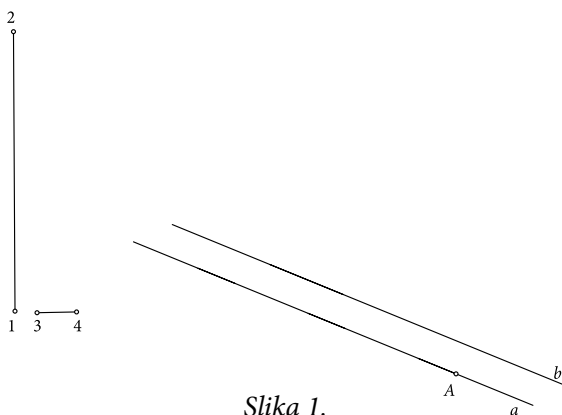


NEMOGUĆI KVADRI

Nikola Novosel, Netretić

Primjer 1. Nacrtajmo *sketcholuziju* na kojoj će biti nemogući kvadri.

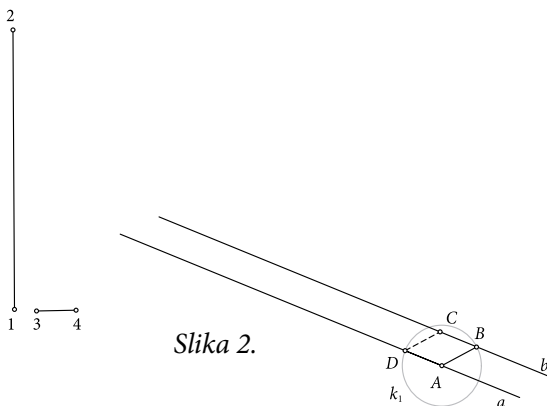
Korak 1. Nacrtajmo dvije međusobno okomite dužine, $\overline{12}$ i $\overline{34}$ (različitih duljina), i dva usporedna pravca a i b (udaljenost pravaca neka je manja od duljine $\overline{34}$). Na pravcu a konstruiramo točku A (označimo pravac a i u izborniku *Konstrukcije* odaberemo naredbu *Točka na objektu*), slika 1.



Slika 1.

Korak 2. Nacrtajmo/konstruirajmo kružnicu $k_1(A, |34|)$. Točka B je presjek kružnice k_1 i pravca b (označimo kružnicu i pravac \rightarrow *Konstrukcije* \rightarrow *Presjek*), odnosno točka D je presjek kružnice k_1 i pravca a .

Korak 3. Točke A, B i D su vrhovi paralelograma $ABCD$. Vrh C moguće je konstruirati ili klasično crtanjem/konstruiranjem usporednih pravaca koji se sijeku u točki C ili translacijom točke B za vektor \overline{AD} (označimo točke A i D \rightarrow *Transformacije* \rightarrow *Označite vektor*; označimo točku B \rightarrow *Transformacije* \rightarrow *Translacija*) u točku C , slika 2.



Slika 2.

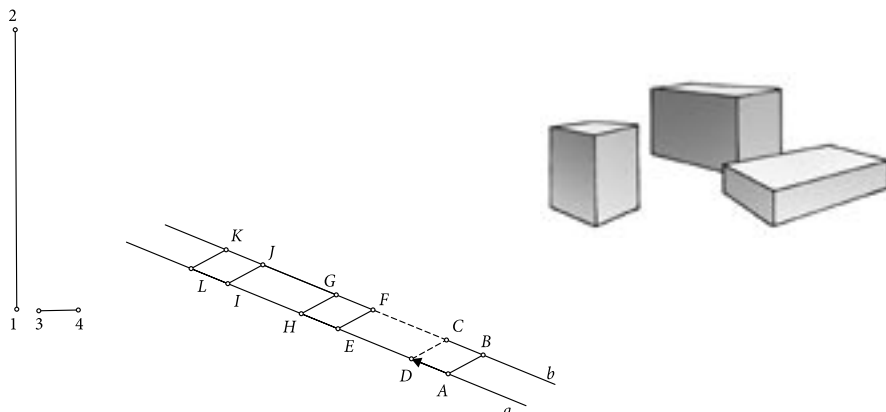


Korak 4. „Izbrišimo” kružnicu k_1 . Označimo redom točke A i D te u izborniku *Transformacije* odaberemo naredbu *Označite vektor*. Točke C i D transliriramo za vektor $2\overline{AD}$ (označimo točke C i $D \rightarrow$ *Transformacije* \rightarrow *Translatirajte* \rightarrow *Transformacije* \rightarrow *Translatirajte*) u točke E i F .

Korak 5. Za vektor \overline{AD} točke E i F transliramo (označimo točke E i $F \rightarrow$ *Transformacije* \rightarrow *Translatirajte*) u točke H i G . Točke E, F, G i H su vrhovi paralelograma $EFGH$.

Korak 6. Ponovimo **Korak 4.** na točke H i G , tj. translirane slike su redom točke I i J .

Korak 7. Ponovimo **Korak 5.** Na točke I i J , tj. translirane slike su redom točke L i K , slika 3.



Slika 3.

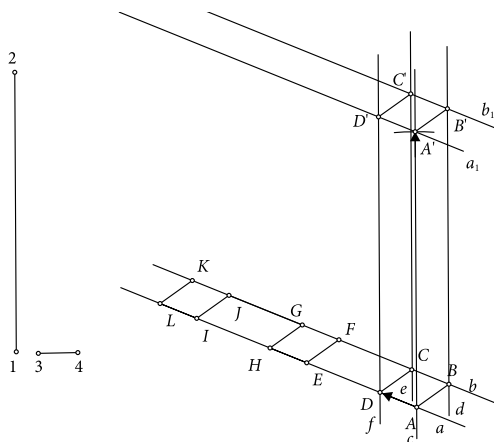
Korak 8. Označimo točke 1 i 2 pa u izborniku *Transformacije* odaberemo naredbu *Označite vektor*. Označimo točke A, B, C, D i pravce a i $b \rightarrow$ *Transformacije* \rightarrow *Translatirajte*. Slike su redom točke A', B', C', D' i pravci a_1 i b_1 . Točkama A i A' crtamo/konstruiramo pravac c (označimo točke \rightarrow *Konstrukcije* \rightarrow *Pravac*) - analogno točkama B i B' pravac d , točkama C i C' pravac e , odnosno točkama D i D' pravac f , slika 4.

Napomena. Točke A', B', C' i D' možemo konstruirati i klasično. Točkama A, B, C i D nacrtamo pravce c, d, e i f usporedne s dužinom $\overline{12}$.

Točke A', B', C' i D' bit će presjeci odgovarajućih pravaca i kružnica polumjera $|12|$, tj. $A' = c \cap k_2(A, |12|)$; $B' = d \cap k_3(B, |12|)$;

$$C' = e \cap k_4(C, |12|); D' = f \cap k_5(D, |12|).$$

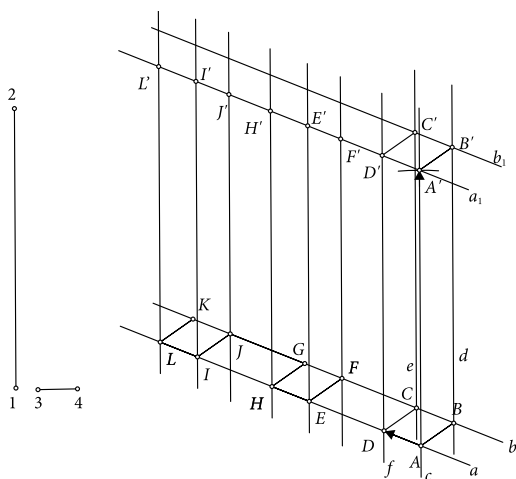




Slika 4.

Korak 9. Vrhovima paralelograma $EFGH$ i $IJKL$ konstruirajmo pravce usporedne s pravcem $f = DD'$ (označimo točke i pravac \rightarrow *Konstrukcije* \rightarrow *Paralele*).

Korak 10. Pravac točkom E usporedan s pravcem $f = DD'$ siječe pravac a_1 u točki E' ; pravac točkom F usporedan s pravcem $f = DD'$ siječe pravac a_1 u točki F' ; pravac točkom H usporedan s pravcem $f = DD'$ siječe pravac a_1 u točki H' ; pravac točkom I usporedan s pravcem $f = DD'$ siječe pravac a_1 u točki I' ; pravac točkom J usporedan s pravcem $f = DD'$ siječe pravac a_1 u točki J' ; pravac točkom L usporedan s pravcem $f = DD'$ siječe pravac a_1 u točki L' , slika 5.

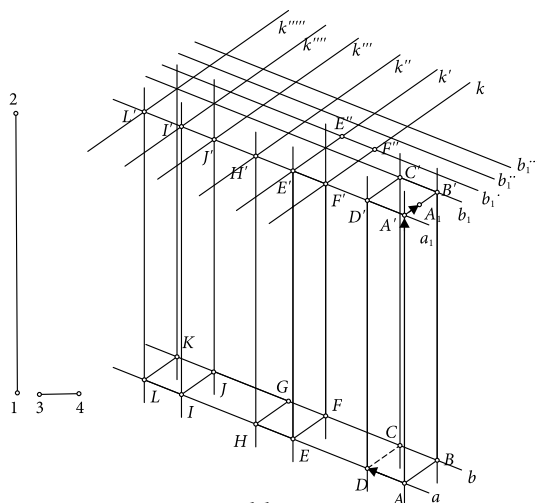


Slika 5.



Korak 11. Označimo dužinu $\overline{A'B'}$ i u izborniku *Konstrukcije* odaberemo naredbu *Polovište* (neka je to točka A_1). (Prisjetimo se: ako dva puta kratko kliknemo na ime točke, u dijalogu koji se otvara možemo mijenjati font, boju, kao i samo ime točke; analogno vrijedi za pravce/dužine/kružnice. Sve što napišemo unutar uglatih zagrada bit će napisano kao indeks.) Točkama A' i A_1 bit će definiran novi vektor, $\overline{A'A_1}$ (označimo redom točke A' i A_1 i u izborniku *Transformacije* odaberemo naredbu *Označite vektor*) za koji ćemo translahirati pravac b_1 tri puta (slike će redom biti pravci b'_1, b''_1, b'''_1).

Korak 12. Točkama F', E', H', J', I' i L' konstruirajmo pravce k, k', k'', k''' , k'''' , k'''''' usporedne s dužinom $\overline{A'B'}$. Točka F'' je presjek pravca k i pravca b'_1 , odnosno točka E'' je presjek pravca k' i pravca b'_1 . Konstruiramo dužine $\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{DD'}, \overline{CC'}, \overline{A'B'}, \overline{B'C'}, \overline{C'D'}, \overline{D'A'}, \overline{EE'}, \overline{FF'}$, sl. 6.



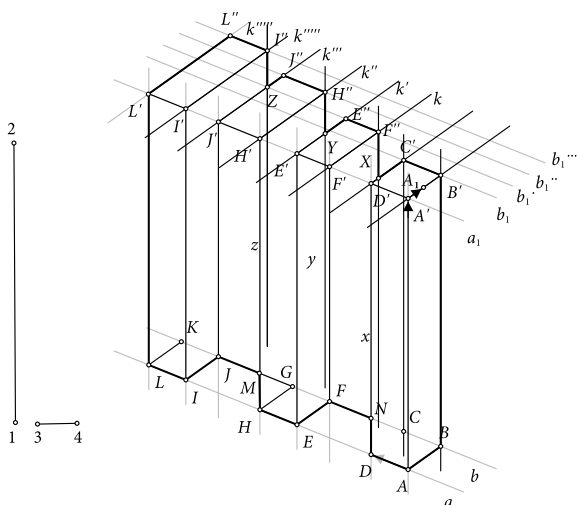
Slika 6.

Korak 13. Točka H'' je presjek pravca k'' i pravca b''_1 , odnosno točka J'' je presjek pravca k''' i pravca b''_1 . Točka I'' je presjek pravca k'''' i pravca b''_1 , odnosno točka L'' je presjek pravca k'''''' i pravca b''_1 . Konstruiramo dužine $\overline{HH''}, \overline{II''}, \overline{JJ''}, \overline{LL''}, \overline{DD'}, \overline{EE'}, \overline{FF'}$, te paralelograme $I'I''L''L'', H'H''J''J'', E'F'F''E''$.

Korak 14. Konstruiramo točke M i N , redom kao presjeke dužine $\overline{HH''}$ i pravca b , odnosno dužine $\overline{DD'}$ i pravca b .

Korak 15. Točkama F'' , H'' i I'' redom konstruiramo pravce x, y, z usporedne s dužinom $\overline{I_2}$. Tada konstruiramo točke: $X = x \cap \overline{C'D'}$; $Y = y \cap \overline{E'E''}$; $Z = z \cap \overline{J'J''}$ (označimo dužinu i pravac \rightarrow *Konstrukcije* \rightarrow *Presjek*), slika 7.





Slika 7.

Korak 16. Označimo točke A', B', C', D' pa u izborniku *Konstrukcije* odaberemo naredbu *Unutrašnjost četverokuta*. Budući da je po definiciji boja unutrašnjosti četverokuta žuta, dok je označena površina u izborniku *Zaslon* odaberemo naredbu *Boja*. U ovom slučaju za što bolji efekt preporuča se odabir određene boje i njezino toniranje, primjerice odabir najsvjetlije nijanse sive boje.

Korak 17. Konstrukciju iz *Koraka 16.* ponavljamo i za grupe točaka: $E', F', F'', E''; H', H'', J', J' i I', I', L', L'$. Konstruirane unutrašnjosti četverokuta nalaze se u usporednim ravninama pa su iste nijanse sive boje, tj. najsvjetlije.

Korak 18. Označimo točke A, A', D, D' i kao u *Koraku 16.* konstruiramo unutrašnjost četverokuta čija će boja biti nekoliko nijansi tamnija od boje iz *Koraka 16.*

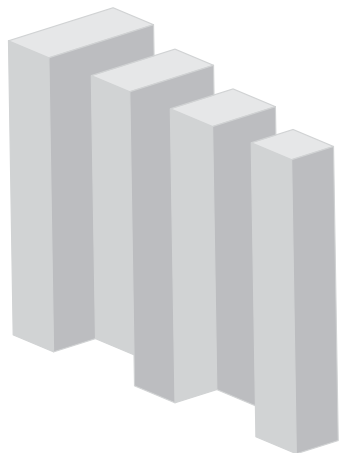
Korak 19. Konstrukciju iz *Koraka 18.* ponavljamo i za grupe točaka $E, F, F', E'; M, H, J, J; I, I', L', L$. Konstruirane unutrašnjosti četverokuta nalaze se u usporednim ravninama pa su iste nijanse sive boje, nekoliko nijansi tamnije od sive kao u *Koraku 18.*

Korak 20. Označimo točke N, D', X, F'', F' i F pa u izborniku *Konstrukcije* odaberemo naredbu *Unutrašnjost poligona* čija je boja nekoliko nijansi tamnija nego u *Koraku 18.* tj. najtamnija nijansa sive boje.

Korak 21. Konstrukciju iz *Koraka 20.* ponavljamo i za grupe točaka $H, E, E', Y, H'', H'; I, J, J, Z, I', I'$. Konstruirane unutrašnjosti poligona nalaze se u usporednim ravninama pa su najtamnije nijanse sive boje, kao i unutrašnjost poligona konstruirana u *Koraku 20.*

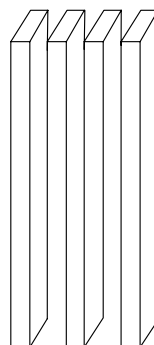


Korak 22. „Izbrišemo” sve pomoćne dužine i pravce, kao i točke. Na slici 8. je *sketcholuzija* na kojoj su nemogući kvadri.



Slika 8.

Zadatak. Pomoću *Sketchpada* konstruirajte *sketcholuziju* prema predlošku na slici 9. Najbolji radovi bit će objavljeni i nagrađeni.



Slika 9.

Litratúra:

1. M. Gardner: *The Colossal Book of Mathematics*, W. W. Norton & Company, New York, 2001.
2. N. Radović: *Nemoguće figure*, Matka **14** (2005./ 2006.) **53**, 8 – 11.
3. N. Radović: *Nemoguće figure i još malo*, Matka **14** (2005./ 2006.) **54**, 94 – 97.
4. N. Radović: *Koktel iluzija*, Matka **15** (2006./ 2007.) **58**, 79 – 83.
5. T. Pappas: *The Joy of Mathematics Discovering Mathematics All Around You*, Wide World Publishing/ Tetra, San Carlos, 2006.

Internetske adrese:

- <http://opticalillusion4u-1.webs.com/p10.htm/01.06.2011./>

