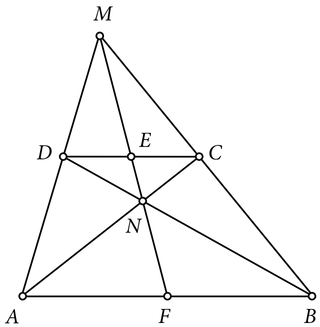
# GEOMETRIJSKE KONSTRUKCIJE JEDNOBRIDNIM RAVNALOM

Vlado Stošić, Zagreb

*Jednobridno ravnalo* je svako ravnalo na kojemu pri izvođenju geometrijske konstrukcije rabimo samo jedan brid. Neke geometrijske konstrukcije jednobridnim ravnalom moguće je provesti samo uz odgovarajuće uvjete, uz primjenu odgovarajućih poučaka.

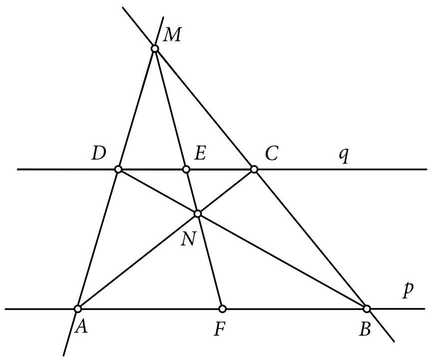
Temeljni poučak koji primjenjujemo pri geometrijskoj konstrukciji jednobridnim ravnalom glasi:

**Poučak.** Sjecište dijagonala trapeza, točka u kojoj se sijeku pravci koji sadrže krakove trapeza i polovišta obiju osnovica trapeza pripadaju jednom pravcu.[1]




**Zadatak 1.** Dana su dva usporedna pravca i točke $A$ i $B$ na jednom od tih dvaju pravaca. Konstruirajte polovište dužine $\overline{AB}$ uporabom jednobridnog ravnala.

*Rješenje*. Neka su pravci $p$ i $q$ usporedni. Neka točke $A$ i $B$ pripadaju pravcu $p$. Točkama $A$ i $B$ nacrtamo pravce koji se sijeku u točki $M$ s iste strane pravca $p = AB$ na kojoj se nalazi i pravac $q$. Neka je točka $D$ presjek pravca $AM$ i pravca $q$. Neka je točka $C$ presjek pravca $BM$ i pravca $q$. Sad nacrtamo točku $N$ koja je presjek dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ trapeza $ABCD$. Tada pravac $MN$ siječe pravac $AB = p$ u točki $F$. Točka $F$ je polovište dužine $\overline{AB}$, tj. $|AF| = |FB|$.

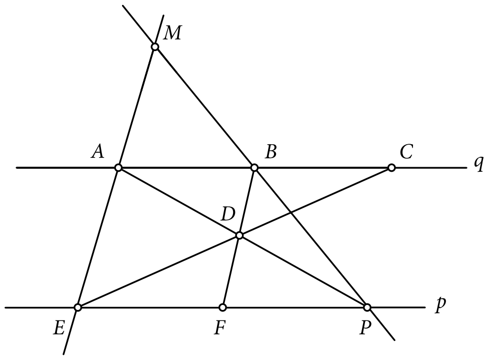



[1]Dokaz ovog poučka nalazi se u Matki broj 52, članak *Trapez* V. Stošića.

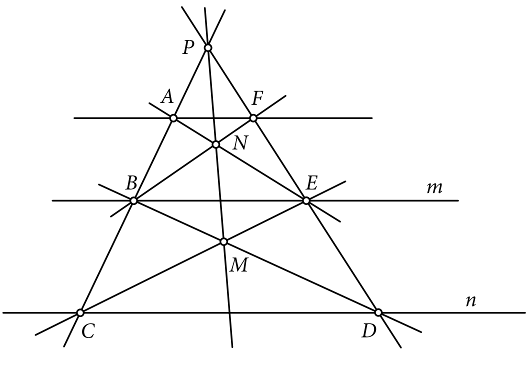
**Zadatak 2.** Dana su dva usporedna pravca. Na jednom od tih pravaca istaknute su točke $A$ i $B$. Na pravcu $AB$ konstruirajte jednobridnim ravnalom točku $C$, tako da je $|AC| = 2|AB|$.

*Rješenje*. Neka su $p$ i $q$ dva usporedna pravca i neka je $AB = q$. Na pravcu $p$ odaberemo točke $E$ i $P$, a izvan pravca $p$ i $q$ odaberemo točku $M$. Sada, kako je pokazano u zadatku 1., lako konstruiramo točku $F$ na pravcu $p$ koja je polovište dužine $\overline{EP}$. Neka je točka $D$ presjek pravca $AP$ i pravca $BF$. Presjek pravca $ED$ i pravca $AB = q$ je tražena točka $C$.

*Dokaz*. Lako se pokaže da je $\Delta DEF \sim \Delta BCD$ i $\Delta DFP \sim \Delta ABD$. Iz prve sličnosti vrijedi razmjer $|DF| : |EF| = |BD| : |BC|$, ili $|DF| : |BD| = |EF| : |BC|$. Iz druge sličnosti vrijedi razmjer $|DF| : |FP| = |BD| : |AB|$, ili $|DF| : |BD| = |FP| : |AB|$. Budući da su lijeve strane dvaju dobivenih razmjera jednake, nužno slijedi i jednakost njihovih desnih strana, tj. $|EF| : |BC| = |FP| : |AB|$, ili $|EF| : |FP| = |BC| : |AB|$. Zbog $|EF| = |FP|$ dobivamo da je $|BC| = |AB|$. Iz jednakosti $|AB| + |BC| = |AC|$ dobivamo jednakost $|AB| + |AB| = |AC|$, tj. $|AC| = 2|AB|$.



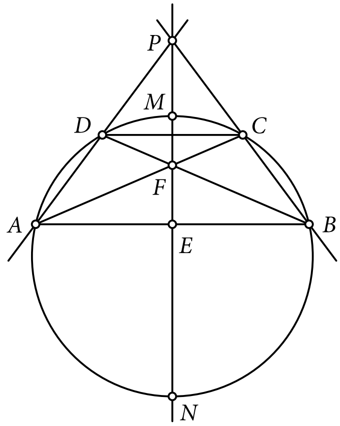

**Zadatak 3.** Dana su dva usporedna pravca $m$ i $n$, i točka $A$ koja ne pripada niti jednom od pravaca $m$ i $n$. Točkom $A$ konstruirajte pravac usporedan s pravcima $m$ i $n$ uporabom jednobridnog ravnala.




*Rješenje*. Točkom $A$ nacrtamo pravac koji presijeca pravac $m$ u točki $B$, a pravac $n$ u točki $C$. Iz neke točke $P$ na pravcu $AB$ nacrtamo još jedan pravac koji siječe pravac $m$ u točki $E$, a pravac $n$ u točki $D$. Neka je točka $M$ presjek pravaca $BD$ i $CE$. Neka je točka $N$ presjek pravca $PM$ i pravca $AE$. Neka je točka $F$ presjek pravca $BN$ i pravca $PD$. Tada je $AF$ traženi pravac, tj. $AF \parallel m \parallel n$.

**Zadatak 4.** Dana je kružnica i dvije usporedne tetive $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ različitih duljina, pri čemu niti jedna od tih dviju tetiva nije promjer dane kružnice. Konstruirajte promjer dane kružnice okomit na tetive $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ uporabom jednobridnog ravnala.

*Rješenje*. Neka je točka $P$ presjek pravca $AD$ i pravca $BC$. Neka je točka $F$ presjek pravca $AC$ i pravca $BD$. Neka su točke $M$ i $N$ presjek pravca $PF$ i dane kružnice. Dužina $\overline{MN}$ je traženi promjer, pri čemu je $MN \perp AB$.




*Dokaz*. Četverokut $ABCD$ je jednakokračni trapez, iz čega slijedi da je $|\angle BAD| = |\angle ABC|$, a to znači da je trokut $ABP$ jednakokračan, pa je $|PA| = |PB|$. Neka je točka $E$ presjek pravca $PF$ i pravca $AB$. Tada je, zbog $|AE| = |EB|$, pravac $PE$ okomica iz vrha $P$ na osnovicu $\overline{AB}$ jednakokračnog trokuta $ABP$, a to znači da je $PE \perp AB$, pri čemu traženi promjer $\overline{MN}$ dane kružnice leži na pravcu $PE$. Naime, pravac $PE$ je simetrala tetive $\overline{AB}$, a simetrala tetive uvijek prolazi središtem kružnice.

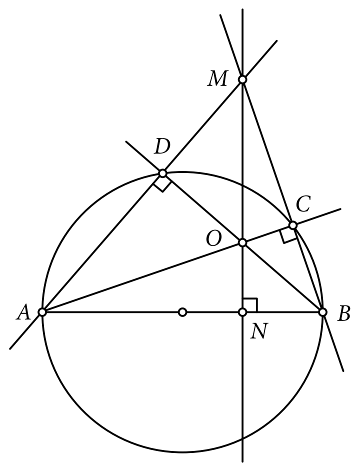
*Napomena*. Zbog toga što četiri točke trapeza u navedenom poučku pripadaju jednom pravcu, nužno slijedi da je za crtanje tog pravca, a koji je važan za izvođenje konstrukcije jednobridnim ravnalom primjenom navedenog poučka, dovoljno znati položaj bilo koje 2 od te 4 točke.

Naravno, primjena poučka o četiri točke trapeza nije i jedini način geometrijske konstrukcije uporabom jednobridnog ravnala.

**Zadatak 5.** Dana je kružnica promjera $\overline{AB}$ i točka $M$ koja ne pripada danoj kružnici niti pravcu $AB$. Konstruirajte okomicu točkom $M$ na pravac $AB$ uporabom jednobridnog ravnala.

*Rješenje.* Konstrukcija tražene okomice jednobridnim ravnalom svodi se na konstrukciju ortocentra trokuta $ABM$ primjenom Talesovog poučka. S obzirom na položaj točke $M$ prema danoj kružnici, razlikujemo ove slučajeve:

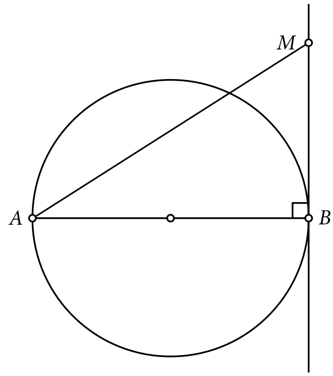
$1^{\circ}$. Neka je točka $M$ tako odabrana da je trokut $ABM$ šiljastokutan.



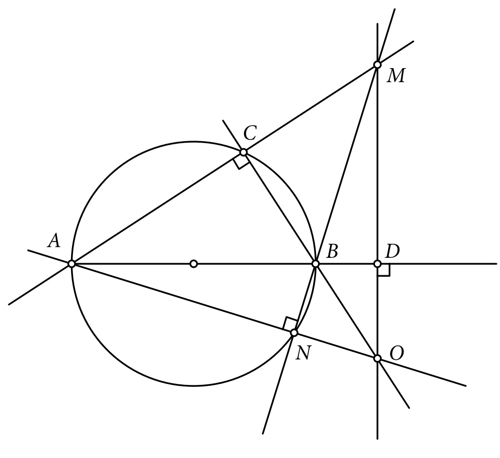
Nacrtajmo pravac $MA$ i pravac $MB$. Neka je točka $C$ presjek pravca $MB$ i dane kružnice, a točka $D$ presjek pravca $MA$ i dane kružnice. Tada je, prema Talesovom poučku, $|\angle ACB| = |\angle ADB| = 90°$, a to znači da su dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ visine trokuta $ABM$. Neka je točka $O$ presjek okomica $AC$ i $BD$ koje sadrže visine. Zato je točka $O$ ortocentar trokuta $ABM$. To znači da pravac $MO$ sadrži treću visinu trokuta $ABM$, iz čega slijedi da je pravac $MO$ okomica iz točke $M$ na pravac $AB$, tj. $MO \perp AB$.

Pravac $MO$ je tražena okomica iz točke $M$ na pravac $AB$.

2°. Ako je točka $M$ tako odabrana da je trokut $ABM$ pravokutan, tj. $|\angle ABM| = 90°$, onda je pravac $MB$ tražena okomica na pravac $AB$.




3°. Neka točka $M$ leži izvan kružnice, tako da je trokut $ABM$ tupokutan, tj. $|\angle ABM| > 90°$.



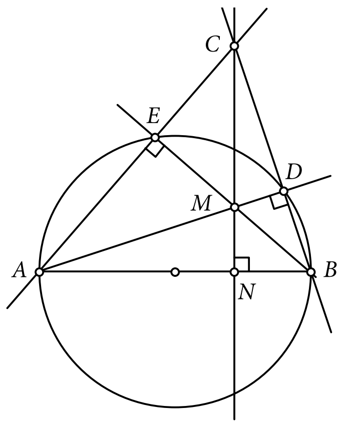

Treba konstruirati ortocentar tupokutnog trokuta $ABM$. Nacrtamo pravac $MA$. Neka je točka $C$ presjek pravca $MA$ i dane kružnice. Sada nacrtamo pravac $BC$. Zbog $|\angle ACB| = 90°$ slijedi da je dužina $\overline{BC}$ jedna visina trokuta $ABM$. Dalje, nacrtamo pravac $MB$.

Neka je točka *N* presjek pravca *MB* i dane kružnice. Zbog $|\angle ANB| = 90°$ slijedi da je dužina $\overline{AN}$ druga visina tupokutnog trokuta *ABM*. Presjek pravca *BC* i pravca *AN* je ortocentar *O* tupokutnog trokuta *ABM*. To znači da pravac *MO* sadrži treću visinu trokuta *ABM*. Neka je točka *D* presjek pravac *MO* i pravca *AB*, iz čega slijedi da je dužina $\overline{MD}$ treća visina trokuta *ABM* jer je $|\angle MDA| = 90°$, pa je $MO \perp AB$.

Zato je pravac *MO* tražena okomica iz točke *M* na pravac *AB*.

4°. Neka točka *M* leži unutar dane kružnice. Nacrtamo pravac *AM*. Neka je točka *D* presjek pravca *AM* i dane kružnice. Nacrtamo pravac *BM*. Neka je točka *E* presjek pravca *BM* i dane kružnice. Neka je točka *C* presjek pravca *AE* i pravca *BD*. Zbog $|\angle AEB| = |\angle ADB| = 90°$ zaključujemo da su dužine $\overline{AD}$ i $\overline{BE}$ dvije visine trokuta *ABC*. To znači da je točka *M* ortocentar trokuta *ABC*, iz čega slijedi da je $CM \perp AB$.

Zato je pravac *CM* tražena okomica iz točke *M* na pravac *AB*.




**Zadatci**

**6.** Dvije kružnice dodiruju se izvana u točki *P*. Pravac kroz točku *P* siječe jednu kružnicu u točki *A*, a drugu kružnicu u točki *C*. Drugi pravac koji prolazi točkom *P* siječe prvu kružnicu u točki *B*, a drugu kružnicu u točki *D*. Dokažite da je $AB \parallel CD$.

**7.** Dana je dužina $\overline{AB}$, točka *C* polovište te dužine i točka *M* koja ne leži na pravcu *AB*. Točkom *M* konstruirajte jednobridnim ravnalom pravac usporedan s pravcem *AB*.

**8.** Dana je kružnica promjera $\overline{AB}$ i točka *M* na toj kružnici. Konstruirajte jednobridnim ravnalom okomicu točkom *M* na dani promjer $\overline{AB}$.

**9.** Dane su dvije kružnice različitih polumjera koje se dodiruju izvana u točki *P*. Konstruirajte jednobridnim ravnalom promjer veće kružnice.