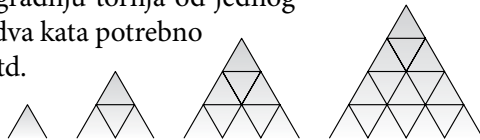


TORANJ OD KARATA

Alija Muminagić, Danska i Renata Svedrec, Zagreb

Ivica gradi toranj od karata, kao na slici. Za gradnju tornja od jednog kata potrebne su mu dvije karte, za toranj od dva kata potrebno mu je 7 karata, za onaj od tri kata treba 15 karata, itd. Ivica želi sagraditi toranj od pedeset katova. Koliko će mu karata trebati za takav toranj?



Problem bismo mogli riješiti tako da nacrtamo toranj od pedeset katova i „jednostavno” prebrojimo potrebne karte. Taj način rješavanja nije baš primjeren jer zahtijeva puno crtanja i prebrojavanja. (Zamislite tek da Ivica želi postaviti rekord i složiti toranj od 1000 katova!?) Pokušajmo taj zadatak riješiti nekom učinkovitijom metodom, bez crtanja i prebrojavanja.

S gornje slike zaključujemo da za izgradnju tornja s pedeset katova Ivica treba postaviti $S_1 = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 48 + 49$ „horizontalnih” karata, te $S_2 = 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 98 + 100$ „kosih” karata¹. Određivanje vrijednosti S_1 i S_2 olakšano je ako primijenimo *Gaussovu dosjetku*. Naime,

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + 48 + 49 = \frac{(1 + 49) \cdot 49}{2} = 25 \cdot 49 = 1\,225,$$

$$S_2 = 2 + 4 + 6 + \dots + 98 + 100 = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 49 + 50) = 2 \cdot \frac{(1 + 50) \cdot 50}{2} = 51 \cdot 50 = 2\,550.$$

Ukupan broj karata jednak je zbroju broj „horizontalnih” i broja „kosih” karata, tj. jednak je $S_1 + S_2 = 1225 + 2550 = 3775$.

Zadatak možemo rješavati i na drugi način. Sa slike vidimo da su Ivici za gradnju prvoga kata potrebne 2 karte, za izgradnju dvaju katova potrebno je 5 karata više nego za izgradnju jednoga kata, za izgradnju triju katova potrebno je 8 karata više nego za izgradnju dvaju katova... Za izgradnju pedeset katova treba 149 karata više nego za izgradnju tornja s 49 katova.

Uočite da je² $2 = 3 \cdot 1 - 1, 5 = 3 \cdot 2 - 1, 8 = 3 \cdot 3 - 1, \dots, 149 = 3 \cdot 50 - 1$.

Zbrajanjem svih ovih jednakosti dobivamo:

$$\begin{aligned} 2 + 5 + 8 + \dots + 149 &= 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \dots + 3 \cdot 50 \underbrace{- 1 - 1 - 1 - \dots - 1}_{50 \text{ puta}} \\ &= 3 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 50) - 50 = 3 \cdot \frac{50 \cdot (50 + 1)}{2} - 50 = 3825 - 50 = 3775. \end{aligned}$$



¹U nizovima prirodnih brojeva 1, 2, 3, 4, 5, ... i 2, 4, 6, 8, 10, ... svaki član (počevši od drugoga) dobivamo tako da prethodni član uvećamo za konstantu d . Takve nizove nazivamo *aritmetičkim nizovima*.

²Uočite da je u zbroju $2 + 5 + 8 + \dots + 149$ svaki pribrojnik oblika $3k - 1$, za $k = 1, 2, 3, \dots, 50$. Srednjoškolci znaju da možemo računati $2 + 5 + 8 + \dots + 149 = \sum_{k=1}^{50} (3k - 1) = 3 \sum_{k=1}^{50} k - \sum_{k=1}^{50} 1 = 3 \cdot \frac{50 \cdot (50 + 1)}{2} - 50 = 3775$.

