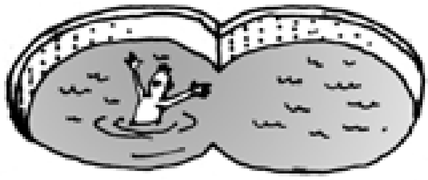
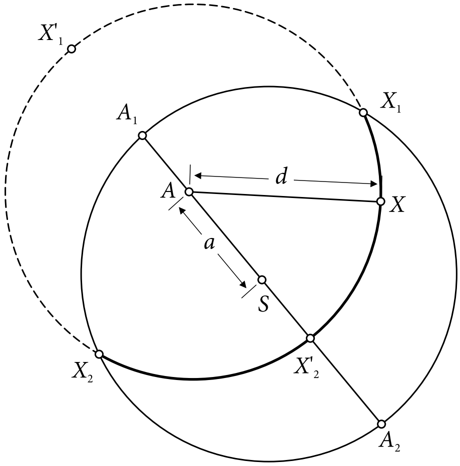
DVIJE TOČKE U KRUGU – JEDNA ČVRSTA, A DRUGA POMIČNA

Kajetan Šeper, Slavonski Brod

Neka je $K = K(S, r)$ krug sa središtem S polumjera r. Neka je A čvrsta, a X pomična točka u krugu K. Neka pravac AS presijeca rub kruga K (kružnicu k) u točkama A_1 (bliže točki A) i A_2. Neka je $a = |AS|$ i $d = |AX|$ (vidi sl. 1.).





Slika 1.

Primjer. Odredimo vrste *staza* (*trajektorija*) $k_K(A, X)$ po kojima se točka X može pomicati u jednom i drugom smjeru moguće preko već prijeđenog dijela staze, ali tako da veličina d ostane *stalna* (*konstantna*).

Raščlanit ćemo zadatak uzevši u obzir zadane podatke i pokazati da vrste staza ovise samo o veličinama r, a i d i njihovim međusobnim odnosima.

Razvrstat ćemo staze u dva slučaja ovisno o tome je li

I. krug K **zatvoren,** tj. **s** kružnicom,

ili

II. **otvoren,** tj. **bez** nje.

(U običnom govoru ljudi ne razlikuju ta dva slučaja jer za to nema nikakve praktične potrebe, ali u matematičkom govoru to je razlikovanje teorijski i komunikacijski itekako potrebno da bi se matematičari mogli točno izražavati o dva različita, važna i česta pojma, i tako da ne bi bilo nikakve sumnje u to o čemu se radi.)

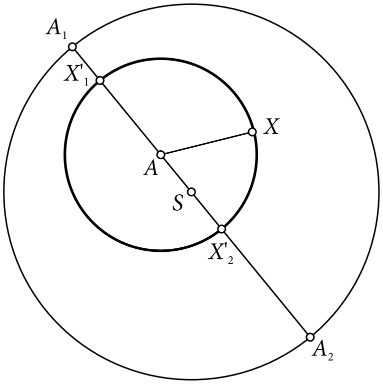
Nacrtat ćemo uzorak svake vrste staza i opisati točno o kojoj se vrsti radi u I. i II. slučaju.

Šutke smo pretpostavili da je $a \neq 0$. Razmotrite i slučaj da je $a = 0$.

Rješenje. Pod uvjetima zadanih podataka i samog zadatka postoje samo tri vrste staza, ovisno o međuodnosima veličina r, a i d.

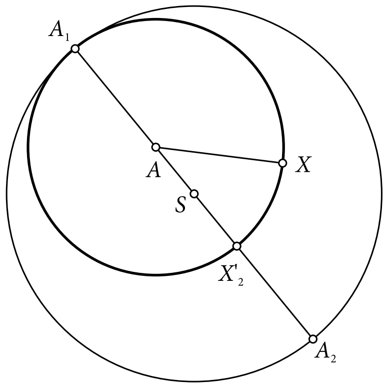
1. vrsta: Ako je $d < r - a$, tada su staze i u I. i u II. slučaju **kružnice** unutar kruga K (vidi sl. 1).

2. vrsta: Ako je $d = r - a$, tada je staza u I. slučaju **kružnica** koja iznutra *dira* (*tangira*) kružnicu u *diralištu* $A_1 = X_1 = X_2 = X'_1$ koje **pripada** kružnici, a u II. slučaju je **bez** dirališta A_1 (vidi sl. 2.).



Slika 2.

$A_1 = X'_1 = X_1 = X_2$



Slika 3.

3. vrsta: Ako je $r - a < d < r + a$, tada su staze **lukovi kružnice** $k(A, d)$ sa središtem A polumjera d, i to u I. slučaju **s** rubnim točkama X_1 i X_2, a u II. slučaju **bez** njih (vidi sl. 3.).

Konačno, ako je $a = 0$ tj. $A = S$, tada su staze i u I. slučaju i u II. slučaju (**koncentrične**) **kružnice** $k_K(S, d)$ s istim središtem S polumjera d, i to u I. slučaju **s** kružnicom, a u II. slučaju **bez** nje.

DODATAK. Ako je $d = r + a$, tada ni I. ni II. slučaj nisu mogući. Zašto?

Ako bismo ipak oslabili uvjet o točki X dopustivši u I. slučaju da može biti **na kružnici**, tada ne bi postojala prava staza nego tzv. *izrođena* (*degenerirana*) koja se sastoji samo od točke $A_2 = X = X_1 = X_2 = X'_2$.

Preostaje još razmotriti vrste staza dopustivši u I. i II slučaju da točka A može biti **na kružnici**, a da točka X, kao u izvornom zadatku, ne može; i da u I. slučaju obje točke A i X mogu biti **na kružnici**. Razmislite i o ta dva slučaja.