# O JEDNOM MATEMATIČKOM ZADATKU

Alija Muminagić, Danska

U članku ćemo se pozabaviti rješavanjem samo jednoga zadatka. Zadatak glasi:

U skupu cijelih brojeva riješite jednadžbu

$$xy + x + y = 3. \tag{1}$$

Učenici već u osnovnoj školi (posebice natjecatelji) znaju da je to jedna *diofantska jednadžba*[1]. Tu jednadžbu učenici, u pravilu uspješno, rješavaju jednom od metoda koja im je poznata (npr. *metodom umnoška* ili *metodom količnika*)[2]. Zašto onda pisati o tome zadatku?

Ovdje će biti pokazan jedan neuobičajeniji način rješavanja zadane jednadžbe, a istodobno će Matkači moći naučiti nešto za što u redovitoj nastavi nema vremena!

Jednadžbu $xy + x + y = 3$ možemo napisati u obliku $y(x + 1) = 3 - x$, tj.

$$y = \frac{3-x}{x+1}. \tag{2}$$

Dobili smo funkciju koja je količnik dviju linearnih funkcija. Takvu funkciju nazivamo *razlomljeno linearnom* ili *homografskom funkcijom* (*racionalnom funkcijom*). Zapisana u općem obliku, takva funkcija glasi:

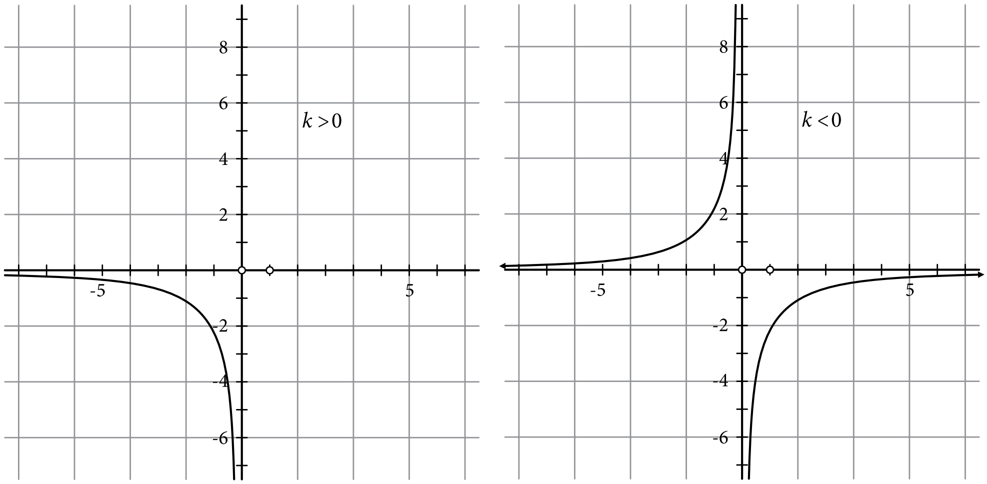
$$y = \frac{ax+b}{cx+d}, \tag{3}$$

pri čemu su $a$, $b$, $c$ i $d$ realne konstante. Iz (3) zaključujemo da mora biti $c \neq 0$, jer za $c = 0$ dobivamo da je $y = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$, a to je linearna funkcija. Osim toga je $ad - bc \neq 0$, jer ako je $ad - bc = 0$, dobivamo da je $y = \frac{a}{c}$, dakle konstanta.

Prisjetimo se da je funkcija $y = \frac{k}{x}$, gdje je $k \neq 0$ realan broj, funkcija obrnute proporcionalnosti. Graf te funkcije je krivulja koju nazivamo *jednakostraničnom hiperbolom* i kojoj su koordinatne osi asimptote. Graf te funkcije ima dvije grane, i to za $k > 0$ u I. i III. kvadrantu, a za $k < 0$ u II. i IV. kvadrantu (v. sl. 1).

[1] **Diofant**, starogrčki matematičar iz Aleksandrije, živio je u III. stoljeću. Diofantska jednadžba je algebarska jednadžba s dvije ili više nepoznanica s cjelobrojnim koeficijentima, kojoj se traže cjelobrojna ili racionalna rješenja.

[2] Više o metodama rješavanja diofantskih jednadžbi možete pročitati u člancima Marije Golac objavljenima u Matki broj 6 i Matki broj 8, kao i u knjizi Zdravka Kurnika *Diofantske jednadžbe*




*Slika 1.*

Podsjetimo se, nadalje, da je graf funkcije $y = ax$ (pri čemu je $a$ realan broj, $a \neq 0$) pravac. Pravac je i graf funcije $y = ax + b$ (pri čemu su $a$ i $b$ realni brojevi različiti od nule). Graf funkcije $y = ax + b$ lako crtamo pomoću grafa funcije $y = ax$.

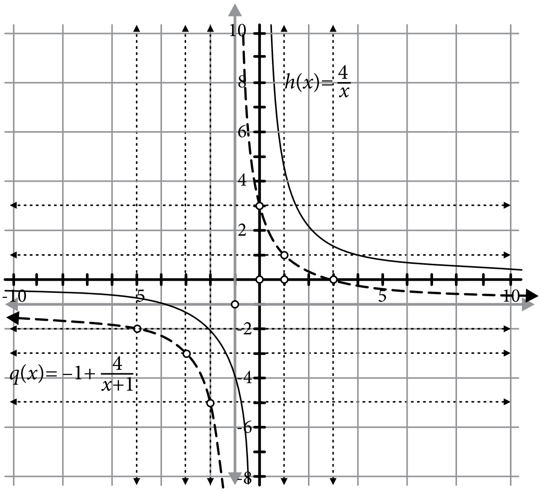
Nameće se pitanje: ako se graf funkcije $y = ax + b$ lako crta pomoću grafa funcije $y = ax$, možemo li pomoću grafa funkcije $y = \frac{k}{x}$ nacrtati graf funkcije $y = \frac{ax+b}{cx+d}$? Odgovor je da, a evo i kako! Možemo redom pisati:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)} = \frac{a\left(x+\frac{d}{c}-\frac{d}{c}+\frac{b}{a}\right)}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)} =$$

$$= \frac{a\left(x+\frac{d}{c}\right)+a\left(-\frac{d}{c}+\frac{b}{a}\right)}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c} - \frac{\frac{ad-bc}{c^2}}{x+\frac{d}{c}} = \frac{a}{c} - \frac{k}{x+\frac{d}{c}}$$

pri čemu je $k = \frac{ad-bc}{c^2}$. Odatle vidimo da je i graf funkcije $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ također hiperbola kojoj je središte simetrije točka $S\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$. Prema tome, graf funkcije (3) dobivamo translacijom (paralelnim pomakom) grafa funkcije $y = -\frac{k}{x}$ za vektor $\overrightarrow{OS}$, $S\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$, $O(0, 0)$.

Nacrtajmo sada graf funkcije $y=\dfrac{3-x}{x+1}$. Ovdje je $a=-1$, $b=3$, $c=1$, $d=1$, $S(-1,\ -1)$ pa je $k=-4$. Transformirajmo funkciju (2) u oblik $y=-1+\dfrac{4}{x+1}$. Odavde vidimo da graf funkcije (2) dobivamo translacijom grafa funkcije $-\left(-\dfrac{4}{x}\right)=\dfrac{4}{x}$ za vektor $\overrightarrow{OS}$, $S(-1,\ -1)$ (v. sl. 2.)




*Slika 2.*

Konačno, s grafa na slici 2. očitavamo rješenja: $(x, y)=(-5, -2)$, $(-3, -3)$, $(-2, -5)$, $(0, 3)$, $(1, 1)$, $(3, 0)$, jer je s grafa očito da za $x<5$ i $x>3$ vrijednost broja $y$ ne može biti cjelobrojna.

*Napomena*: Naravno, u današnje ćemo vrijeme za crtanje grafa koristiti grafički kalkulator ili računalo.

**Literatura:**

1. Jens Carstensen, H. C. Thompson, *Måndens opgave* (u rukopisu)
2. Zdravko Kurnik, *Posebne metode rješavanja matematičkih problema*, Element, Zagreb, 2010.
3. Ivica Gusić, *Matematički rječnik*, Element, Zagreb, 1995.
4. Boris Pavković, Darko Veljan, *Matematika 1*, zbirka zadataka za 1. razred srednjih škola, Školska knjiga, Zagreb, 1993.