Matka 20 (2011./2012.) br. 79

DVA DOKAZA DRUGOG PTOLEMEJEVOG[1] POUČKA

Šefket Arslanagić, Sarajevo, BiH

Uz tužno sjećanje na profesora Vladimira Devidéa (1925.-2010.)

U [1], [2], [3] i [4] autor ovoga članka detaljno je pisao o **prvom Ptolemejevom poučku** koji je ovaj poznati starogrčki matematičar dao u svome velikom djelu „Almagest", a koji glasi:

U svakom tetivnom četverokutu umnožak duljina dijagonala jednak je zbroju umnožaka duljina njegovih nasuprotnih stranica.

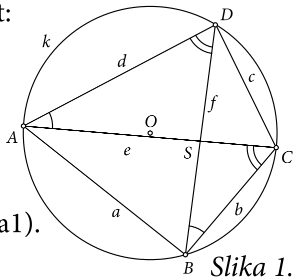
Dana su četiri razna dokaza ovog poučaka, kao i više raznih primjera njegove primjene. U [4] je dana i generalizacija ovoga poučka.

Recimo sada da u matematičkoj literaturi iz geometrije postoji i **drugi Ptolemejev poučak** koji glasi:

U tetivnom četverokutu $ABCD$ vrijedi jednakost:

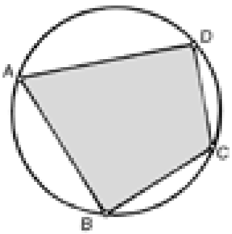
$$\frac{|AC|}{|BD|}=\frac{|AB|\cdot|AD|+|BC|\cdot|CD|}{|AB|\cdot|BC|+|AD|\cdot|CD|}. \qquad (1)$$

Dat ćemo dva dokaza ovog poučka.



Slika 1.

Dokaz 1. Neka je S presjek dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ (slika1).



Očito vrijedi:

$$|\angle DAS|=|\angle CBS| \text{ (obodni kutovi nad tetivom } \overline{CD} \text{ kružnice } k)$$

kao i

$$|\angle ADS|=|\angle BCS| \text{ (obodni kutovi nad tetivom } \overline{AB} \text{ kružnice } k).$$

To pak znači da je $\Delta ADS \sim \Delta BCS$, pa imamo:

$$\frac{|SD|}{|SC|}=\frac{|SA|}{|SB|}=\frac{|AD|}{|BC|},$$

a odavde

$$\frac{|SA|}{|AD|\cdot|AB|}=\frac{|SB|}{|BC|\cdot|AB|} \text{ i } \frac{|SD|}{|AD|\cdot|CD|}=\frac{|SC|}{|BC|\cdot|CD|}. \qquad (2)$$

Analogno iz sličnosti trokuta ΔABS i ΔCDS dobivamo da je:

$$\frac{|SA|}{|AB|}=\frac{|SD|}{|CD|},$$

odnosno

$$\frac{|SA|}{|AB|\cdot|AD|}=\frac{|SD|}{|AD|\cdot|CD|}. \qquad (3)$$

[1]Ptolemej (Ptolemeus Cladius), starogrčki geograf, astronom i matematičar iz 2. st.

Sada iz (2) i (3) dobivamo da je:

$$\frac{|SA|}{|AD|\cdot|AB|}=\frac{|SB|}{|BC|\cdot|AB|}=\frac{|SC|}{|BC|\cdot|CD|}=\frac{|SD|}{|AD|\cdot|CD|},$$

a odavde

$$\frac{|SA|+|SC|}{|AB|\cdot|AD|+|BC|\cdot|CD|}=\frac{|SB|+|SD|}{|AB|\cdot|BC|+|AD|\cdot|CD|}, \text{ tj.}$$

$$\frac{|AC|}{|AB|\cdot|AD|+|BC|\cdot|CD|}=\frac{|BD|}{|AB|\cdot|BC|+|AD|\cdot|CD|}$$

ili

$$\frac{|AC|}{|BD|}=\frac{|AB|\cdot|AD|+|BC|\cdot|CD|}{|AB|\cdot|BC|+|AD|\cdot|CD|}.$$

Ako je $|AC| = e$, $|BD| = f$, $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$ i $|AD| = d$,

$$\frac{e}{f}=\frac{ad+bc}{ab+cd}, \text{ što je i trebalo dokazati.}$$

Dokaz 2. Za ovaj dokaz koristit ćemo metodu površina. Površinu četverokuta *ABCD* možemo prikazati kao zbroj površina dvaju trokuta:

$$p_{ABCD}=p_{\Delta ABC}+p_{\Delta ADC}, \text{ tj.}$$

$$p_{ABCD}=\frac{|AB|\cdot|BC|\cdot|AC|}{4R}+\frac{|AD|\cdot|AC|\cdot|CD|}{4R}, \tag{4}$$

kao i

$$p_{ABCD}=p_{\Delta ABD}+p_{\Delta BCD}, \text{ tj.}$$

$$p_{ABCD}=\frac{|AB|\cdot|AD|\cdot|BD|}{4R}+\frac{|BC|\cdot|BD|\cdot|CD|}{4R}, \tag{5}$$

gdje je R duljina polumjera četverokutu *ABCD* opisane kružnice. (Ta je kružnica opisana i trokutima ΔABC, ΔADC, ΔABD i ΔBCD.)
Sada iz (4) i (5) dobivamo:

$$|AB|\cdot|BC|\cdot|AC|+|AD|\cdot|AC|\cdot|CD|=|AB|\cdot|AD|\cdot|BD|+|BC|\cdot|BD|\cdot|CD|,$$

odnosno

$$|AC|\big(|AB|\cdot|BC|+|AD|\cdot|CD|\big)=|BD|\big(|AB|\cdot|AD|+|BC|\cdot|CD|\big),$$

a odavde

$$\frac{|AC|}{|BD|}=\frac{|AB|\cdot|AD|+|BC|\cdot|CD|}{|AB|\cdot|BC|+|AD|\cdot|CD|}, \text{ što je i trebalo dokazati.}$$

Literatura

[1] **Arslanagić, Š.**, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.
[2] **Arslanagić, Š.**, *Matematička čitanka*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2008.
[3] **Arslanagić, Š.**, *Matematička čitanka 1*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2009.
[4] **Arslanagić, Š.**, *Matematička čitanka 2*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2010.