O JEDNOM ZADATKU (IGRI)

Ivo Božić, PMF-MO, Zagreb

Na školskom natjecanju V. gimnazije u Zagrebu 2006. godine učenicima drugih razreda bio je postavljen sljedeći zadatak:

Dva igrača *A* i *B* igraju sljedeću igru: Igrač *A* kaže neki prirodan broj *x* iz segmenta [1, 10]. *B* tada zamisli prirodni broj iz segmenta [1, 10], pribroji ga onome što ga je rekao *A* i kaže taj zbroj igraču *A*. Tada igrač *A* pribroji tom zbroju neki prirodni broj iz segmenta [1, 10] i kaže dobiveni zbroj igraču *B*, itd... Pobjednik je onaj igrač koji može prvi reći zbroj 100. Igrač *A* počeo je brojem 2. Postoji li strategija koja će omogućiti pobjedu igraču *B*?

Pobjednik će biti onaj koji prvi kaže brojeve 89, 78, 67, ..., 12. Znači da igrač *B* treba reći 12, zatim 23, ..., 89 i ta će ga strategija dovesti do pobjede.

Primijetimo: ako je igrač *A* rekao bilo koji prirodni broj *x* iz segmenta [2, 10], igrač *B* opet ima pobjedničku strategiju! Zanima nas postoji li pobjednička strategija za igrača *A*. Takva strategija postoji: treba početi brojem 1 pa opet govoriti 12, 23, ..., 89.

Zanimljivo je napomenuti da je riječ o vrlo poznatom zadatku koji je bio postavljen i učenicima 6. razreda osječke regije na regionalnom natjecanju 1996. godine (doduše, malo je promijenjena formulacija zadatka, pa se tako tražila pobjednička strategija za prvog igrača).

U knjizi „Gros (tucet tuceta) matematičkih zadataka"[1] **Vladimira Devidéa**, broj 10 u našem zadatku zamijenjen je brojem 7.

Pitanje se nameće samo po sebi: *Može li se problem poopćiti?* Odgovor je potvrdan, poopćenje je moguće! Dakle, radit će se o sljedećem problemu:

Dva igrača *A* i *B* igraju sljedeću igru: igrač *A* kaže neki prirodan broj *x* iz segmenta [1, *b*], zatim igrač *B* zamisli prirodan broj *x* iz segmenta [1, *b*], zbroji taj broj i broj koji je rekao igrač *A* te kaže naglas taj zbroj. Igrač *A* ponavlja postupak igrača *B*... Pobjednik je onaj koji kaže broj *a*. Koji igrač ima pobjedničku strategiju?

Zapišimo broj a u obliku $a = k \cdot (b + 1) + r$, $r < (b + 1)$, pri čemu je k prirodan broj (i očito je $a > b$).

Primijetimo da svaki igrač može osigurati da nakon njegovog i poteza protivnika zbroj bude povećan za točno $b + 1$. Ako je $r = 0$, tada je pobjednik igrač *B*, a u svim preostalim slučajevima pobjedničku strategiju ima igrač *A*. Ako je r različit od 0, onda igrač *A* u prvom potezu kaže r, zatim *A* u svom drugom potezu kaže $b + 1 + r$, i ta će ga strategija dovesti do pobjede! Ako je $r = 0$, jasno se vidi što treba raditi igrač *B*.

Kako smo vidjeli u poopćenju, sami možete izabrati koje brojeve možete zbrajati te do kojeg je broja cilj doći.

---

[1] „Gros (tucet tuceta) matematičkih zadataka", HMD, Zagreb, 1995.