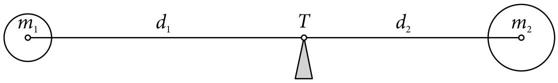
KLACKALICA JE POLUGA

Petar Mladinić, Zagreb

U ovom ćemo članku pojam klackalice u ravnoteži uporabiti u rješavanju nekoliko matematičkih problema. Zakon poluge prvi je formulirao **Arhimed** (278. - 212. g. pr. K.). Vrlo ga je domišljato i uspješno primijenio u matematici.



Slika 1.

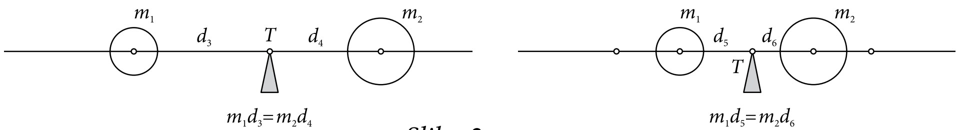
Klackalica je u ravnoteži kad je

$$m_1 \cdot d_1 = m_2 \cdot d_2,$$

gdje su m_1 i m_2 mase djece koja se klackaju, a d_1 i d_2 su udaljenosti djece od središta ravnoteže. Točka T na koju se upire klackalica njezino je središte ravnoteže ili težište (v. sl.). Klackalica će ostati u ravnoteži dok god su umnošci mase i udaljenosti (lijeve i desne strane klackalice) do težišta klackalice međusobno jednaki.

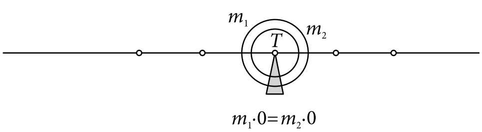
Djeca se mogu jedno drugome primicati po klackalici, a da ona ostane u ravnoteži. To znači da su umnošci mase i udaljenosti od uporišta T jednaki sa svake strane klackalice.

Razmotrimo ovo primicanje (v. sl.).

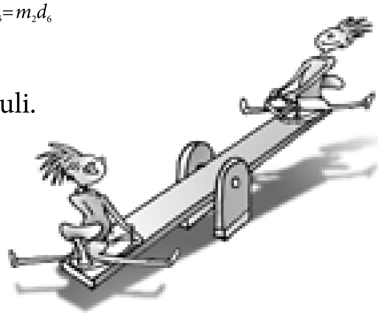


Slika 2.

Kad obje mase «padnu” u težište T, udaljenosti su jednake nuli. I u ovom je slučaju klackalica u ravnoteži!



Slika 3.



Iz ovoga možemo zaključiti da se klackalica koja je u ravnoteži može predočiti i s težištem u kojem su obje mase.

Prije ilustriranja kako se klackalica može primijeniti u geometriji, razjasnimo što je težište dužine, a što težište trokuta. Geometrijski gledano, težište dužine je njezino polovište. Ako se dužina zamisli kao klackalica, onda je to točka na koju se upire klackalica u ravnoteži kad se stave jednake mase na njezinim krajevima. Dakle, da bismo odredili težište dužine, shvatimo dužinu kao klackalicu. U krajnjim točkama stavimo joj mase od 1 kg. Tada za dužinu $\overline{AB}$ vrijedi

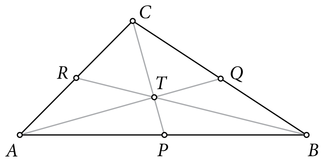
$$1 \cdot |AT| = 1 \cdot |BT|,$$

odnosno

$$|AT| = |BT|.$$

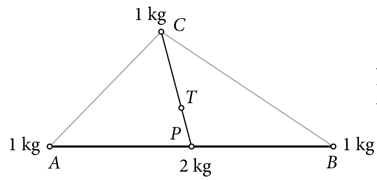
Odavde zaključujemo da je točka T polovište dužine $\overline{AB}$.

Težište trokuta je sjecište težišnica trokuta i dijeli svaku težišnicu u omjeru 2 : 1, računajući od vrha trokuta. Težišnica trokuta je dužina koja spaja polovište stranice trokuta i nasuprotni vrh.



Slika 4.

Da bismo odredili težište trokuta, zamislimo da se u svakom vrhu trokuta ABC nalazi masa od 1 kg.



Slika 5.

Klackalica „$\overline{AB}$" s masama od 1 kg zamjenjuje se težištem P i ukupnom masom 2 kg. Sad točke P i C definiraju novu klackalicu s masama 2 kg i 1 kg.

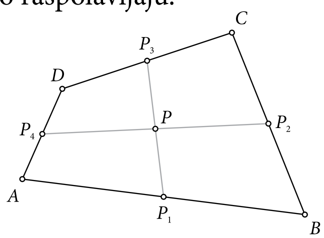
Težište T, tj. središte ravnoteže dvostruko je bliže točki P nego točki C. Odavde zaključujemo da točka T dijeli dužinu $\overline{CP}$ u omjeru 2 : 1 jer vrijedi

$$1 \cdot |CT| = 2 \cdot |TP|,$$

$$\frac{|CT|}{|TP|} = \frac{2}{1}.$$

Na isti način, ako pođemo od dužine $\overline{BC}$ ili $\overline{AC}$, dobili bismo da središte ravnoteže dijeli spojnicu polovišta dužine i nasuprotnog vrha trokuta, tj. težišnicu, u omjeru 2 : 1, računajući od vrha trokuta. Možemo zaključiti da se, geometrijski shvaćeno, polovište dužine, kao i težište trokuta, mogu dobiti primjenom zakona poluge.

Primjer 1. Dokažimo da se dužine koje spajaju polovišta suprotnih stranica četverokuta međusobno raspolavljaju.

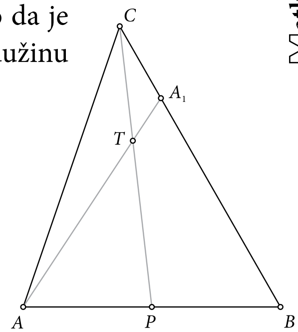


Slika 6.

Rješenje: Stavimo li u vrhove A, B, C i D mase od 1 kg, onda će točke P_1 i P_3 biti polovišta dužina $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. Dužine $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ s masama od 1 kg na krajevima zamjenjuju se polovištima P_1 i P_3 u kojima su mase od 2 kg. Zaključujemo da je točka P polovište dužine $\overline{P_1P_3}$ jer su točkama P_1 i P_3 jednake mase.

Na isti se način dobiva da je točka P polovište dužine $\overline{P_2P_4}$.

Primjer 2. Na stranici $\overline{BC}$ trokuta ABC nacrtana je točka A_1 tako da je $|BA_1| : |A_1C| = 3 : 1$. U kojem omjeru težišnica nacrtana iz vrha C dijeli dužinu $\overline{AA_1}$, a u kojem omjeru dužina $\overline{AA_1}$ dijeli težišnicu $\overline{CP}$?



Slika 7.

Rješenje: Neka je P polovište dužine $\overline{AB}$, a točka T sjecište težišnice $\overline{CP}$ s dužinom $\overline{AA_1}$. U vrhovima A i B nalaze se jednake mase 1 kg (jer je točka P polovište). Točka A_1 je težište dužine $\overline{BC}$ samo u slučaju kad je u točki C masa tri puta veća nego u točki B. Dakle, u točki C nalazi se masa 3 kg. Točka A_1 zamjenjuje dužinu $\overline{BC}$ s masama 1 kg i 3 kg. U njoj je masa 4 kg. Kako se u točki A nalazi masa 1 kg, onda točka T, da bi klackalica „ $\overline{AA_1}$ ” bila u ravnoteži, dijeli dužinu $\overline{AA_1}$ u omjeru 4 : 1, računajući od vrha A, tj. vrijedi

$$1 \cdot |AT| = 4 \cdot |TA_1|,$$

odnosno

$$|AT| : |TA_1| = 4 : 1.$$

Na sličan se način dobiva da točka T dijeli težišnicu $\overline{CP}$ u omjeru 3 : 2, računajući od vrha C.

Vjerujemo da ćete uspješno riješiti sljedeće probleme.

Zadatci.

1. Neka je P polovište stranice $\overline{AB}$ trokuta ABC. Točka E dijeli stranicu $\overline{BC}$ u omjeru 1 : 2, računajući od vrha B, a točka F stranicu $\overline{CA}$ u omjeru 1 : 3, računajući od vrha C. U kojem omjeru težišnica $\overline{CP}$ dijeli dužinu $\overline{EF}$?

2. Zadan je trokut ABC. Neka je P polovište njegove težišnice nacrtane iz vrha C. Dokažite da pravac AP odsijeca od stranice $\overline{BC}$ jednu njezinu trećinu.

3. Ako su A_1, B_1, C_1 točke redom na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ trokuta ABC takve da se dužine $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ i $\overline{CC_1}$ sijeku u istoj točki P, onda vrijedi

$$\frac{|AP|}{|PA_1|} = \frac{|AC_1|}{|C_1B|} + \frac{|AB_1|}{|B_1C|}.$$

4. Neka je S sjecište srednjica četverokuta, a P_1 i P_2 polovišta njegovih dijagonala. Dokažite da točke P_1, P_2 i S pripadaju istom pravcu, tj. da su kolinearne, i da je S polovište dužine $\overline{P_1P_2}$.