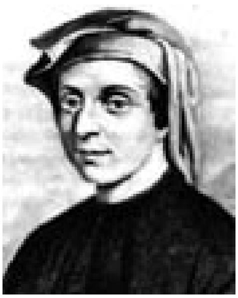
Matka 19 (2010./2011.) br. 76

FIBONACCI, ZEČEVI I PČELE

Marija Juričić Devčić, Zagreb



Fibonacci

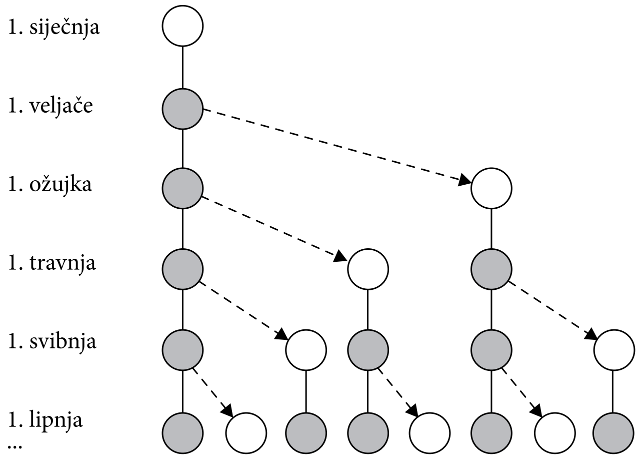
Leonardo Fibonacci (1170.-1250.), poznat još i kao Leonardo iz Pise, bio je jedan od najistaknutijih matematičara srednjega vijeka. Njegov najveći doprinos matematici, a i čovječanstvu, jest uvođenje arapskog načina zapisivanja brojeva. U svom najpoznatijem djelu *Liber Abaci* (1202.) Leonardo je prikazao zanimljiv problem razmnožavanja zečeva:

Pretpostavimo da je jedan par novorođenih zečeva doveden na pusti otok 1. siječnja. Taj će par dobiti jedan par mladih zečeva svakog prvog dana u mjesecu, počevši od 1. ožujka. Svaki će novi par također dobiti kao potomke jedan par zečeva svakog prvog dana u mjesecu, ali tek nakon navršena dva mjeseca života.

Treba odrediti koliko će parova zečeva biti na tom otoku 1. siječnja iduće godine.

Ovaj zadatak podrazumijeva idealne uvjete po kojima svaki par zečeva uvijek dobiva dva potomka, i to jednog muškog i jednog ženskog zečića. Također, na ovom zamišljenom otoku zečevi ne ugibaju.

Da bismo riješili zadatak, poslužit ćemo se shemom. Na njoj ćemo razlikovati dvije vrste simbola: bijeli kružić označavat će mladi par zečeva, a sivi kružić označavat će par zečeva koji je navršio 1 mjesec i spreman je za potomstvo idućeg 1. u mjesecu. Shema u prvih nekoliko mjeseci izgleda ovako:



Slika 1.

Isprekidane strelice pokazuju na potomke, dok vertikalne pune linije slijede isti par zečeva. Samo zreli par zečeva (sivi kružić) može imati mladi par zečeva (bijeli kružić). Svaki mladi par zečeva nakon mjesec dana postaje zreo i već idućeg mjeseca ima potomke.

Ako s F_n označimo broj parova zečeva na početku n-tog mjeseca, onda će na početku sljedećeg ($n + 1$) mjeseca broj parova zečeva biti F_{n+1}, a na početku ($n + 2$) mjeseca F_{n+2}. Na početku ($n + 2$) mjeseca imat ćemo sve parove zečeva koje smo imali i prošli mjesec, a svi parovi koje smo imali pretprošlog mjeseca dat će po još jedan novi par. Dakle, broj parova zečeva na početku ($n + 2$) mjeseca iznosi

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}.$$

Kako je $F_1 = F_2 = 1$ (na početku prvog i drugog mjeseca imamo samo jedan zečji par), slijedi da je $F_3 = F_1 + F_2 = 1 + 1 = 2$, zatim $F_4 = F_2 + F_3 = 1 + 2 = 3$, $F_5 = F_3 + F_4 = 2 + 3 = 5$, itd. Usporedite ove vrijednosti s brojem parova u shemi.

Pretpostavimo li da su zečevi na ovom otoku besmrtni, slijedeći ovu shemu dolazimo do beskonačnog niza prirodnih brojeva koji, u čast Fibonacciju, zovemo *Fibonaccijev niz*. Taj niz je:

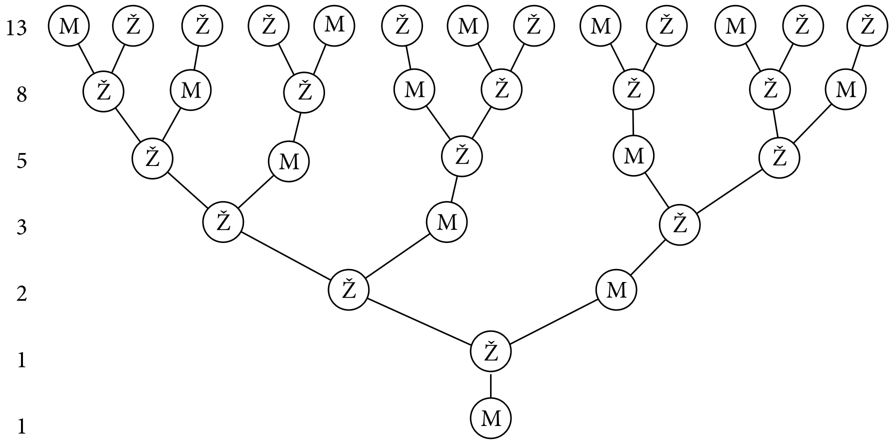
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, …

Niz započinjemo s dvije jedinice, a svaki slijedeći član niza dobije se kao zbroj prethodnih dvaju članova. Članove ovog niza nazivamo *Fibonnacijevi brojevi*.

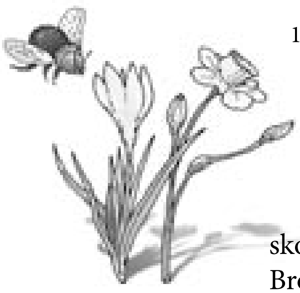
No, vratimo se zadatku sa zečevima. Zanimalo nas je koliko će parova zečeva biti na otoku 1. siječnja iduće godine, tj. na početku trinaestog mjeseca. Odgovor na to pitanje daje nam trinaesti Fibonaccijev broj: $F_{13} = 233$. Dakle, nakon godinu dana na otoku će biti 233 para skakutavih zečeva.

Sličan uzorak kao kod Fibonaccijevih zečeva pojavljuje se u populaciji pčela. Da bismo to pokazali, trebamo najprije znati nešto o pčelama. U pčelinjoj zajednici postoji pčela koju nazivamo *matica*. To je ženska pčela posebno uzgojena u košnici (pčele je hrane matičnom mliječi), kako bi osigurala nastanak potomstva. Matica leže jajašca iz kojih nastaju pčele. Ako su ta jajašca oplođena od muške pčele – *truta*, iz njih će se izleći ženske pčele – radilice. Iz neoplođenih jajašaca nastaju trutovi, što znači da oni imaju samo jednog, ženskog roditelja. Radilice koje su nastale iz oplođenih jajašaca imaju dva roditelja, žensku i mušku pčelu.

Fibonaccijevi brojevi pojavljuju se u obiteljskom stablu truta koje u idealiziranom obliku prikazuje sljedeća slika:



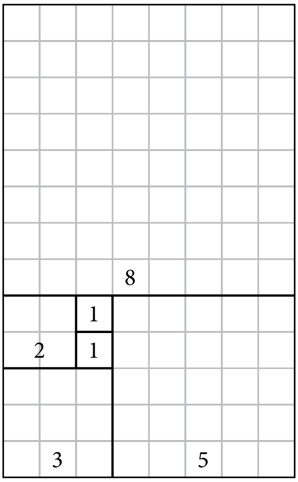
Slika 2. Obiteljsko stablo truta



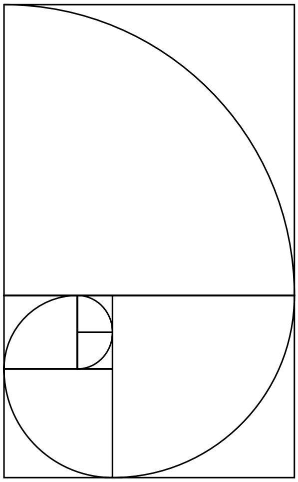
Kako vidimo, svaka muška pčela u ovom stablu ima samo jednog (ženskog) roditelja, a ženske pčele imaju dva roditelja - mušku i žensku pčelu. Brojeći pretke truta u svakom koljenu, dolazimo opet do Fibonaccijevog niza: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,… Usporedite ovu shemu sa shemom razmnožavanja zečeva!

(Naravno, u stvarnosti shema razmnožavanja pčela ne izgleda kao ovo idealno stablo, isto kao što se ni zečevi ne razmnožavaju kao oni na Fibonaccijevom pustom otoku.)

Fibonaccijevi brojevi imaju brojna matematička svojstva koja su predmet proučavanja mnogih matematičara. Ovdje ćemo navesti zanimljivo svojstvo popločavanja kvadratima kojima su duljine stranica Fibonaccijevi brojevi. Slika prikazuje početak tog popločavanja, a ono se može nastaviti s beskonačnim nizom kvadrata:

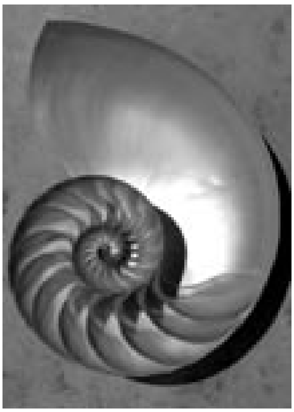


Slika 3. Popločenje Fibonaccijevim kvadratima



Slika 4. Fibonaccijeva spirala

Uočimo da duljine stranica kvadrata čine Fibonaccijev niz: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... Ako u svaki kvadrat upišemo četvrtinu kružnice, kao na slici 4., dobit ćemo krivulju koju zovemo Fibonaccijeva krivulja (Fibonaccijeva spirala), a koja je zanimljiva i po tome što se nalazi u različitim oblicima u prirodi, kao što su npr. ljudsko uho, ljuštura glavonošca indijske lađice (nautilus), rep kameleona, oblik galaksija u svemiru, struktura češera, suncokreta i nekih vrsta povrća itd.



Slika 5. Indijska lađica (nautilus)

Literatura:

1. A. Dujella, Fibonaccijevi brojevi, HMD, Zagreb, 2000.
2. http://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_number
3. http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibBio.htm