POVRŠINA LIKOVA U CJELOBROJNOJ MREŽI

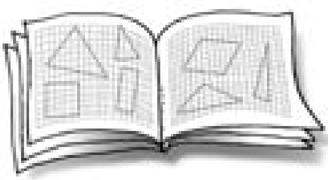
Petar Mladinić, Zagreb

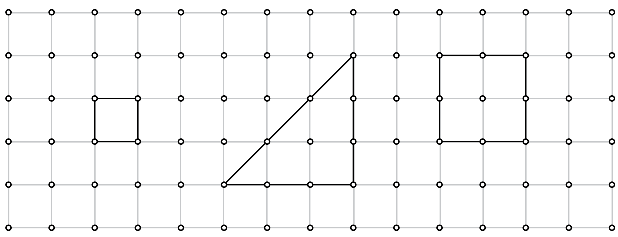
Razmatrat ćemo određivanje površina likova upisanih u kvadratnu mrežu. Tu je vezu prvi uočio **Georg Alexander Pick** (1859.-1943.), austrijski matematičar rođen u Beču, a ubijen u koncentracijskome logoru Theresienstadt. Pickov je poučak iz zaborava izvukao 1969. godine **Hugo Steinghaus** u knjizi *Mathematical Snapshots*. U našoj se matematičkoj literaturi prvi put spominje i dokazuje u časopisu *Matematika br.* 4, Zagreb 1989. (str. 26. - 36.).

Recimo da *kvadratnu mrežu* u ravnini čini skup točaka kojima su obje koordinate cijeli brojevi. Te točke nazivamo *čvorovima mreže*. *Jednostavni mnogokut* je mnogokut koji je omeđen poligonalnom linijom koja sama sebe ne presijeca. U poučku je dana elegantna formula za površinu jednostavnog mnogokuta upisanog u kvadratnu mrežu, tj. mnogokuta kojemu su čvorovi mreže vrhovi.

* * * *

Uzmemo li matematičku bilježnicu (s „kvadratićima"), onda možemo upisivati različite mnogokute. Pogledajmo nekoliko sljedećih upisanih mnogokuta.





a) b) c)

Neka je površina mnogokuta a) jednaka 1 (jedinični kvadrat). Tada je površina mnogokuta b) jednaka $\frac{9}{2}$, a mnogokuta c) 4.

Pick je uočio vezu između površine ovakvih mnogokuta i broja čvorova. Razlikovao je dvije vrste čvorova: one unutar mnogokuta i one na rubu (na stranicama i u vrhovima). Postavimo hipotezu koja daje vezu između površine jednostavnog mnogokuta i broja čvorova mreže koji mu pripadaju.

Prirodno je pretpostaviti da je veza linearna, tj. da je oblika

$$p(u, r) = A \cdot u + B \cdot r + C,$$

gdje je u broj unutarnjih čvorova, r broj čvorova na rubu, te A, B i C realni brojevi.

Na slici a) imamo 0 unutarnjih, 4 rubne točke i površinu mnogokuta jednaku 1. Na slici b) imamo površinu jednaku $\frac{9}{2}$, $u = 1$ i $r = 9$, a na slici c) površina je jednaka 4, $u = 1$, $r = 8$.

Uvrštavanjem podataka u pretpostavljenu vezu dobivamo sustav

$$A \cdot 0 + B \cdot 4 + C = 1$$
$$A \cdot 1 + B \cdot 9 + C = \frac{9}{2}$$
$$A \cdot 1 + B \cdot 8 + C = 4.$$

Ovaj sustav ima rješenje $A = 1$, $B = \frac{1}{2}$, $C = -1$.

Dakle, veza između površine mnogokuta i broja čvorova je

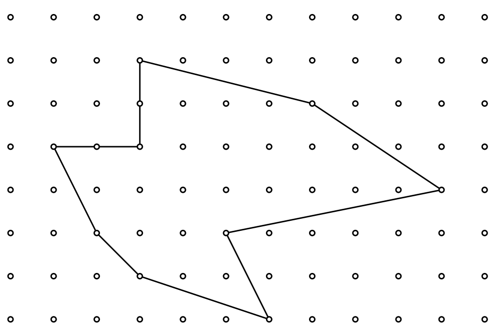
$$p(u,r) = u + \frac{1}{2} \cdot r - 1 .$$

Ova se formula naziva *Pickovom formulom*.

Dokaz Pickovog poučka izlazi iz okvira ovog članka. Možete ga pročitati u spomenutom broju časopisa *Matematika*.

Riješimo sljedeći primjer.

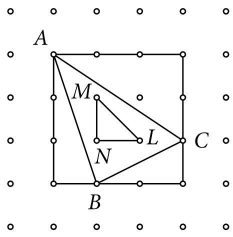
Primjer. Kolika je površina mnogokuta na slici?



Vidimo da je $u = 20$, $r = 11$, pa je površina jednaka $p(u,r) = 20 + \frac{1}{2} \cdot 11 - 1 = 24.5$.

Riješite za vježbu sljedeće zadatke.

1. Dokažite da trokut ABC ima sedam puta veću površinu nego trokut MNL na slici.



2. U kvadratnu mrežu upisan je paralelogram. Ako na stranicama ili unutar paralelograma ima drugih čvorova mreže, dokažite da je površina paralelograma veća od jedan.

(Mađarska matematička olimpijada 1941. godine.)

3. Ako na stranicama u kvadratnu mrežu upisanog paralelograma nema drugih čvorova osim u vrhovima i ako su unutar paralelograma točno dva čvora, onda ti čvorovi leže na dijagonali paralelograma i dijele je na tri sukladna dijela. Dokažite!

4. Šahovski kralj obilazi ploču 8×8 tako da se na svakom polju nađe samo jednom i na kraju se vrati na početno polje. Odredite:
a) duljinu tako dobivenog jednostavnog poligona,
b) najveću duljinu zatvorene jednostavne poligonalne linije.

5. Dokažite da se jednakostranični trokut ne može upisati u kvadratnu mrežu.

6. Dokažite da se u kvadratnu mrežu ne može upisati poligon kojemu je omjer njegove površine i kvadrata jedne njegove stranice iracionalan.

7. Smislite neki primjer koji pokazuje da se Pickova formula ne može generalizirati na poliedre upisane u kvadratnu trodimenzionalnu mrežu. (*Napomena:* kad bi postojala, generalizirana bi formula govorila kako se iz broja čvorova može izračunati obujam poliedra.)

8. U kvadratnu mrežu upisan je trokut. Na stranicama nema drugih čvorova, a unutar trokuta nalazi se samo jedan čvor. Dokažite da je taj čvor težište trokuta.

(Mađarska matematička olimpijada 1955. godine.)