) + (\vec{\eta} \times \vec{\xi}_u) \;/.(-1)$$

$$(\vec{\xi}_u \times \vec{\xi}) - (\vec{\xi}_u \times \vec{\eta}) + (\vec{\eta}_u \times \vec{\xi}) - (\vec{\eta}_u \times \vec{\eta}) = 0$$

$$\vec{\xi}_u \times (\vec{\xi} - \vec{\eta}) + \vec{\eta}_u \times (\vec{\xi} - \vec{\eta}) = 0$$

$$(\vec{\xi}_u + \vec{\eta}_u) \times (\vec{\xi} - \vec{\eta}) = 0$$

Ova dva vektora su kolinearna, pa će biti:

$$\vec{\xi}_u + \vec{\eta}_u = \alpha(\vec{\xi} - \vec{\eta})$$

Ovo se, medjutim, može pisati:

$$\frac{\partial}{\partial u}(\vec{\xi} + \vec{\eta}) = \alpha(\vec{\xi} - \vec{\eta}) \tag{29}$$

Uzmimo ponovno izraz (26):

$$\vec{ON} - \vec{OM} = m\,(\vec{\eta} \times \vec{\xi})$$

Deririvamo po v:

$$\vec{ON}_v - \vec{OM}_v = m_v\,(\vec{\eta} \times \vec{\xi}) + m\,(\vec{\eta}_v \times \vec{\xi}) + m\,(\vec{\eta} \times \vec{\xi}_v)$$

Lijevu stranu zamijenimo s izrazima (20) i (17):

$$\vec{\eta} \times \vec{\eta}_v - \vec{\xi} \times \vec{\xi}_v = m_v(\vec{\eta} \times \vec{\xi}) + m\,(\vec{\eta}_v \times \vec{\xi}) + m\,(\vec{\eta} \times \vec{\xi}_v)$$

Uzmemo li u obzir da je:

$$m = 1$$
$$m_v = 0,$$

dobijemo:

$$(\vec{\eta} \times \vec{\eta}_v) - (\vec{\xi} \times \vec{\xi}_v) = (\vec{\eta}_v \times \vec{\xi}) + (\vec{\eta} \times \vec{\xi}_v)$$
$$(\vec{\xi}_v \times \vec{\xi}\,) + (\vec{\xi}_v \times \vec{\eta}) - (\vec{\eta}_v \times \vec{\eta}) - (\vec{\eta}_v \times \vec{\xi}) = 0$$
$$\vec{\xi}_v \times (\vec{\xi} + \vec{\eta}) - \vec{\eta}_v \times (\vec{\eta} + \vec{\xi}) = 0$$
$$(\vec{\xi}_v - \vec{\eta}_v) \times (\vec{\xi} + \vec{\eta}) = 0$$

Ova dva vektora su kolinearna, pa će biti:

$$\vec{\xi}_v - \vec{\eta}_v = \beta\,(\vec{\xi} + \vec{\eta})$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\,(\vec{\xi} - \vec{\eta}) = \beta\,(\vec{\xi} + \vec{\eta})\,. \tag{30}$$

Prema tome dobili smo dvije jednadžbe (29) i (30):

$$\vec{\xi}_u + \vec{\eta}_u = \alpha\,(\vec{\xi} - \vec{\eta})$$
$$\vec{\xi}_v - \vec{\eta}_v = \beta\,(\vec{\xi} + \vec{\eta}).$$

Prvu jednadžbu deriviramo po v, a drugu po u:

$$\vec{\xi}_{uv} + \vec{\eta}_{uv} = \alpha_v\,(\vec{\xi} - \vec{\eta}) + \alpha\,(\vec{\xi}_v - \vec{\eta}_v)$$
$$\vec{\xi}_{uv} - \vec{\eta}_{uv} = \beta_u\,(\vec{\xi} + \vec{\eta})\ \beta\,(\vec{\xi}_u + \vec{\eta}_u).$$

Ovdje ćemo na desnoj strani izraze s derivacijama zamijeniti izrazima (29) i (30). Na lijevoj strani imamo mješovite derivacije vektora $\vec{\xi}$ i $\vec{\eta}$. Te ćemo derivacije zamijeniti Moutardovim jednadžbama:

$$\vec{\xi}_{uv} = Q\vec{\xi}$$
$$\vec{\eta}_{uv} = Q_1\vec{\eta}.$$

Tada ćemo imati:

$$Q\vec{\xi} + Q_1\vec{\eta} = \alpha_v\,(\vec{\xi} - \vec{\eta}) + \alpha\beta(\vec{\xi} + \vec{\eta})$$
$$Q\vec{\xi} - Q_1\vec{\eta} = \beta_u(\vec{\xi} + \vec{\eta}) + \alpha\beta(\vec{\xi} - \vec{\eta}).$$

Funkcije α, β možemo uzeti proizvoljno. Mi ćemo ih uzeti tako da u svakoj jednadžbi izjednačimo najprije koeficijente uz $\vec{\xi}$, a zatim uz $\vec{\eta}$:

$$Q = \alpha_v + \alpha\beta \qquad Q_1 = -\alpha_v + \alpha\beta$$
$$Q = \beta_u + \alpha\beta \qquad -Q_1 = \beta_u - \alpha\beta.$$

Odatle dobijemo derivacije α_v i β_u:

$$\alpha_v = Q - \alpha\beta \qquad \alpha_v = \alpha\beta - Q_1$$
$$\beta_u = Q - \alpha\beta \qquad \beta_b = \alpha\beta - Q_1.$$

Iz ovih izraza vidimo da su ove derivacije α_v i β_u jednake - dakle:

$$\alpha_v = \beta_u = Q - \alpha\beta = \alpha\beta - Q_1 \tag{31}$$

Sada ćemo uvesti novu funkciju:

$$g = g\,(u,v)$$

i to tako da bude:

$$\alpha = \frac{\partial}{\partial u}\ln g$$
$$\beta = \frac{\partial}{\partial v}\ln g \tag{32}$$

Deriviranjem dobijemo:

$$\alpha_v = \frac{\partial^2 \ln g}{\partial u\,\partial v}$$
$$\beta_u = \frac{\partial^2 \ln g}{\partial u\,\partial v}$$

a izraz (31) nam govori da su te derivacije jednake. Osim toga, funkcija $g = g(u,v)$ mora biti jedno rješenje Moutardove jednadžbe

$$\vec{\xi}_{uv} = Q\vec{\xi}$$

Dakle, mora biti:

$$g_{uv} = Qg \tag{33}$$

Funkcija $g = g(u,v)$ mora zadovoljavati uvjete (32) i (33). Iz (31) dobijemo:

$$\alpha_v = Q - \alpha\beta$$

$$\beta_u = \alpha\beta - Q_1.$$

Ovdje uvrstimo vrijednosti za $\alpha, \beta, \alpha_v, \beta_u$ - dobijemo:

$$\frac{\partial^2 \ln g}{\partial u\, \partial v} = Q - \frac{\partial \ln g}{\partial u} \cdot \frac{\partial \ln g}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 \ln g}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial \ln g}{\partial u} \cdot \frac{\partial \ln g}{\partial v} - Q_1$$

Izjednačimo desne strane ovih jednadžbi:

$$Q - \frac{\partial \ln g}{\partial u} \cdot \frac{\partial \ln g}{\partial v} = \frac{\partial \ln g}{\partial u} \cdot \frac{\partial \ln g}{\partial v} - Q_1$$

$$Q_1 = 2\,\frac{\partial \ln g}{\partial u} \cdot \frac{\partial \ln g}{\partial v} - Q$$

Izvršimo deriviranje:

$$Q_1 = 2 \cdot \frac{1}{g}\, g_u \cdot \frac{1}{g}\, g_v - Q$$

$$Q_1 = \frac{2}{g^2}\, g_u g_v - Q$$

Iz izraza (33) dobijemo vrijednost za integracijsku konstantu Q:

$$Q = \frac{g_{uv}}{g}$$

Uvrstimo to gore - dobit ćemo:

$$Q_1 = \frac{2}{g^2} g_u g_v - \frac{g_{uv}}{g}$$

$$Q_1 = g\left(\frac{2}{g^3} g_u g_v - \frac{g_{uv}}{g^2} \right)$$

Mi ćemo se uvjeriti da ovaj izraz u zagradi daje mješovitu derivaciju recipročne vrijednosti funkcije g.

$$\frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v}\left(\frac{1}{g}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(- \frac{1}{g^2} g_u\right) =$$

$$= \frac{2}{g^3} g_u g_v - \frac{g_{uv}}{g^2}$$

Dakle:

$$\frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v}\left(\frac{1}{g}\right) = \frac{2}{g^3} g_u g_v - \frac{g_{uv}}{g^2}$$

Prema tome, za vrijednost Q_1 dobijemo konačno:

$$Q_1 = g \frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v} \left(\frac{1}{g}\right).$$

A to je upravo ona vrijednost integracijske konstante Q_1 za Moutardovu jednadžbu

$$\vec{\eta}_{uv} = Q_1 \vec{\eta}$$

koja je nastala transformacijom jednadžbe

$$\vec{\xi}_{uv} = Q\vec{\xi}$$

pomoću jednog rješenja te jednadžbe g.

Zaključak

Zadana je neka W-kongruencija pomoću žarišnih ploha (M) i (N) kojima normale imaju smjerove $\vec{\xi}$ i $\vec{\eta}$ i zadovoljavaju Moutardove jednadžbe

$$\vec{\xi}_{uv} = Q\vec{\xi}$$

$$\vec{\eta}_{uv} = Q_1\vec{\eta} .$$

Na tim plohama su u-linije i v-linije asimptotske linije (uvjet za W-kongruenciju). Tada jednadžba

$$\vec{\eta}_{uv} = Q_1\vec{\eta}$$

može se uvijek dobiti transformacijom jednadžbe

$$\vec{\xi}_{uv} = Q\vec{\xi}$$

pomoću njenog rješenja g, a koje je zgodno odabrano uvjetima (29), (30) i (32).

Dakle, svaka W-kongruencija pravaca zaista se može dobiti pomoću jedne Moutardove transformacije.

L I T E R A T U R A

1. S.P.Finkov: Differencial'naja geometrija, Moskva, 1947.

2. S.P.Finikow: Theorie der Kongruenzen, Akademie-Verlag, Berlin, 1959.

3. N.V.Jefimov: Viša geometrija, Beograd, 1949.

4. V.Niče: Uvod u sintetičku geometriju, Zagreb, 1956.

5. A.P.Norden: Kratkij kurs differencial'noj geometrii,Moskva, 1958.

6. A.V.Pogorelov: Lekcii po differencial'noj gemetrii, Mar'kov, 1967.

7. P.K.Raševskij: Differencial'naja geometrija, Moskva, 1956.

Primljeno: 1982-07-08

Божидар Валог:

"В - КОНГРУЭНЦИИ ПРЯМЫХ В СВЕТУ МОУТАРДОВЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ"

Р Е З Ю М Е

В статье обработанные дифференциальные уровнения Моутарда и их преобразования. Уровнения служат для построения В-конгруэнции прямых (конгруэнция Веингартена). Эта конгруэнция прямых имеет свойство, что асимптотические линии фокусных поверхностей отвечают (корренспондируют) друг другу.

На основе этого свойства доказана теорема, в которой связываются Моутардовые уровнения и их преобразования с В-конгруэнциями прямых. Подробно доказана теорема построения В-конгруэнций прямых, а тем не менее и оборот этой теоремы.