Matka 19 (2010./2011.) br. 75

POGAĐANJEM DO TOČNOG RJEŠENJA

Petar Mladinić, Zagreb

Pokušajmo sljedeći problem riješiti bez uporabe jednadžbe.

Primjer 1. Nađimo broj koji ima svojstvo da se dobije 1140 kad se od njega oduzme njegova četvrtina i doda njegova petina.

Rješenje: Pokušajmo pogoditi rješenje. Pretpostavimo da je to broj 100. Provjerimo ima li broj 100 zadana svojstva. Dobivamo

$$100-\frac{1}{4}\cdot 100+\frac{1}{5}\cdot 100=95.$$

Provjera pokazuje da broj 100 nije rješenje i da je broj 95 za 1045 manji od zadanog rezultata 1140.

Pokušajmo s nekim drugim brojem. Pretpostavimo da je rješenje broj 200. Provjerimo je li broj 200 rješenje. Dobivamo

$$200-\frac{1}{4}\cdot 200+\frac{1}{5}\cdot 200=190.$$

Provjera pokazuje da ni broj 200 nije rješenje i da je 195 manji za 950 od rezultata 1140.

Dakle, ove dvije pretpostavke nisu dale rješenje. Treba li ovo pogađanje nastaviti dok slučajno ne pogodimo rješenje ili se, ipak, ovo računanje može iskoristiti kako bismo, bez pogađanja, odredili točno rješenje?

Stari su matematičari uočili put od pogrešnih pretpostavki prema točnom rješenju. Zapisali su ove brojeve u dva stupca.

$$\begin{array}{ccc} 100 & \times & 1045 \\ 200 & & 950 \end{array}$$

Izračunali su:

$$\frac{200\cdot 1045-100\cdot 950}{1045-950}=1200.$$

Provjera $1200-\frac{1}{4}\cdot 1200+\frac{1}{5}\cdot 1200=1140$ pokazuje da je broj 1200 traženi broj koji zadovoljava postavljene uvjete.

Ovaj postupak vrijedi i u slučaju da se u provjeri pretpostavljenih rješenja dobiju rezultati koji su veći od 1140.

U slučaju da je jedan račun u provjeri manji a drugi veći, računaju se zbrojevi (a ne razlike).

Primjerice, pretpostavimo da je rješenje broj 1000. Dobivamo da je $1000-\frac{1}{4}\cdot 1000+\frac{1}{5}\cdot 1000=950$, manje od 1140 za 190. Za pretpostavljeni broj 2000 dobivamo da je $2000-\frac{1}{4}\cdot 2000+\frac{1}{5}\cdot 2000=1900$, za 760 više od 1140.

Imamo

$$\begin{array}{ccc} 1000 & & 190 \\ & \times & \\ 2000 & & 760 \end{array}$$

a odavde je traženi broj

$$\frac{2000\cdot 190+1000\cdot 760}{190+760}=1200.$$

*****

Ova je metoda u povijesti matematike poznata kao *regula falsi*. Rabila se u matematici, u ovakvom ili sličnom obliku, više tisuća godina. Nalazimo je u *Ahmesovoj računici* koja datira oko 21. do 18. st. pr. K., u *Moskovskom papirusu*, u Kini u komentarima knjige **L. Huia** *Jiuzhang Suanshu*, koja pokriva vrijeme vladavine dinastije Han od 206. godine pr. K. do 220. godine, u Diofantovoj *Aritmetici* koja datira oko 275. godine, u arapskih matematičara iz 9. i 10. st., u *Liber abaci* iz 1202. godine **Leonarda Pisanskog**, u *Le compendion de l'abaco* iz 1492. godine **F. Pellosa**, u *Sumi* iz 1494. godine **L. Paciolija**, u *Ground of Artes* iz 1542. godine **R. Recordea**, u *Epitome Arithmeticae Practicae* iz 1583. godine **C. Claviusa**, te drugih matematičara.

*****

Razmotrimo još dva primjera.

Primjer 2. Netko kupi tri vrste robe: prve vrste 9 kg više nego druge vrste, a druge vrste 45 kg više nego treće. Koliko je kilograma kupio od svake vrste ako je ukupno kupio 210 kg?

Rješenje: Pretpostavimo da je kupio prve vrste 120 kg. Tada zaključujemo da je druge vrste kupio 111 kg, a treće 66 kg. Zbroj 120 + 111 + 66 = 297 veći je od 210 za 87. Pretpostavimo, drugi put, da je prve vrste kupio 70 kg. Tada je kupio druge vrste 61 kg, a treće vrste 16 kg.

Zbroj 70 + 61 + 16 = 147 je za 63 manji od 210.

Dakle, imamo

$$\begin{array}{ccc} 120 & & 87 \\ & \times & \\ 70 & & 63 \end{array}$$

a odavde dobivamo da je traženi broj

$$\frac{70\cdot 87+120\cdot 63}{87+63}=91.$$

Kupac je kupio 91 kg robe prve vrste, 82 kg druge vrste i 37 kg treće vrste.

Primjer 3. Riješimo jednadžbu

$$\frac{x-1}{2}+\frac{x+3}{5}=1$$

metodom *regula falsi*.

Rješenje: Pretpostavimo da je $x = 1$. Tada je

$$\frac{1-1}{2}+\frac{1+3}{5}=\frac{4}{5},$$

a to je za $\frac{1}{5}$ manje od 1.

Pretpostavimo da je $x = 2$. Tada je

$$\frac{2-1}{2}+\frac{2+3}{5}=\frac{3}{2},$$

a to je za $\frac{1}{2}$ veće od 1.

Tada je

$$\begin{array}{ccc} 1 & & \frac{1}{5} \\ & \times & \\ 2 & & \frac{1}{2} \end{array}$$

a odavde je

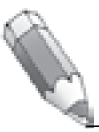
$$x=\frac{2\cdot\frac{1}{5}+1\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{2}}=\frac{9}{7}.$$

Provjera pokazuje da smo točno odredili nepoznanicu x.

Evo nekoliko zadataka za samostalno rješavanje.

Zadatci.

1. Ako bi u razred ušlo još toliko učenika koliko ih ima, i još polovina, i još trećina, i još jedan - bilo bi ih 120. Koliko učenika na početku ima taj razred?
2. Riješite jednadžbu $5(2x - 1) + 3(x + 4) = 150$.
3. (Iz *Moskovskog papiru*sa) Riješite jednadžbu $x-\frac{1}{5}x=20$.
4. (Iz *Ahmesove računice*) Riješite jednadžbu $\left(x+\frac{2}{3}x\right)-\frac{1}{3}\left(x+\frac{2}{3}x\right)=10$.
5. (*F. Pellos, 15. st.)* Koplje u vodi ima polovinu i trećinu duljine, a iznad vode 9 pedalja. Koliko je dugačko koplje?
6. (*Iz udžbenika u 18. st.)* U vrećici je vrijednost od 154 franka u novčićima od 5 franaka i 2 franka. Novčića ima 41 komad. Koliko ima novčića od 5 franaka?



(*Rješenja*: **1.** 42 učenika; **2.** $x = -11$; **3.** $x = 25$; **4.** $x = 9$; **5.** 54 pedlja; **6.** 24 novčića od 5 franaka.)

Iz ovih primjera i zadataka mogli bismo zaključiti da su se metodom *regula falsi* rješavali zadatci koji se svode na linearne jednadžbe.

Razmotrimo ovu metodu tako da njezine upute pogledamo u svjetlu spomenute činjenice. Dakle, imamo linearnu jednadžbu

$$ax + b = 0. \tag{1}$$

Neka su p_1 i p_2 dvije pretpostavljene vrijednosti za x i neka su g_1 i g_2 izračunate pogreške.

Promatramo sljedeće jednakosti:

$$ap_1 + b = g_1, \tag{2}$$

$$ap_2 + b = g_2. \tag{3}$$

Oduzmemo li od jednakosti (2) jednakost (3), dobivamo:

$$a(p_1 - p_2) = g_1 - g_2. \tag{4}$$

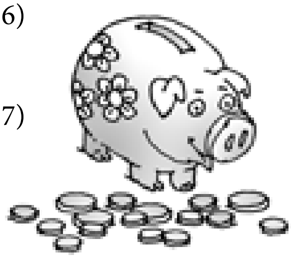
Pomnožimo li (2) s p_2, a (3) s p_1, dobivamo jednakosti:

$$ap_1p_2 + bp_2 = g_1p_2, \tag{5}$$

$$ap_1p_2 + bp_1 = g_2p_1. \tag{6}$$

Odavde oduzimanjem dobivamo:

$$b(p_2 - p_1) = g_1p_2 - g_2p_1. \tag{7}$$



Podijelimo li jednakost (7) s (4), dobivamo

$$-\frac{b}{a} = \frac{g_1p_2 - g_2p_1}{g_1 - g_2}.$$

Dakle, dobivamo vrijednost rješenja naše početne linearne jednažbe (1), tj.

$$x = -\frac{b}{a} = \frac{g_1p_2 - g_2p_1}{g_1 - g_2}.$$

Ovdje se vidi i zašto se u brojniku i nazivniku, u slučaju kad je jedna pogreška manja, a druga veća od zadane vrijednosti, računaju zbrojevi. Pogreške g_2 (ili g_1) tada imaju + ili – predznak/vrijednost u odnosu na zadanu vrijednost. Vidi se i zašto se, u slučaju kad su obje pogreške manje ili veće od zadane vrijednosti, računaju razlike.

Zaključujemo da se metodom *regula falsi* točno rješavaju problemi koji se mogu svesti na rješavanje linearne jednadžbe.