VEKTORI

Anđelko Marić, Sinj

U posljednja dva nastavka upoznali smo dva preslikavanja ravnine: simetrije s obzirom na točku i s obzirom na pravac, a potom vrtnju ili rotaciju ravnine.

Ostaje još jedno osnovno preslikavanje ravnine koje zovemo *pomak* ili *translacija*. To preslikavanje ne možemo dobro razumjeti bez poznavanja jednoga važnog pojma koji se zove *vektor*. Zato ćemo se u ovom nastavku malo pobliže, koliko je to dostupno učenicima osnovne škole, upoznati s vektorima.

U povijesti znanosti, vektori se prvotno uvode u fizici, a ne u matematici. Iako su primjene vektora, ne samo u fizici nego i u drugim znanostima, od nenadomjestive važnosti, danas se vektori definiraju kao čisti, apstraktni matematički pojmovi, lišeni bilo kojih fizikalnih obilježja. Stroga matematička definicija vektora prelazi okvire nastave matematike, ne samo osnovne, nego i srednje škole.

Kao uvod u problem, pokažimo za početak da se sa svim veličinama ne računa na isti način. Već za najjednostavniju radnju, zbrajanje, ne vrijede ista pravila za sve veličine. Da to pokažemo, promotrimo dva jednostavna primjera.

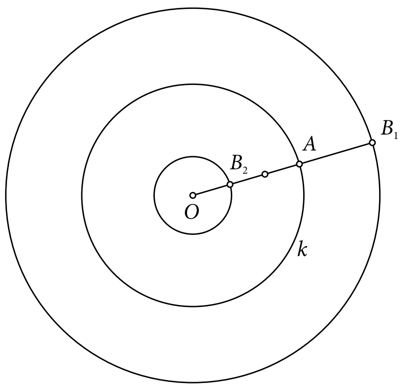
1. Neko tijelo ima početnu temperaturu 0 °C. Temperatura tijela najprije se povisi za 3 °C, a potom još za 2 °C. Koliko je ukupno povećanje temperature tijela?

2. Neko se tijelo nalazilo u točki *O*. Tijelo je najprije prešlo put duljine 3 m, od točke *O* do točke *A*, a potom od točke *A* do točke *B* put duljine 2 m. Koliko se tijelo udaljilo od početne točke *O*?

Pri rješavanju prvog problema nema nikakvih prepreka. Računamo uobičajeno: 3 + 2 = 5 i zaključujemo da je temperatura tijela porasla za 5 °C.

I u drugom primjeru radi se o sličnom problemu. Riječ je o zbrajanju dviju istovrsnih veličina (puta) duljina 3 m i 2 m. Međutim, ako bismo brzopleto odgovorili da je konačna udaljenost tijela od točke *O* jednaka 5 m, zaključak bi bio pogrešan.

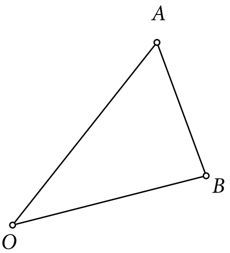
Pojasnimo to uz pomoć ove slike.



Već prvim podatkom da je udaljenost točke A od točke O jednaka 3, to jest $|OA| = 3$, položaj točke A nije potpuno određen. Točka A može biti bilo koja točka kružnice k kojoj je središte u točki O, a polumjer duljine 3. Isto se tako iz točke A može doći u bilo koju od točaka B, za koju vrijedi $|AB| = 2$. Naravno, takvih točaka ima beskonačno mnogo.

Sa slike vidimo da je najveća udaljenost točke B od točke O u položaju B_1, a najmanja u položaju B_2 u kojima su točke O, A i B na istome pravcu.

Lako zaključujemo da se točka B nalazi unutar ili na rubu kružnog vijenca koji određuju kružnice sa središtem u točki O, a čiji su polumjeri duljina 1 i 5. To zapisujemo kao $1 \leq |OB| \leq 5$. Naravno, te smo udaljenosti dobili kao $3 - 2 = 1$, odnosno $3 + 2 = 5$.



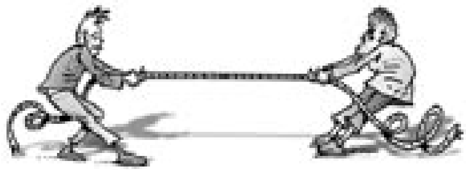
Napomenimo da je ovo u vezi s jednom poznatom činjenicom koju zovemo *nejednakost trokuta.*

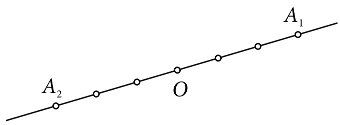
Za bilo koje tri točke ravnine O, A i B vrijedi: $|OA| - |AB| \leq |AB| \leq |OA| + |AB|$, gdje je $|OA| > |OB|$. (Slika na rubu.)

Jednakosti u ovoj nejednakosti vrijede ako su točke O, A i B kolinearne.

Kada smo rekli da se temperatura tijela povećala za 2°C, onda je time ta fizikalna promjena potpuno određena.

Ako se tijelo iz početnog položaja pomaknulo za 3 m, time konačni položaj tijela nije potpuno određen. Neka je početni položaj tijela u točki O. Iz te točke treba pravocrtno prijeći put duljine 3 m, do točke A. Postoji beskonačno mnogo pravaca koji sadrže točku O. Zato najprije treba nacrtati pravac koji prolazi točkama O i A. To se stručno kaže: treba odrediti smjer od O do A. Vidimo da je smjer određen dvjema točkama, to jest određen je pravcem.





Ali, ni time stvar nije gotova: na svakome pravcu koji prolazi točkom O postoje dvije različite točke jednako udaljene od točke O. Na našoj slici to su točke A_1 i A_2, gdje je $|OA_1| = |OA_2| = 3$.

Gibanja od O do A_1 i od O do A_2 su gibanja u istom smjeru, ali sa suprotnim *orijentacijama.* Ovdje treba zapamtiti da se orijentacija definira samo na zadanom smjeru. S pojmom orijentacije već smo se susreli pri uvođenju brojevnog pravca, odnosno koordinatnog sustava na pravcu.

Vidimo da fizikalna realnost pokazuje da, s obzirom na određenost, postoje dvije vrste veličina. U prvu skupinu spadaju veličine koje su određene iznosom ili mjerom, kao što je spomenuta *temperatura*. Mjera veličine je realan broj koji se može predočiti na brojevnom pravcu koji se zove i brojevna *ljestvica.* Zato se takve veličine zovu *skalarne* veličine ili, kraće, *skalari*, što dolazi od latinske riječi *scala, -ae, f.* = ljestvica.

Uz navedenu temperaturu, skalarne veličine su: masa, vrijeme, energija i još neke.

Kako smo vidjeli, veličine iz druge skupine određene su iznosom (duljinom, mjerom), smjerom i orijentacijom. Takve veličine zovemo *vektorske* veličine ili, kraće, *vektori.*

Primjeri vektorskih veličina su: put, sila, brzina, neke električne i druge veličine.

Svaku vektorsku veličinu možemo predočiti posebnom dužinom.

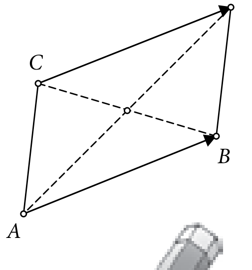
Neka je zadana dužina $\overline{AB}$. Svakoj zadanoj dužini jednoznačno je pridružen broj $|AB|$, to jest *duljina* pripadnog vektora. Svaka dužina pripada nekom pravcu, zbog čega je time određen i pripadni *smjer.*

Svaka dužina $\overline{AB}$ može se orijentirati na dva načina: od *A* prema *B*, ili od *B* prema *A*. U prvom slučaju točka *A* je *početna*, *B završna točka* vektora, a u drugom je slučaju obratno. Pri tome smo dobili dva vektora koje označavamo kao $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$. Ova dva vektora imaju jednake duljine, isti smjer i suprotne orijentacije. Zato se ovakva dva vektora zovu međusobno *suprotni* vektori, što zapisujemo kao $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Za potrebe nastave matematike za niži uzrast kažemo da vektore predočavamo *orijentiranim dužinama.* Ovako definiran pojam vektora, kao orijentirane dužine, omogućuje nam da lakše razumijemo svojstva i odnose među vektorima, a isto nam tako čini razumljivijim računanje s vektorima. Isto tako, vektor treba shvatiti kao cjelinu, a ne kao skup točaka. Zato je besmisleno reći da *točka C* pripada vektoru $\overrightarrow{AB}$, ili da se dva vektora sijeku u nekoj točki.

Iz svega slijedi definicija jednakosti dvaju vektora: dva su vektora jednaka ako imaju jednake duljine, isti smjer i istu orijentaciju. Ovdje moramo paziti na pravilno izražavanje.

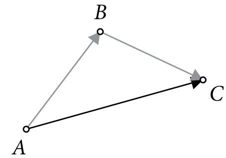
Duljine vektora su realni nenegativni brojevi i mogu biti jednaki ili različiti. **Smjer** vektora $\overrightarrow{AB}$ određen je pravcem *AB*, pri čemu usporedni pravci imaju isti smjer. Zato dva vektora mogu imati isti ili različiti smjer. **Orijentacija** vektora definira se za zadani smjer. Zato dva vektora koji imaju isti smjer mogu imati istu ili suprotnu orijentaciju.



Na slici su nacrtani jednaki vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$. Iz svega navedenoga zaključujemo: ako su vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ jednaki, to jest ako je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, onda je četverokut *ABDC* paralelogram. Znamo da dijagonale svakog paralelograma imaju zajedničko polovište. Ovo vrijedi i u slučaju ako paralelogram degenerira u dužinu. Zato možemo izreći i ovu definiciju jednakosti dvaju vektora:

Vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ jednaki su samo ako dužine $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ imaju zajedničko polovište. Vrijedi i obrat.

Neka su A, B i C bilo koje tri točke ravnine. Promatrajmo vektore $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{AC}$. Podsjetimo se da je vektor određen početnom i završnom točkom.

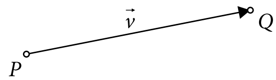


Dva gibanja - od A do B i od B do C - možemo nadomjestiti jednim gibanjem od A do C, to jest zajedničko djelovanje vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ možemo nadomjestiti vektorom $\overrightarrow{AC}$. To zapisujemo kao $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. Ova jednakost uzima se za pravilo zbrajanja dvaju vektora i zove se *pravilo trokuta.*

Definirajmo još jedan važan vektor.

Neka su početna i završna točka vektora jedna te ista točka, na primjer kao za vektor $\overrightarrow{AA}$. Duljina tog vektora jednaka je $|AA| = 0$. Zato se svaki takav vektor zove *nulvektor* i označava kao $\vec{0}$. Treba razlikovati oznake 0 i $\vec{0}$. Prva je broj, a druga vektor. Svi nulvektori su međusobno jednaki, to jest $\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}$, za svake dvije točke A i B. Smjer i orijentacija nulvektora se ne definiraju.

Vektori se, osim dvama velikim slovima i strelicom, označavaju i jednim malim slovom sa strelicom.



Tako smo na ovoj slici vektor $\overrightarrow{PQ}$ označili kao $\vec{v}$, to jest $\overrightarrow{PQ}=\vec{v}$.

Već smo naveli da za svaki vektor $\overrightarrow{PQ}$ vrijedi $\overrightarrow{QP}=-\overrightarrow{PQ}$, to jest, ako je $\overrightarrow{PQ}=\vec{v}$, onda je $\overrightarrow{QP}=-\vec{v}$. Odavde je $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{PP}=\vec{0}$, ili $\vec{v}+(-\vec{v})=\vec{0}$. Dakle, zbroj dvaju suprotnih vektora je nulvektor. Isto je tako zbroj bilo kojeg vektora i nulvektora jednak tom vektoru. Zaista: $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QQ}=\overrightarrow{PQ}$ ili $\vec{v}+\vec{0}=\vec{v}$.

Na kraju ćemo riješiti nekoliko primjera.

Primjer 1. Točke A, B, C i D su vrhovi, a točka S sjecište je dijagonala paralelograma. Odredimo sve parove jednakih vektora određenih po dvjema od tih pet točaka.

Rješenje. Nacrtajmo sliku i očitajmo parove jednakih vektora. To su:

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}\right)$, $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}\right)$, $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}\right)$, $\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{CB}\right)$, $\left(\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{SC}\right)$,

$\left(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{CS}\right)$, $\left(\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{SD}\right)$ i $\left(\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{DS}\right)$.

Primjer 2. Dokažimo da za vektore stranica bilo kojeg

a) trokuta ABC vrijedi: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.

b) četverokuta $DEFG$ vrijedi: $\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

c) peterokuta $HKLMN$ vrijedi: $\overrightarrow{HK}+\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{LM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NH}=\vec{0}$.

Rješenje.

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

b) $\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{DD}=\vec{0}$.

c) $\overrightarrow{HK}+\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{LM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NH}=\overrightarrow{HL}+\overrightarrow{LN}+\overrightarrow{NH}=\overrightarrow{HN}+\overrightarrow{NH}=\overrightarrow{HH}=\vec{0}$.

Primjer 3. Dokažimo: ako je $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, onda je $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

Rješenje. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD} \Rightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

Geometrijsko značenje ovog zadatka:

Ako je $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, onda je četverokut $ABCD$ paralelogram. Zato je AD usporedno s BC i $|AD| = |BC|$, a zbog toga slijedi da je $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

Primjer 4. Neka je $ABCD$ bilo koji paralelogram i S bilo koja točka. Dokažimo da vrijedi: $\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{AB}$.

Rješenje.

$$\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{DS}=\left(\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SB}\right)+\left(\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{SC}\right)$$
$$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AB}$$

Primjer 5. Neka je $ABCDE$ bilo koji peterokut. Dokažimo da vrijedi:

$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{CD}.$$

Rješenje.

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$,

a iz ovih dviju jednakosti neposredno slijedi tvrdnja $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{CD}$.

Primjer 6. Vektor $\vec{a}=\overrightarrow{EF}$ napišimo kao zbroj triju vektora kojima su početne točke E, G i H.

Rješenje. $\vec{a}=\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HF}$.

Primjer 7. Odredimo početnu i završnu točku vektora $\vec{y}=\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{LK}+\overrightarrow{MP}-\overrightarrow{ML}+\overrightarrow{QR}$.

Rješenje. $\vec{y}=\left(\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{LM}\right)+\left(\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PQ}\right)+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{KQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{KR}$.

Početna točka promatranog vektora je K, a završna je točka R.

Primjer 8. Zadani su vektori $\vec{x}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DE}$ i $\vec{y}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{ED}-\overrightarrow{FE}-\overrightarrow{BA}$. Dokažimo da vrijedi $\vec{x}=\vec{y}$.

Rješenje.

$\vec{x}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}$, $\vec{y}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}$.

Zaključujemo da je $\vec{x}=\vec{y}$.