

# NEMOGUĆE STUBE

Nikola Novosel, Netretić

Nastavak iz *Matke* 77.

Na slikama 10. i 11. su *nemoguće stube*, najintragantniji primjer *nemogućih iluzija*.



Slika 10.

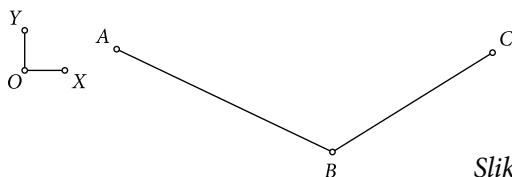


Slika 11. Lionel i Roger Penrose, 1958.

## Primjer 2.

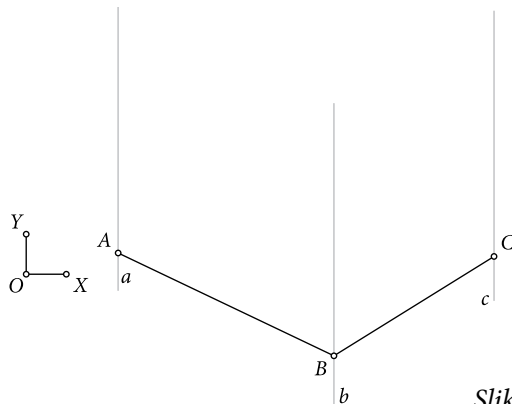
Nacrtajmo *sketcholuziju* prema *iluziji* sa slike 11.

*Korak 1.* Nacrtajmo dužine  $\overline{AB}$  i  $\overline{BC}$  (imaju zajednički vrh, ali veličina kuta što ga zatvaraju te dvije dužine različita je od  $90^\circ$ ) i dvije međusobno okomite dužine  $\overline{OX}$  i  $\overline{OY}$ , slika 12.



Slika 12.

*Korak 2.* Točkama A, B i C nacrtajmo pravce  $a$ ,  $b$ ,  $c$  usporedne s dužinom  $\overline{OY}$  (označimo točke i dužinu pa u izborniku *Konstrukcije* odaberimo naredbu *Paralelni pravci*), slika 13.



Slika 13.

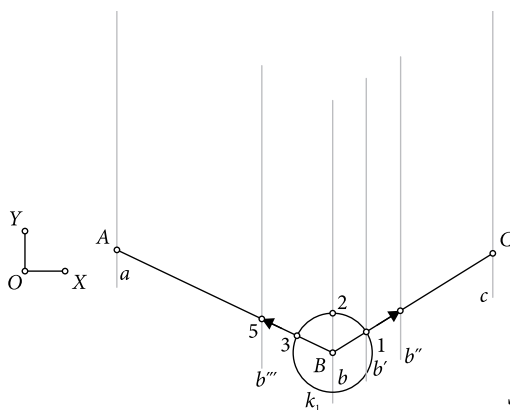


**Korak 3.** Označimo točku  $B$  i dužinu  $\overline{OX}$  pa u izborniku *Konstrukcije* odaberimo naredbu *Kružnica: središte + polumjer*. Nacrtali/konstruirali smo kružnicu  $k_1$ . Kružnica  $k_1$  siječe dužinu  $\overline{BC}$  u točki 1, dužinu  $\overline{AB}$  u točki 3, a pravac  $b$  u točki 2.

**Korak 4.** Označimo točke  $B$  i 1 pa u izborniku *Transformacije* odaberimo naredbu *Označite vektor*. Označimo pravac  $b \rightarrow$  *Transformacije*  $\rightarrow$  *Translatirajte*  $\rightarrow b' \rightarrow$  *Transformacije*  $\rightarrow$  *Translatirajte*  $\rightarrow b''$  (konstrukciju smo mogli provesti klasično crtanjem/konstruiranjem pomoćnih kružnica i usporednih pravaca).

**Korak 5.** Označimo točke  $B$  i 3 pa u izborniku *Transformacije* odaberimo naredbu *Označite vektor*. Označimo točku 3 i translirajmo za označeni vektor  $\overline{B3}$  u točku 5.

**Korak 6.** Označimo točke  $B$  i 5 pa u izborniku *Transformacije* odaberimo naredbu *Označite vektor*. Pravac  $b$  translirajmo za označeni vektor  $\overline{B5}$  u pravac  $b'''$ , slika 14. (**Napomena:** pravac  $b$  mogli smo translirati i za  $2 \overline{B3}$ ).



Slika 14.

**Korak 7.** Točkom 2 konstruirajmo pravac  $d$  usporedan s dužinom  $\overline{AB}$ . (označimo točku 2 i dužinu  $\overline{AB}$ , u izborniku *Konstrukcije* odaberimo naredbu *Paralelni pravci*). Pravci  $a$  i  $d$  sijeku se u točki  $D$ , a pravci  $d$  i  $b'''$  sijeku se u točki  $F$ .

**Korak 8.** Točkama  $A$  i  $D$  nacrtajmo/konstruirajmo pravce  $m$  i  $m'$  usporedne s dužinom  $\overline{BC}$  (slično kao u *Koraku 7.*).

**Korak 9.** Označimo točke  $B$  i 2 pa u izborniku *Transformacije* odaberimo naredbu *Označite vektor*. Točku 2 translirajmo za označeni vektor  $\overline{B2}$  u točku  $E$ , ili nacrtajmo/konstruirajmo pomoćnu kružnicu  $k_2$  ( $2, |B2|$ ). Kružnica  $k_2$  i pravac  $b$  sijeku se u dvije točke  $B$  i  $E$ .

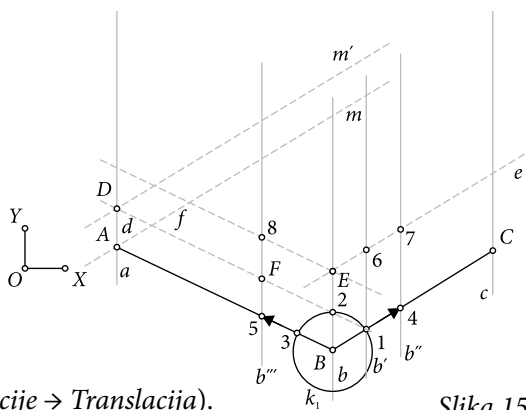
**Korak 10.** Točkom  $E$  nacrtajmo pravce  $e$  i  $f$  usporedne s dužinom  $\overline{BC}$  odnosno  $\overline{AB}$ .



**Korak 11.** Pravac  $e$  siječe redom pravce  $b', b''$  u točkama 6 i 7; odnosno pravac  $f$  siječe pravac  $b'''$  u točki 8, slika 15.

**Korak 12.** Točkama 6 i 7 nacrtajmo pravce  $f$  i  $f''$  usporedne s  $\overline{AB}$  (klasično ili translacijom za vektor  $\overline{67}$ ).

**Korak 13.** Za vektor  $\overline{B3}$  translirajmo pravac  $e$  i točku 6 u pravac  $e'$  i točku 6' (označimo točke  $B$  i 3 i u izborniku *Transformacije* odaberimo naredbu *Označite vektor*; označimo pravac i točku  $\rightarrow$  *Transformacije*  $\rightarrow$  *Translacija*).



Slika 15.

**Korak 14.** Pravac  $e'$  i  $f'''$  sijeku se u točki 7', slika 16.

**Korak 15.** Za vektor  $\overline{B2}$  translirajmo pravce  $e$  i  $e'$  u pravce  $e''$  i  $e'''$ , te točke 7 i 7' u  $G$  i  $H$ , slično kao u *Koraku* 13.

**Korak 16.** Pravci  $c$  i  $e''$  sijeku se u točki  $I$ .

**Korak 17.** Pravci  $m$  i  $f$  sijeku se u točki  $K$ ; pravci  $m'$  i  $f'$  u točki  $L$  odnosno pravci  $f$  i  $m$  sijeku se u točki  $M$ .

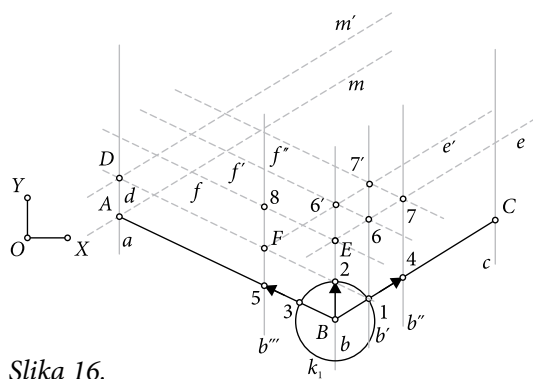
**Korak 18.** Za vektor  $\overline{2B}$  translirajmo točku  $K$  i pravac  $m$  u točku  $K'$  i pravac  $m''$ , slično kao u *Koraku* 13 (usporedi translaciju s translacijom u *Koraku* 15).

**Korak 19.** Točkom  $I$  nacrtamo pravac  $p$  usporedan s dužinom  $\overline{AB}$  (označimo točku i dužinu  $pa$  u izborniku *Konstrukcije* odaberimo naredbu *Usporedni pravci*). Pravci  $p$  i  $m$  sijeku se u točki  $N$ .

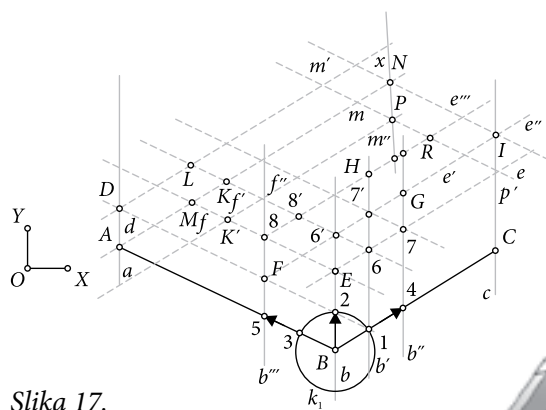
**Korak 20.** Pravac  $p$  translirajmo za vektor  $\overline{1B}$  u pravac  $p'$ .

**Korak 21.** Pravci  $m''$  i  $p'$  sijeku se u točki  $P$ , a pravci  $e'''$  i  $p'$  u točki  $R$ .

**Korak 22.** Točkama  $N$  i  $P$  nacrtajmo pravac  $x$ . Pravci  $x$  i  $e'''$  sijeku se u točki  $V$ , slika 17.



Slika 16.

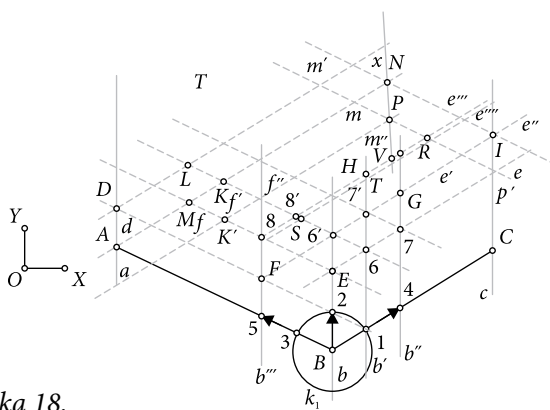


Slika 17.



**Korak 23.** Na dužini  $\overline{OY}$  konstruirajmo točku  $Y_1$ , itd. Vrijedi:  $|OY_1| = \frac{1}{6}|OY|$ . Točku je moguće konstruirati klasičnim dijeljenjem dužine na jednake dijelove ili *Transformacijom – Diletacijom*, tj. primjenjujući *homotetiju*. Dva puta kratko kliknemo na točku  $O$ . Označimo točku  $Y$  i u izborniku *Transformacije* odaberimo naredbu *Diletirajte*, unesimo koeficijent  $\frac{1}{6}$  i potvrdimo transformaciju. Konstruirali smo točku  $Y_1$  s traženim svojstvima (provjeri mjerenjem). Označimo vektor  $\overline{Y_1O}$ . Pravac  $e'''$  translirajmo za označeni vektor u pravac  $e''''$  (slično kao u *Koraku 13.*).

**Korak 24.** Nacrtajmo dužinu  $\overline{H7'}$ . Pravci  $e''''$  i  $b'$  sijeku se u točki  $S$ , odnosno pravac  $e''''$  i dužina  $H7'$  sijeku se u točki  $T$ , slika 18.



Slika 18.

**Korak 25.** Nacrtajmo/konstruirajmo redom dužine  $\overline{AD}$ ,  $\overline{DF}$ ,  $\overline{F8}$ ,  $\overline{88'}$ ,  $\overline{8E}$ ,  $\overline{EB}$ ,  $\overline{E7}$ ,  $\overline{77'}$ ,  $\overline{7'6'}$ ,  $\overline{6'8'}$ ,  $\overline{ST}$ ,  $\overline{7G}$ ,  $\overline{GH}$ ,  $\overline{GI}$ ,  $\overline{IN}$ ,  $\overline{NK}$ ,  $\overline{KL}$ ,  $\overline{KM}$ ,  $\overline{M8}$ ,  $\overline{LD}$ ,  $\overline{KK'}$ ,  $\overline{K'P}$ ,  $\overline{PR}$ ,  $\overline{PV}$ . „Izbrišemo” sve pomoćne dužine, pravce i kružnicu, slika 19.

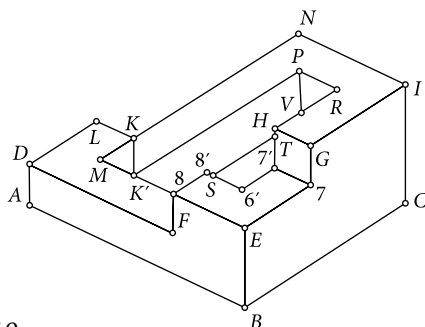
**Korak 26.** Označimo točke  $D$ ,  $F$ ,  $8$ ,  $M$ ,  $K$  i  $L$  pa u izborniku *Konstrukcije* odaberimo naredbu *Unutrašnjost šesterokuta*. Budući da je, prema definiciji, boja unutrašnjosti šesterokuta žuta, dok je označena površina u izborniku *Zaslona*, odaberimo naredbu *Boja*. U ovom slučaju za što bolji efekt preporuča se odabir određene boje i njezino toniranje, primjerice odabir najsvjetlije nijanse sive boje.

**Korak 27.** Konstrukciju iz *Koraka 26.* ponavljamo i za grupe točaka  $8, E, 7, 7', 6' 8'$  te  $K', P, R, H, G, I, N, K$ . Konstruirane unutrašnjosti mnogokuta nalaze se u usporednim ravninama pa su iste nijanse sive boje, tj. najsvjetlije.

**Korak 28.** Označimo točke  $A, D, F, 8, E$  i  $B$  i, kao u *Koraku 26.*, konstruirajmo unutrašnjost šesterokuta čija će boja biti nekoliko nijansi tamnija od boje iz *Koraka 26.*



*Korak 29.* Konstrukciju iz *Koraka 28.* ponavljamo i za grupe točaka  $7, G, H, 7'; V, P, R$ . Konstruirane unutrašnjosti mnogokuta nalaze se u usporednim ravninama pa su iste nijanse sive boje kao u *Koraku 28.*



Slika 19.

*Korak 30.* Označimo točke  $M, K', K$  pa u izborniku *Konstrukcije* odaberimo naredbu *Unutrašnjost trokuta* čija je boja nekoliko nijansi tamnija nego u *Koraku 28.*, tj. najtamnija nijansa sive boje.

*Korak 31.* Konstrukciju iz *Koraka 30.* ponavljamo i za grupe točaka  $B, C, I, G, 7, E; K', 8', S, T, H, P$ . Konstruirane unutrašnjosti poligona nalaze se u usporednim ravninama, pa su najtamnije nijanse sive boje, kao i unutrašnjost poligona, konstruirani u *Koraku 31.*

*Korak 32.* „Izbrišemo” sve dužine i točke. Na slici 109. je *sketcholuzija* nacrtana/konstruirana prema iluziji na slici 11.



Slika 20.

## Literatura:

1. M. Gardner: *The Colossal Book of Mathematics*, W. W. Norton & Company, New York, 2001.
2. N. Radović: *Nemoguće figure*, Matka 14 (2005./ 2006.) 53, 8 – 11.
3. N. Radović: *Nemoguće figure i još malo*, Matka 14 (2005./ 2006.) 54, 94 – 97.
4. N. Radović: *Koktel iluzija*, Matka 15 (2006./ 2007.) 58, 79 – 83.
5. T. Pappas: *The Joy of Mathematics Discovering Mathematics All Around You*, Wide World Publishing/ Tetra, San Carlos, 2006.

## Internetske adrese:

- <http://www.aimsedu.org/puzzle/stairs/stairs2.html/1.07.2011/>

