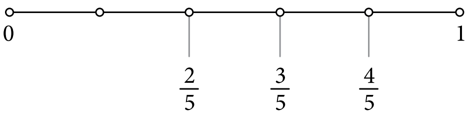
IZMEĐU DVAJU RAZLOMAKA

Željko Brčić, Vinkovci

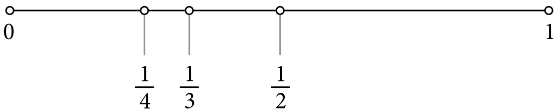
Matka 19 (2010./2011.) br. 75

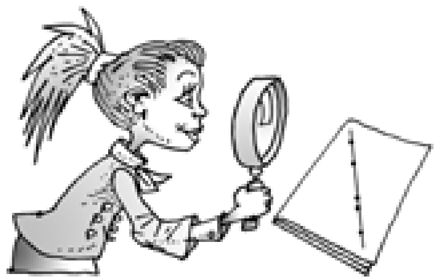
Između 2 i 3 nema drugih prirodnih brojeva. No, ima li razlomaka koji se nalaze između, primjerice, $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$? Ako ih ima, koliko ih je i kako ih odrediti? Malo iskusniji matematičari lako će odgovoriti na ovo pitanje, no učenicima petih i šestih razreda osnovne škole, koji tek usvajaju pojam razlomka, odgovor nije tako očit, ali do njega mogu doći na nekoliko različitih načina.

Na početku, primijetimo da se između razlomaka $\frac{2}{5}$ i $\frac{4}{5}$ nalazi razlomak $\frac{3}{5}$, i to možemo zapisati ovako: $\frac{2}{5} < \frac{3}{5} < \frac{4}{5}$. Vrijedi i nešto više: razlomak $\frac{3}{5}$ nalazi se točno između dvaju početnih razlomaka ili, matematički rečeno, on je njihova artimetička sredina. Zaista, $\left(\frac{2}{5} + \frac{4}{5}\right) : 2 = \frac{6}{5} : 2 = \frac{3}{5}$.



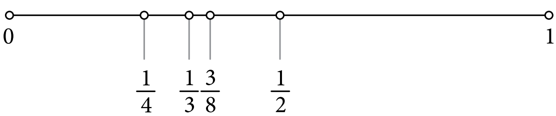
Možemo li analogno zaključiti da je razlomak $\frac{1}{3}$ aritmetička sredina razlomaka $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{4}$? Ne, on se doduše nalazi između navedenih razlomaka $\left(\frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}\right)$, ali ne u njihovoj sredini.





Izračunajmo aritmetičku sredinu razlomaka $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{4}$.

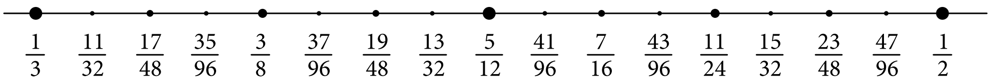
Imamo: $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) : 2 = \left(\frac{2}{4} + \frac{1}{4}\right) : 2 = \frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$.

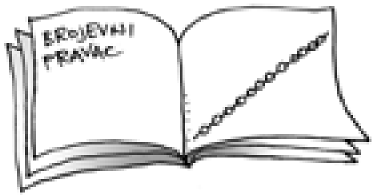


Svaka se dva razlomka mogu zbrojiti i taj se rezultat uvijek može podijeliti s 2. To zapravo znači da za svaka dva razlomka postoji neki treći razlomak koji je njihova aritmetička sredina. Time je pokazano da između bilo kojih dvaju razlomaka (pa i onih navedenih na početku teksta) postoji barem još jedan razlomak.

Zapravo, između bilo kojih dvaju razlomaka postoji ne samo jedan, nego beskonačno mnogo drugih razlomaka. Naime, nakon što smo dokazali postojanje aritmetičke sredine dvaju razlomaka, zaključujemo da postoji razlomak između obaju početnih razlomaka i njihove aritmetičke sredine. Postupak nastavimo dalje, te dijeljenjem intervala između novodobivenih razlomaka na pola - dobivamo sve više i više novih razlomaka. Kako taj postupak nema kraja, zaključujemo da između svaka dva razlomka postoji beskonačno mnogo drugih razlomaka. To svojstvo može se izreći riječima: skup racionalnih brojeva (razlomaka) gust je skup.

Sljedeća slika prikazuje nekoliko razina aritmetičkih sredina uvodnog primjera (sam postupak računanja prepušten je čitatelju):





Do traženih rezultata može se doći i postupkom proširivanja razlomaka. Najprije oba razlomka svedemo na zajednički nazivnik: $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$, $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$.

Dobivene razlomke možemo dalje proširivati bilo kojim brojem, nakon čega ćemo lako odrediti i razlomke koji se nalaze između njih (ne nužno u sredini).

Nakon što oba razlomka proširimo brojem 2, $\frac{2}{6}=\frac{4}{12}$ i $\frac{3}{6}=\frac{6}{12}$, vidimo da se između njih nalazi razlomak $\frac{5}{12}$ (taj smo razlomak već imali jer je on njihova aritmetička sredina).

Nakon proširivanja brojem 3, dobit ćemo $\frac{2}{6}=\frac{6}{18}$ i $\frac{3}{6}=\frac{9}{18}$, te dva nova rezultata $\frac{7}{18}$ i $\frac{8}{18}=\frac{4}{9}$.

Nakon proširivanja brojem 4, imali bismo razlomke $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{12}$ i $\frac{11}{24}$. Zatim bi slijedilo proširivanje brojem 5 i razlomci $\frac{11}{30}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{13}{30}$ i $\frac{7}{15}$... Svakim sljedećim proširivanjem dobili bismo sve više novih rezultata.

Pogledat ćemo još kako se do traženih razlomaka može doći pomoću decimalnih brojeva. Pretvorimo razlomke u decimalni zapis: $\frac{1}{3}=0.3333...$, $\frac{1}{2}=0.5$