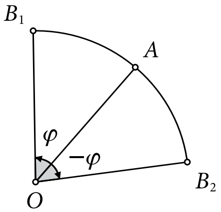
Matka 20 (2011./2012.) br. 77

VRTNJA (ROTACIJA) RAVNINE

Anđelko Marić, Sinj

U prošlom broju pokazali smo kako se osna simetrija i simetrija s obzirom na pravac primjenjuju na neke jednostavne problemske zadatke geometrije ravnine. U ovom nastavku to ćemo isto učiniti s još jednim preslikavanjem ravnine koje se zove *vrtnja, zakretanje* ili *rotacija*. Najprije ćemo definirati, a zatim se ukratko upoznati s osnovnim svojstvima tog preslikavanja.

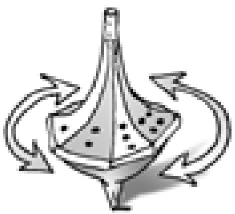


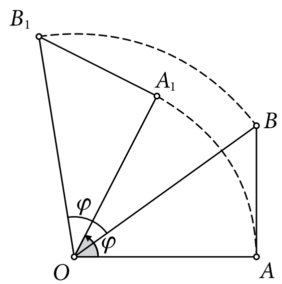
Neka je O zadana čvrsta točka ravnine i A bilo koja točka te ravnine. Preslikavanje ravnine koje točki A pridružuje točku B, tako da je $|OB| = |OA|$ i mjera kuta AOB jednaka zadanom kutu φ, zove se *vrtnja* (zakretanje, rotacija) ravnine oko točke O, za kut φ. Točka O zove se *središte* ili *centar* vrtnje, a kut φ *kut vrtnje.*

Za zadanu točku A i $\varphi = |\angle AOB|$ postoje dvije takve točke B. Na našoj slici to su točke B_1 i B_2.

Zato ovu definiciju treba poboljšati tako ovo preslikavanje bude jednoznačno određeno.

Za svaki kut φ točka B nalazi se na kružnici sa središtem u točki O i polumjera $r = |OA|$. Gibanje po kružnici može se orijentirati na dva načina. Ako se, pri vrtnji, točka A giba kao kazaljka na satu, kažemo da je vrtnja *pozitivno* orijentirana, odnosno da je kut φ pozitivan. Za gibanje suprotne orijentacije kažemo da je pripadni kut negativan i označujemo ga s $-\varphi$, gdje je φ pozitivan broj.





Ako neka vrtnja točki A pridružuje točku A_1, a točki B pridružuje točku B_1, onda ta vrtnja svakoj točki C dužine $\overline{AB}$ pridružuje neku točku C_1 dužine $\overline{A_1B_1}$, pri čemu je $|A_1B_1| = |AB|$. Kažemo da ta vrtnja dužinu $\overline{AB}$ preslikava u sukladnu dužinu $\overline{A_1B_1}$.

Isto tako, vrtnja svaki lik preslikava u sukladni lik.

Vrtnja sa središtem u središtu neke kružnice, za bilo koji kut, preslikava tu kružnicu u samu sebe. Pri tome se svaka točka kružnice preslikava u neku, općenito drugu, točku te kružnice.

Ako vrtnja sa središtem u točki O i kutom φ_1 pridružuje točki A točku B, a vrtnja sa središtem u točki O i kutom φ_2 pridružuje točki B točku C, onda vrtnja sa središtem u točki O i kutom $\varphi_1 + \varphi_2$ točki A pridružuje točku C.

U prostoru se vrtnja definira s obzirom na zadani pravac koji se zove *os vrtnje* (rotacije). Takva vrtnja zadanu crtu preslikava u zakrivljenu plohu. Pomoću tih vrtnja definiraju se posebna tijela koja se zovu *rotacijska tijela.* Takva su tijela, primjerice, valjak, stožac i kugla.

Primjer 1. Zadane su različite točke O i A. Vrtnja sa središtem u O točki A pridružuje točku B. Odredimo kut vrtnje za koji vrijedi:

a) točka B simetrična je točki A s obzirom na O;

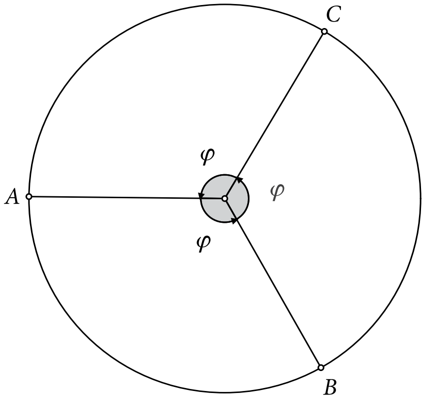
b) točka B podudara se s točkom A.

Rješenje: a) Postoje dva kuta: $\varphi_1 = 180°$, $\varphi_2 = -180°$.

b) Postoje tri kuta: $\varphi_1 = 0°$, $\varphi_2 = 360°$, $\varphi_3 = -360°$.

Primjer 2. Neka je r vrtnja ravnine za kut φ oko točke O. Ta vrtnja točki A pridružuje točku B, što zapisujemo kao $r(A) = B$. Isto je tako $r(B) = C$ i $r(C) = A$. Odredimo pozitivan kut φ tako da je $r(B) = C$ i $r(C) = A$.

Rješenje:

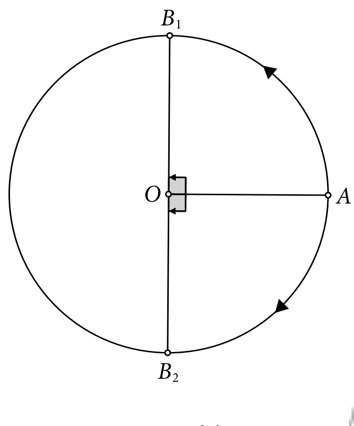


Sa slike vidimo da je:

$$\varphi + \varphi + \varphi = 360°,$$
$$3\varphi = 360°,$$
$$\varphi = 120°.$$

Primjer 3. Vrtnja za kut φ oko točke O pridružuje točki A točku B. Odredimo sve kutove φ za koje je trokut OAB pravokutan.

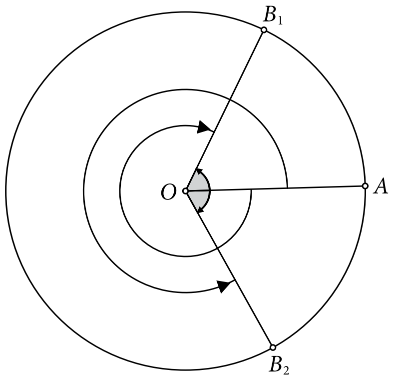
Rješenje: (slika desno)



Za svaki kut φ trokut OAB je jednakokračan jer je $|OA| = |OB|$. Zato trokut može biti pravokutan, s pravim kutom samo pri vrhu O. Postoje dvije točke koje smo na slici označili kao B_1 i B_2. Za svaku od tih točaka postoje po dva kuta. Za točku B_1 to su kutovi $\varphi_1 = 90°$ i $\varphi_2 = -270°$. Za točku B_2 to su kutovi $\varphi_3 = -90°$ i $\varphi_4 = 270°$.

Primjer 4. Zadane su različite točke O i A. Vrtnja sa središtem u O točki A pridružuje točku B. Odredimo sve kutove φ za koje je trokut OAB jednakostraničan.

Rješenje:



Postoje dva takva trokuta, OAB_1 i OAB_2, kao na slici.

Za točku B_1 postoje dva kuta:

$$\varphi_1 = 60° \text{ i } \varphi_2 = -300°.$$

Za točku B_2 postoje dva kuta:

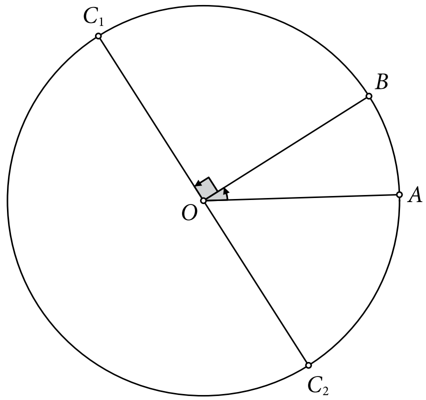
$$\varphi_3 = -60° \text{ i } \varphi_4 = 300°.$$

Primjer 5. Zadane su različite točke O i A. Vrtnja sa središtem u O za kut $\alpha = 20°$ točki A pridružuje točku B. Vrtnja oko iste točke za kut β točki A pridružuje točku C.

a) Dokažimo da trokut OBC može biti pravokutan, s pravim kutom samo pri vrhu O.

b) Odredimo sve kutove β za koje je taj trokut pravokutan.

Rješenje:



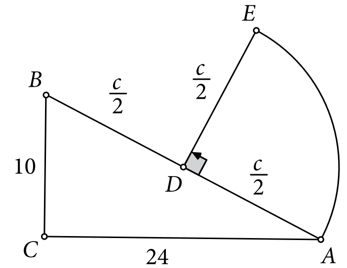
a) Vrijedi $|OB| = |OC|$, zbog čega je trokut OBC jednakokračan. Zato kutovi nasuprot stranicama $\overline{OB}$ i $\overline{OC}$ imaju jednake mjere i ne mogu biti pravi jer trokut ne može imati dva prava kuta. Zato pravi kut može biti samo pri vrhu O.

b) Sa slike vidimo da postoje dva takva trokuta, odnosno da postoje dvije točke koje smo označili s C_1 i C_2. Za svaku od tih dviju točaka postoje dva kuta.

Za C_1 kutovi su $\beta_1 = \alpha + 90° = 110°$ i $\beta_2 = \alpha - 270° = -250°$. Za C_2 traženi kutovi su $\beta_3 = -70°$, $\beta_4 = 290°$.

Primjer 6. Zadan je pravokutan trokut ABC duljina kateta $|BC| = 10$ i $|CA| = 24$. Polovište hipotenuze $\overline{AB}$ je točka D. Vrtnja oko točke D za kut od 90° točku A prevodi u točku E. Izračunajmo površinu trokuta EBD.

Rješenje:

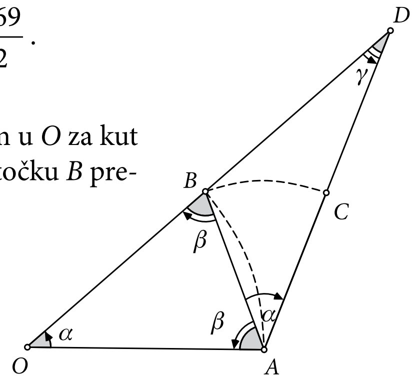


Prema Pitagorinom poučku možemo izračunati duljinu hipotenuze: $|AB| = \sqrt{10^2 + 24^2}, |AB| = 26$. Zato je $|DA| = |DB| = 13$. Prema definiciji vrtnje vrijedi da je $|DA| = |DB| = |DE| = 13$.

Budući da je veličina kuta ADE jednaka 90°, slijedi da je i veličina kuta EDB jednaka 90°. Zato je tražena površina $p = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 13$, tj. $p = \frac{169}{2}$.

Primjer 7. Zadane su različite točke O i A. Vrtnja sa središtem u O za kut $\alpha = 40°$ točki A pridružuje točku B. Vrtnja oko točke A za kut $-\alpha$ točku B prevodi u točku C. Koliki je kut što ga određuju pravci OB i AC ?

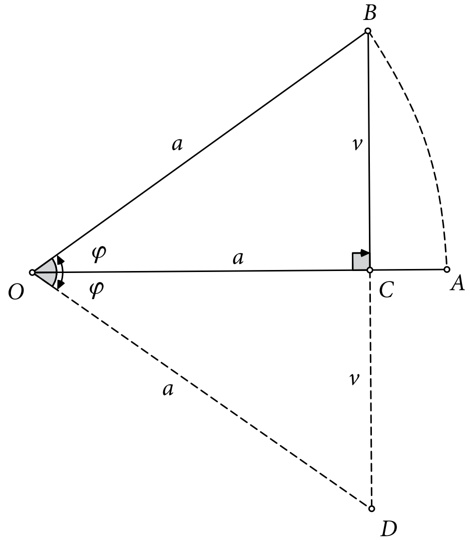
Rješenje: (slika desno)



Sjecište pravaca OB i AC označimo s D. Treba izračunati veličinu kuta $\angle ADO$. Neka je $|\angle ADO| = \gamma$. Trokut AOB je jednakokračan jer je $|OA| = |OB|$, zbog čega je $|\angle OAB| = |\angle ABO| = \beta$. Zbroj veličina kutova trokuta OAB jednak je $\alpha + \beta + \beta = 180°$, odakle je $2\beta = 180° - 40°$, tj. $\beta = 70°$. Zato su veličine kutova trokuta OAD jednake $\alpha, \beta + \alpha$ i γ, tj. 40°, 110° i γ. Zbroj veličina kutova trokuta je 180°, odakle je $\gamma = 30°$.

Primjer 8. Zadane su točke O i A, tako da je $|OA| = a$. Vrtnja sa središtem u O za kut φ točki A pridružuje točku B, tako da je površina trokuta OAB jednaka $\frac{1}{4}a^2$. Izračunajmo veličinu kuta φ.

Rješenje:

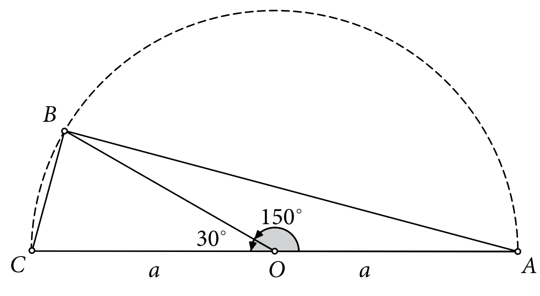


Nožište visine iz vrha A trokuta OAB označimo s C. Udaljenost $|BC| = v$ je visina iz vrha B trokuta OAB. Zato je površina tog trokuta jednaka $p = \frac{1}{2} \cdot a \cdot v$ i vrijedi $\frac{1}{2}av = \frac{1}{4}a^2$, $\frac{1}{2}av = \frac{1}{2}a \cdot \frac{a}{2}$. Odavde je $v = \frac{a}{2}$. Točku simetričnu točki B s obzirom na točku C označimo s D, kao na slici. Tada vrijedi da je $|CD| = |BC| = v$.

Za duljine stranica trokuta ODB vrijedi $|OD| = |OB| = a$ i $|DB| = 2v = 2 \cdot \frac{a}{2} = a$. Odavde zaključujemo da je trokut ODB jednakostraničan, zbog čega svaki kut toga trokuta ima veličinu 60°, to jest $2\varphi = 60°$ ili $\varphi = 30°$.

Primjer 9. Zadane su točke O i A tako da je $|OA| = a = 8$. Vrtnja sa središtem u O, za kut $\varphi = 150°$, točki A pridružuje točku B. Izračunajmo površinu trokuta OAB.

Rješenje:



Neka je točka C simetrična točki A s obzirom na O. Tada je $|OC| = |OA| = |OB| = a$. Isto je tako $|\angle COB| = 180° - 150° = 30°$. Prema prethodnom zadatku, površina trokuta OBC jednaka je $p_1 = \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4} \cdot 8^2 = 16$.

Trokuti OBC i OAB imaju dvije stranice jednakih duljina ($|OC| = |OA|$) i zajedničku visinu iz vrha B. Zato ta dva trokuta imaju jednake površine. Zato je tražena površina trokuta OAB jednaka 16.

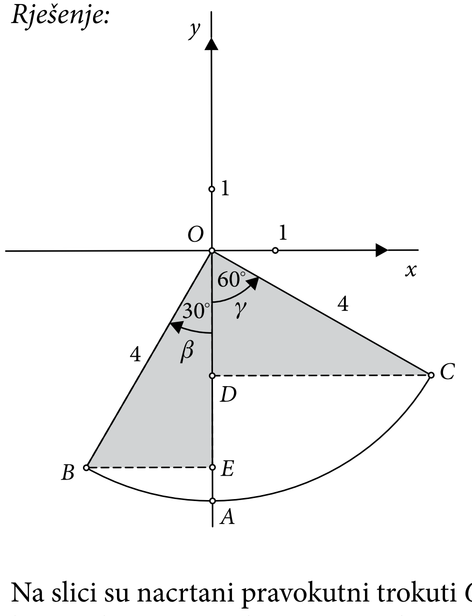
Primjer 10. Zadana je točka $A(0, -4)$. Definirajmo dvije vrtnje oko ishodišta sustava za kutove:

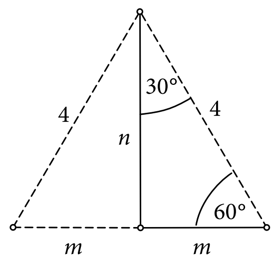
a) $\beta = -30°$ i

b) $\gamma = 60°$.

Prva vrtnja prevodi točku A u točku B, a druga u točku C. Odredimo koordinate tih točaka.

Rješenje:





Na slici su nacrtani pravokutni trokuti OBE i OCD. Ti trokuti su sukladni sa šiljastim kutovima od 30° i 60° s hipotenuzom duljine 4. Na drugoj slici taj trokut je nadopunjen s još jednim takvim trokutom do jednakostraničnog trokuta. Zaključujemo da su duljine kateta tih dvaju pravokutnih trokuta jednake $m = \frac{4}{2}$, $n = \frac{4\sqrt{3}}{2}$, tj. $m = 2$, $n = 2\sqrt{3}$, jer su to polovina stranice, odnosno visina jednakostraničnog trokuta sa stranicom duljine 4. Zato su koordinate traženih točaka: $B(-m, -n)$, $B\left(-2, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $C(n, -m)$, $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -2\right)$.