Matka 19 (2010./2011.) br. 76

SIMETRIJE U RAVNINI

Anđelko Marić, Sinj

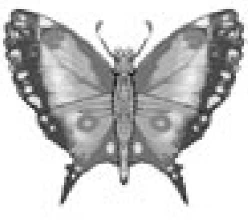
Suvremeno proučavanje geometrije nezamislivo je bez primjena takozvanih *preslikavanja* ravnine. Ta preslikavanja, po definiciji, svakoj točki ravnine pridružuju točno jednu točku te iste ravnine. Prema propisu po kojemu se vrši to preslikavanje, razlikujemo tri vrste elementarnih geometrijskih preslikavanja. To su: *simetrije*, *pomak* (*translacija)* i *vrtnja* (*rotacija)*.

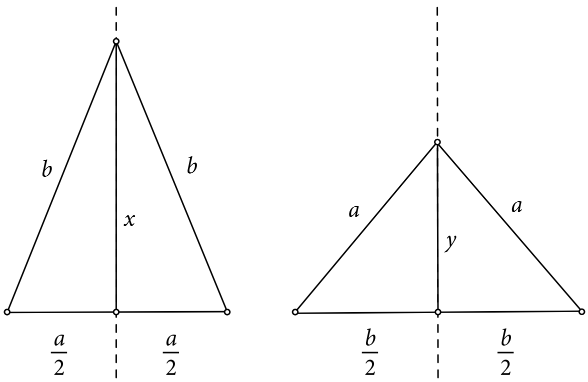
Gore navedena riječ *simetrija* nije slučajno u množini. Naime, postoji više vrsta simetrije. To su: simetrija s obzirom na točku ili *centralna* (*središnja*) simetrija i simetrija s obzirom na pravac ili *osna* (*aksijalna*) simetrija. Za podskupove prostora definira se simetrija s obzirom na ravninu, *planarna* simetrija.

U ovom članku navest ćemo neke primjere u kojima se primjenjuju osobine centralne i osne simetrije. Ti su primjeri nešto složeniji od onih koji se obrađuju u osnovnoj školi, ali teorijska razina znanja ne prelazi okvire gradiva osnovnoškolske matematike. Podrazumijeva se da je čitatelj usvojio temeljne pojmove iz tog područja koji se uče u osnovnoj školi.

Primjer 1. Koliko ima osnosimetričnih trokuta kojima su duljine dviju stranica a = 10 i b = 13? Odredimo površine tih trokuta.

Rješenje: Svaki osnosimetrični trokut je jednakokračan i svaki jednakokračni trokut je osnosimetričan. Zato postoje dva takva trokuta, što se vidi sa slike.





Površine tih trokuta su $p_1 = \frac{1}{2}ax$ i $p_2 = \frac{1}{2}by$.

Visine x i y izračunamo primjenom Pitagorina poučka:

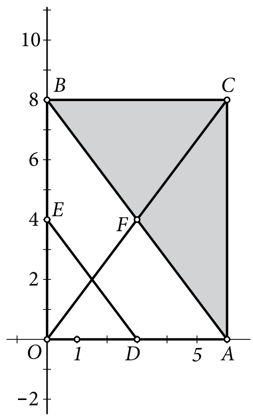
$$x = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144}, \text{ tj. } x = 12.$$

Isto tako je $y = \sqrt{a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{10^2 - 6.5^2} = \sqrt{57.75}$, tj. y je približno 7.599 (zaokruženo na tri decimale). Odavde je $p_1 = 60$ i $p_2 = 49.396$ (zaokruženo na tri decimale).

Primjer 2. Koliko ima osnosimetričnih trokuta kojima su duljine dviju stranica $a = 22$ i $b = 61$?

Rješenje: Ovaj zadatak je lijep primjer koji pokazuje kako svakom matematičkom problemu treba pristupiti s punim oprezom. Naime, ovaj zadatak je potpuno „isti" kao i prethodni i mogli bismo brzopleto odgovoriti da postoje dva takva trokuta, što nije točno. Dobili bismo duljinu stranica jednog trokuta: 22, 61, 61, a drugog: 22, 22, 61. Međutim, ne postoji trokut kojemu su duljine stranica 22, 22, 61. Te duljine ne zadovoljavaju *nejednakost trokuta,* jer je $22 + 22 < 61$. Zato postoji samo jedan trokut.

Primjer 3. U koordinatnoj ravnini zadane su točke $D(3, 0)$ i $E(0, 4)$. Centralna simetrija sa središtem u D pridružuje ishodištu sustava (O) točku A, a simetrija sa središtem u E točki O pridružuje točku B. Polovište dužine $\overline{AB}$ označimo s F. Točka C je simetrična točki O s obzirom na točku F. Izračunajmo duljine stranica i površinu trokuta ABC.



Rješenje: Prema definiciji centralne simetrije, točka D je polovište dužine $\overline{OA}$. Zato je $A(6, 0)$. Iz istog razloga je $B(0, 8)$. Promatrajmo četverokut $OACB$. Točka F je zajedničko polovište dijagonala tog četverokuta, zbog čega je to paralelogram. Dvije stranice tog paralelograma su na koordinatnim osima, tj. jedan kut paralelograma je pravi. Paralelogram s jednim pravim kutom je pravokutnik.

Duljine stranica pravokutnika $OACB$ su $|OA| = |CB| = 6$ i $|OB| = |AC| = 8$. Duljinu dužine $\overline{AB}$ izračunamo primjenom Pitagorina poučka pa dobijemo $|AB| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$. Duljine stranica trokuta ABC su 6, 8 i 10. Površina toga trokuta jednaka je polovici površine promatranog pravokutnika, dakle $p = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$.

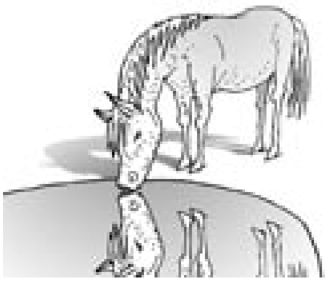
U starijoj matematičkoj literaturi često se navodio ovaj zadatak.

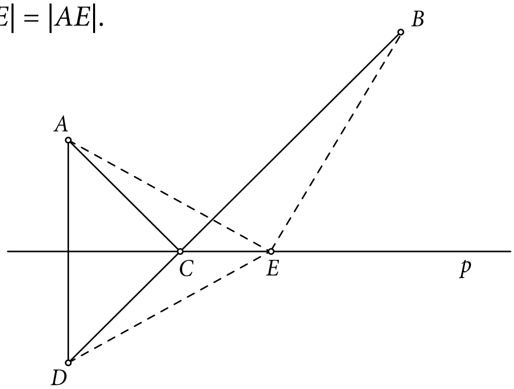
Primjer 4. Mjesta A i B nalaze se na istoj strani i na različitim udaljenostima od rijeke čiji je tok u tom dijelu potpuno ravan. Konjanik mora žurno odnijeti poruku iz mjesta A u mjesto B. Međutim, konj je žedan pa bez vode ne bi mogao prijeći cijeli put od A do B. Na kojemu mjestu na rijeci konjanik mora napojiti konja da bi, u najkraćem vremenu, prešao cijeli put?

Zadatak, izražen matematičkim jezikom, možemo formulirati ovako.

Zadan je pravac p i točke A i B s iste strane pravca. Na pravcu p treba odrediti točku C tako da zbroj $|AC| + |CB|$ bude najmanji.

Rješenje: Neka je D točka simetrična točki A s obzirom na pravac p, a točka C sjecište pravaca p i DB. Ako je E bilo koja druga točka pravca p, vrijedi $|DC| = |AC|$ i $|DE| = |AE|$.

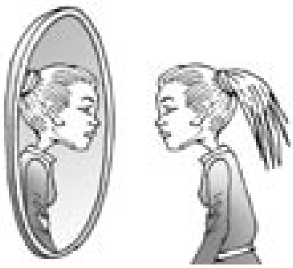


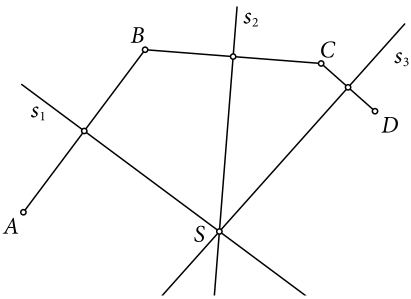


Koristimo li pravilo o nejednakosti stranica trokuta, dobit ćemo: $|AC| + |CB| = |DC| + |CB| = |DB| < |DE| + |EB| = |AE| + |EB|$, tj. $|AC| + |CB| < |AE| + |EB|$. Odavde zaključujemo da je tražena točka upravo ovako određena točka C.

Primjer 5. Zadane su različite točke A, B, C i D. Koji uvjet moraju zadovoljavati te točke da se simetrale dužina $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ sijeku u jednoj točki?

Rješenje: Simetrale navedenih dužina označimo redom s_1, s_2, s_3. Pretpostavimo da se te simetrale sijeku u jednoj točki koju označimo s S, kao na slici.





Poznato je da je svaka točka simetrale dužine jednako udaljena od rubnih točaka te dužine. Zato je $|SA| = |SB|$, $|SB| = |SC|$ i $|SC| = |SD|$, tj. $|SA| = |SB| = |SC| = |SD|$. Iz ovoga zaključujemo da, uz zadani uvjet, točke A, B, C i D moraju biti na kružnici sa središtem u točki S.

Vrijedi i obrat tvrdnje. To je poznata činjenica: simetrala svake tetive kružnice prolazi središtem kružnice.

Primjer 6. Zadane su točke $A(-3, 4)$ i $B(5, 6)$. Odredimo središte simetrije, točku C, koja točki A pridružuje točku B.

Rješenje: Središte simetrije je polovište dužine $\overline{AB}$. Koordinate točke C su $x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-3+5}{2} = 1$ i $y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{4+6}{2} = 5$, dakle $C(1, 5)$.

Primjer 7. Zadane su točke $A(2, -3)$ i $C(-1, 2)$. Odredimo koordinate točke B simetrične točki A s obzirom na točku C.

Rješenje: Točka C je polovište dužine $\overline{AB}$. Zato je $x_C = \frac{x_A + x_B}{2}$ i $y_C = \frac{y_A + y_B}{2}$. Odavde je $-1 = \frac{2 + x_B}{2}$, tj. $x_B = -4$ i $2 = \frac{-3 + y_B}{2}$, tj. $y_B = 7$. Dakle, B(−4, 7).

Primjer 8. Zadane su točke $A(-3, -2)$, $B(-1, 3)$ i $C(1, 1)$.

a) Odredimo rubne točke dužine $\overline{MN}$ koja je simetrična dužini $\overline{AB}$ s obzirom na točku C.

b) Provjerimo da dužine $\overline{AB}$ i $\overline{MN}$ imaju jednake duljine.

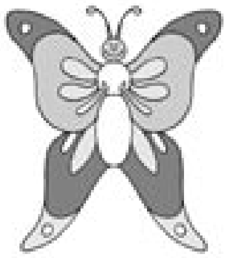
c) Provjerimo da su polovišta dužina $\overline{AB}$ i $\overline{MN}$ simetrična s obzirom na točku C.

Rješenje:

a) Postupamo kao u prethodnim zadatcima pa dobijemo $M(5, 4)$ i $N(3, -1)$.

b) Izračunamo udaljenosti pa dobijemo $|AB| = |MN| = \sqrt{29}$.

c) Točka C je polovište dužine kojoj su rubne točke polovišta dužina $\overline{AB}$ i $\overline{MN}$.



Primjer 9. U koordinatnoj ravnini zadana je točka $A(-3, -4)$. Točka B simetrična je točki A s obzirom na os ordinata, točka C simetrična je točki A s obzirom na ishodište koordinatnog sustava, a točka D simetrična je točki A s obzirom na os apscisa. Odredimo koordinate tih točaka. Izračunajmo opseg i površinu četverokuta $ABCD$.

Rješenje: Nacrtajte sliku. Koordinate točaka su: $B(3, -4)$, $C(3, 4)$ i $D(-3, 4)$. Četverokut $ABCD$ je pravokutnik duljina stranica 6 i 8. Odatle je $o = 28$ i $p = 48$.

Primjer 10. Zadan je pravac p jednadžbom $y = \frac{1}{2}x$ i točka $A(3, 4)$.

a) Odredimo na pravcu p točku S koja je najbliža točki A.

b) Odredimo točku B koja je simetrična točki A s obzirom na pravac p.

Rješenje:

a) Svaka točka pravca p ima koordinate $\left(x, \frac{x}{2}\right)$.

Zato je $|SA|^2 = (x-3)^2 + \left(\frac{x}{2} - 4\right)^2$. Odavde, nakon sređivanja, dobivamo $|SA|^2 = \frac{5}{4}(x-4)^2 + 5$. Budući da je $(x-4)^2 \geq 0$, zaključujemo da se najmanja vrijednost od $|SA|^2$, a time i najmanja vrijednost od $|SA|$, dobiva ako je $x = 4$. Zato je tražena točka $S(4, 2)$.

b) Po definiciji osne simetrije, točka S je polovište dužine $\overline{AB}$. Zato je $B(5, 0)$.