

ZANIMLJIVI PAROVI BROJEVA

Željko Brčić, Vinkovci

Za neke parove dvoznamenkastih prirodnih brojeva vrijedi da im se umnožak ne mijenja ako im znamenke zamijene mjesta. Primjerice, to vrijedi za brojeve 13 i 93, jer je $13 \cdot 93 = 31 \cdot 39 = 1209$.

Ima li još takvih parova brojeva? Koliko ih ukupno ima? Koji su to brojevi? Kako ih sve naći?

Riješimo, dakle, sljedeći zadatak:

Odredite sve parove dvoznamenkastih prirodnih brojeva čiji se umnožak ne mijenja ako brojevima zamijenimo redoslijed znamenaka.

Ako znamenke prvoga broja označimo s a i b , a drugoga s c i d , tada se traženo svojstvo matematički može zapisati kao:

$$\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{ba} \cdot \overline{dc} \quad (1)$$

odnosno $(10a + b) \cdot (10c + d) = (10b + a) \cdot (10d + c)$. Sredimo li tu jednakost, dobit ćemo:

$$\begin{aligned} 100ac + 10ad + 10bc + bd &= 100bd + 10bc + 10ad + ac \\ 100ac + bd &= 100bd + ac, \\ 99ac &= 99bd \\ ac &= bd. \end{aligned} \quad (2)$$

Pokazali smo da permutirani dvoznamenkasti brojevi imaju isti umnožak (1) ako za njihove znamenke vrijedi jednadžba (2). To je jednadžba s četiri nepoznanice koja, u općem slučaju, ima beskonačno mnogo rješenja, ali ako znamo da su sve četiri nepoznanice znamenke (od 1 do 9), broj rješenja je konačan te ih možemo odrediti.

Postoje razni načini kako to učiniti, a u ovom članku koristit ćemo razlomke.

Jednakost (2) napišimo u ovom obliku:

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{c}. \quad (3)$$

Pogledajmo prvo što se događa ako uzmemo da je $a = b$. Razlomak $\frac{3}{3}$ (primjerice) ima vrijednost 1, pa tada i s druge strane mora biti razlomak iste vrijednosti, odnosno s jednakim brojnikom i nazivnikom.



Izbor $\frac{3}{3} = \frac{5}{5}$ (primjerice), vodi nas do „rješenja” $33 \cdot 55 = 33 \cdot 55$.

Uočavamo da se zamjenom (jednakih) znamenaka ne mijenja umnožak jer se ne mijenjaju niti sami brojevi. Naravno, sve bi to vrijedilo i da smo, umjesto 3 i 5, uzeli bilo koje druge dvije znamenke. Očito se radi o trivijalnim kombinacijama koje nećemo smatrati rješenjem našega problema.

Pretpostavimo sada da s obje strane jednakosti (3) piše isti razlomak, ne samo po vrijednosti, nego i po obliku, recimo: $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$. Ako se vratimo do jednakosti (1), to bi značilo da je $13 \cdot 31 = 31 \cdot 13$. Niti to nećemo smatrati pravim rješenjem jer smo zamjenom znamenaka dobili iste brojeve koji su samo zamijenili mjesta.

Dogovorimo se još nešto. Na samom početku teksta navedeni su brojevi 13 i 93, kao jedno rješenje našega problema. No, ako par 13 i 93 zadovoljava uvjet zadatka, onda su rješenja i parovi brojeva 31 i 39, 93 i 13, te 39 i 31. Od takva četiri para, za rješenje možemo uzeti primjerice brojeve 13 i 93, dok se ostala tri para smatraju samo različitim varijantama istoga rješenja. Izabrali smo, dakle, par u kojemu je znamenka a najmanja.

Iz svega do sada rečenog, može se zaključiti da u jednakosti (3) razlomak $\frac{a}{b}$ mora biti pravi razlomak (znamenka a je najmanji broj, a znamenka b je veća od nje). S druge strane, razlomak $\frac{d}{c}$ dobijemo proširivanjem razlomka $\frac{a}{b}$ (vrijednost razlomaka mora biti ista, ali im se brojnici i nazivnici ne smiju podudarati).

Mogućnost izbora vrijednosti za sve četiri znamenke a , b , c i d . Sada smo dovoljno suzili, pa možemo krenuti u otkrivanje „pravih” rješenja.

Proširimo prvo razlomak $\frac{1}{2}$, pazeći da brojevi ne postanu dvoznamenkasti:

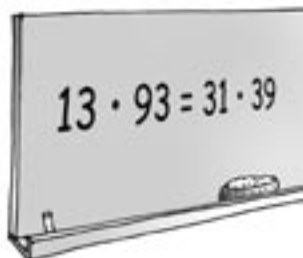
$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}.$$

Od ta četiri razlomka možemo dobiti šest jednakosti oblika (3), a svaka nas vodi do jednog rješenja početnog problema. Vrijedi:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}, \frac{1}{2} = \frac{3}{6}, \frac{1}{2} = \frac{4}{8}, \frac{2}{4} = \frac{3}{6}, \frac{2}{4} = \frac{3}{8} \text{ i } \frac{3}{6} = \frac{4}{8}.$$



Zapišimo te jednakosti u obliku (1) i napravimo provjeru. Imamo:



$$12 \cdot 42 = 21 \cdot 24 = 504$$

$$12 \cdot 63 = 21 \cdot 36 = 756$$

$$12 \cdot 84 = 21 \cdot 48 = 1008$$

$$24 \cdot 63 = 42 \cdot 36 = 1512$$

$$24 \cdot 84 = 42 \cdot 48 = 2016$$

$$36 \cdot 84 = 63 \cdot 48 = 3024$$

Uzmimo zatim razlomak $\frac{1}{3}$. Vrijedi: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{6}{9}$.

Dobili smo nova tri rješenja: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$ i $\frac{2}{6} = \frac{3}{9}$, odakle nalazimo rješenja:

$$13 \cdot 62 = 31 \cdot 26 = 806$$

$$13 \cdot 93 = 31 \cdot 39 = 1209$$

$$26 \cdot 93 = 62 \cdot 39 = 2418$$

Za sljedeći razlomak imamo samo jednu mogućnost: $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$.

Rješenje je:

$$14 \cdot 82 = 41 \cdot 28 = 1148$$

Sljedeći je razlomak $\frac{2}{3}$. Vrijedi: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9}$. Dobili smo nova tri rješenja: $\frac{2}{3} = \frac{3}{6}$, $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ i $\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$. Rješenja su:

$$23 \cdot 64 = 32 \cdot 46 = 1472$$

$$23 \cdot 96 = 32 \cdot 69 = 2208$$

$$46 \cdot 96 = 64 \cdot 69 = 4416$$

Postoji još samo jedna mogućnost: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$.

To nam daje posljednje rješenje:

$$34 \cdot 86 = 43 \cdot 68 = 2924$$

Time smo u potpunosti riješili zadani problem, odnosno dobili smo ukupno 14 parova dvoznamenkastih brojeva čiji se umnožak permutacijom znamenaka ne mijenja.

