Mr Milorad Bojanić
Fakultet organizacije i informatike
V a r a ž d i n

UDK 65.012.1
Stručni rad

RAZMJEŠTAJ GEOMETRIJSKIH OBJEKATA U TRAKU BESKONAČNE DUŽINE I ZADANE ŠIRINE

Rad predstavlja nastavak istraživanja problema razmještaja geometrijskih objekata u oblast razmještaja. Posebna pažnja bit će posvećena, u ovom radu, jednorednom razmještaju konveksnih mnogokutnika u traku (prostor R^2) čije su dimenzije takve da je zadana njena širina, dok je dužina trake "beskonačna". Ovakvi problemi jednorednog razmještaja prisutni su kod mnogih praktičnih situacija, a napose oni su posebno naglašeni kod krojenja materijala.

1. UVOD

Položaj objekta A_1 u prostoru R^2 odredjen je zadanim koordinatama $x_1^1, x_1^1, \ldots, x_n^1$ pola 0´ i kutevima $\Theta_1^1, \Theta_1^1, \ldots, \Theta^1_{n(n-1)/2}$ koji odredjuju smjer osiju pomičnog sustava koordinata u odgovarajućem nepomičnom sustavu. Parametri x^1 odredjuju paralelni pomak pomičnog koordinatnog sustava, tj. translaciju, dok parametri Θ^1 odredjuju pomak koordinatnog sustava oko centra 0´, tj. rotaciju. Navedeni parametri nazivaju se parametri razmještaja geometrijskih objekata u prostoru (1; 361).

Periodično se objekti $\{A_i\}_n$ razmještaju kada, barem, jedan od parametara svakog od objekata A_i (i = 1, 2,..., n) mijenja svoju vrijednost od jednog do drugog položaja objekta za jednu te istu veličinu koja se naziva periodom po tom parametru. Jednoredan periodični razmještaj objekata {A} je takav razmještaj kod kojega, barem, jedan od parametara mijenja svoju vrijednost za jednu te istu veličinu od jednog do drugog položaja objekta u prostoru. U ovakvom slučaju period i polovi objekata {A} nalaze se na jednoj te istoj liniji (1; 364).

Svaki problem razmještaja (regularan i neregularan) /1; 366/ geometrijskih objekata slijedećih je osnovnih svojstava:

- kod svakog problema radi se o razmještaju geometrijskih objekata prozvoljnih oblika u oblasti proizvoljnih geometrijskih oblika i

- svaki problem formulira se kao problem matematičkog programiranja, tj. predstavlja se u obliku nekih uvjeta (ograničenja) nad parametrima razmještaja pri kojima je neophodno postići ovaj ili onaj cilj (1; 366).

Struktura je formuliranih problema razmještaja geometrijskih objekata takva da njihova matematička postavka uključuje obavezno:

- uvjete uzajamnog nepresijecanja objekata (razmješteni geometrijski objekti mogu se dodirivati ili se nalaziti na zadanom rastojanju jedan od drugoga),
- uvjete razmještaja objekata u zadanom objektu ili zadanoj oblasti (ovdje se pretpostavlja da izmedju razmještenih objekata i granica oblasti uvijek postoji unaprijed zadano rastojanje) i
- formalno predstavljanje funkcije cilja pomoću matematičkih simbola i zavisnosti (1; 366).

Prva dva uvjeta matematički se izražavaju pomoću slijedećih relacija:

$$A_i \setminus a_i \cap A_j \setminus a_j = \emptyset,\ i,j = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq j;$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap Y = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

ili

$$a_{ij}(A_i, A_j) \geqslant 0,\ i,j = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq j;$$

$$a_i(R^2 \setminus Y, A_i) \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

(simbolom a_i izražena je udaljenost) (1; 366).

Iznijete nejednadžbe pokazuju da bi trebalo izraziti, u općem slučaju, uvjete uzajamnog nepresijecanja objekata $\{A_i\}_n$ i uvjete razmještaja u oblast Y, slijedećim nejednadžbama:

$$q_{ij}(x^i, \theta^i, x^j, \theta^j) \geqslant 0,\ i \neq j,\ i,j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$q_i(x^i, \theta^i) \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

koje medjusobno "povezuju" parametri razmještaja objekata i njihova su suštinska ograničenja (1; 367).

Konkretizacija uvjeta uzajamnog nepresijecanja objekata realizira se preko funkcije gustog razmještaja $f(\Theta)$, dok se uvjet razmještaja objekata u zadanu oblast realizira preko potporne funkcije $H(\Theta)$. Funkcija cilja kod razmještaja geometrijskih objekata može poprimiti veoma različite oblike. Ona može sama po sebi predstavljati najraznovrsnije odnose koji zavise od parametara razmještaja objekata. Funkcija cilja u svom općem obliku može se izraziti ovom relacijom (1; 367):

$$f = f(x^1, \Theta^1, x^2, \Theta^2, \dots, x^n, \Theta^n).$$

Navedene opće matematičke postavke problema razmještaja objekata zahtijevat će, u svakom konkretnom problemu razmještaja, pronalaženje postupaka analitičkog opisivanja uvjeta medjusobnog nepresijecanja objekata te analitičku postavku problema razmještaja i postupke za njeno rješenje.

2. FUNKCIJA GUSTOG RAZMJEŠTAJA I NJEN HODOGRAF

Objekti A_1 i A_2 su gusto razmješteni ukoliko se dodiruju, tj. u onom slučaju kada su im zajedničke samo rubne točke. Uvjet gustog razmještaja A_1 i A_2 može se izraziti slijedećim relacijama:

$$A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$$

$$A_1 \setminus a_1 \cap A_2 \setminus a_2 = \emptyset,$$

gdje su a_1 i a_2 granice odgovarajućih objekata.

Medjutim, ukoliko je zadana kraća udaljenost l_{12} izmedju objekata A_1 i A_2, objekti su gusto razmješteni ako je udaljenost $r_{12}(A_1, A_2) = l_{12}$. Udaljenost $r_{12}(A_1, A_2)$ definirana je rastojanjem polova O_1 i O_2 objekata A_1 i A_2. Zavisnost ove udaljenosti od medjusobnog razmještaja objekata A_1 i A_2 naziva se funkcijom gustog razmještaja promatranih objekata.

Hodograf vektora r_{12} naziva se hodografom funkcije gustog razmještaja, te je hodograf funkcije gustog razmještaja takva linija na kojoj leži pol pokretnog objekta A_2 ako su objekti A_1 i A_2 gusto razmješteni (2; 16).

Hodograf funkcije gustog razmještaja konveksnih, zatvorenih i medjusobno orijentiranih mnogokutnika predstavljen je rubom konveksnog mnogokutnika te može biti zadan ili jednadžbama pravaca, na kojima leže njegove stranice, ili koordinatama svojih vrhova. Hodograf funkcije gustog razmještaja spomenute klase objekata ima najviše k+q stranica, gdje je k i q broj stranica objekata A_1 i A_2.

Ukoliko su objekti A_1 i A_2 gusto razmješteni, tada svakom vrhu $C_{ij}(x_{ij}, y_{ij})$ hodografa funkcije gustog razmještaja korespondira poklapanje jednog od vrhova A_i^1 objekta A_1 s nekim vrhom A_j^2 objekta A_2. Koordinate (x_{ij}, y_{ij}) vrhova C_{ij} hodografa funkcije gustog razmještaja izračunavaju se kao razlika koordinata vrhova koji se poklapaju a pripadaju objektima A_1 i A_2. Pri tome su koordinate vrhova objekta A_1 zadane u nepokretnom sustavu koordinata xOy, a koordinate vrhova objekta A_2 u pokretnom sustavu koordinata x'O'y' (2; 16).

Za postavljanje hodografa funkcije gustog razmještaja konveksnih, medjusobno orijentiranih mnogokutnika postoji više postupaka. Ovdje će biti opisan onaj postupak koji je podoban za ručno izračunavanje ili uz pomoć elektroničkog računala.

Neka su zadani vrhovi objekta A_1 koordinatama (x_{1i}, y_{1i}) $(i = 1, 2, \ldots, n)$ u nepokretnom koordinatnom sustavu xOy, a vrhovi objekta A_2 nizom koordinata (x_{2j}, y_{2j}) $(j = 1, 2, \ldots, m)$ u pokretnom sustavu x'O'y'. Koordinate vrhova hodografa neka su označene s $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, p$ i $p \leq n + m)$. Poklopi li se pokretni koordinatni sustav s nepokretnim sustavom koordinata tako da se polovi O_1 i O_2 nadju u ishodištu koordinatnog sustava, jednadžbe pravaca koje prolaze točkama A_{1i}, A_{1i+1} $(i = 1, 2, \ldots, n)$ i točkama A_{2j}, A_{2j+1} $(j = 1,2, \ldots, m)$ mogu se predstaviti u slijedećem obliku:

$$\phi_i(x, y) = (y-y_{1i+1})(x_{1i+1}-x_{1i})-(x-x_{1i+1})(y_{1i+1}-y_{1i}) = 0 \quad (1)$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$\psi_j(x, y) = (y-y_{2j+1})(x_{2j+1}-x_{2j})-(x-x_{2j+1})(y_{2j+1}-y_{2j}) = 0 \quad (2)$$

$(j = 1, 2, \ldots, m)$.

Izabere li se pozitivan smjer obilaženja objekta A_2 oko objekta A_1 (protivno kazaljkama sata), koordinate točaka (x, y) objektá A_1 i A_2 uvrštene u izraz (1), odnosno (2) daju pozitivna odstupanja. Da se odredi početna točka obilaska objekta A_2 oko objekta A_1, potrebno je izmedju vrhova $A_{2j}(x_{2j}, y_{2j})$ objekta A_2 izabrati onu točku A_{2k} (x_{2k}, y_{2k}) koja udovoljava uvjetu:

$$\phi_1(x_{2k}, y_{2k}) = \max_{j\in[1,m]} \phi_1(x_{2j}, y_{2j}). \quad (3)$$

Neka je kao početna točka obilaska objekta A_2 oko objekta A_1 uzeta točka $A_{2k}(x_{2k}, y_{2k})$, tj. ona točka koja zadovoljava relaciju (3). Ako se sada podigne objekt A_2 tako da vrh $A_{2k}(x_{2k}, y_{2k})$ padne u vrh $A_{11}(x_{11}, y_{11})$ objekta A_1, pol O' objekta A_2 naći će se u vrhu hodografa $C_{1k}(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$. Ovako dobiveni vrh hodografa uzima se kao početni te se njegove koordinate izračunavaju izrazima (2; 18):

$$\begin{aligned} \bar{x}_1^{(1,k)} &= x_{11} - x_{2k} \\ \bar{y}_1^{(1,k)} &= y_{11} - y_{2k}. \end{aligned} \tag{4}$$

U izrazu (4) gornji indeksi koordinata ukazuju na one vrhove objekata A_1 i A_2 koji su korišteni kod formiranja promatranog vrha hodografa.

Kada je dobiven početni položaj objekta A_2, njegovo obilaženje oko objekta A_1 može se ostvariti na jedan od moguća tri načina: ili vrh objekta A_2 klizi stranicom objekta A_1, ili stranica objekta A_2 klizi po vrhu objekta A_1, ili stranica objekta A_2 klizi po stranici objekta A_1. Za izračunavanje koordinata slijedećih vrhova hodografa potrebno je analizirati uzajamni odnos stranica općenito označenih s $A_{1r}A_{1r+1}$ objekta A_1 i $A_{2s}A_{2s+1}$ objekta A_2. Ova se analiza izvodi uvrštavanjem koordinata x_{1r}, y_{1r} točaka A_{1r} i koordinata x_{1r+1}, y_{1r+1} točaka A_{1r+1} u jednadžbe pravaca koje prolaze točkama $A_{2s}A_{2s+1}$. Na taj se način odredjuje odstupanje točaka A_{1r} i A_{1r+1} od pravaca $A_{2s}A_{2s+1}$ pri čemu može biti ispunjena jedna od relacija:

$$\psi_s(x_{1r}, y_{1r}) = \psi_s(x_{1r+1}, y_{1r+1}) \tag{5}$$

$$\psi_s(x_{1r}, y_{1r}) < \psi_s(x_{1r+1}, y_{1r+1}) \tag{6}$$

$$\psi_s(x_{1r}. y_{1r}) > \psi_x(x_{1r+1}, y_{1r+1}). \tag{7}$$

U zavisnosti od ispunjenja jedne od relacija (5) - (7) izračunavaju se vrhovi hodografa funkcije gustog razmještaja na jedan od načina respektiranjem redoslijeda (2; 19):

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_{i+1}^{(r+1,s+1)} &= x_{1r+1} - x_{2s+1} \\ \bar{y}_{i+1}^{(r+1,s+1)} &= y_{1r+1} - y_{2s+1} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_{i+1}^{(r+1,s)} &= x_{1r+1} - x_{2s} \\ \bar{y}_{i+1}^{(r+1,s)} &= y_{1r+1} - y_{2s} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_{i+1}^{(r,s+1)} &= x_{1r} - x_{2s+1} \\ \bar{y}_{i+1}^{(r,s+1)} &= y_{1r} - y_{2s+1} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$(i = 2, 3, \ldots, g;\ g \leq n + m)$.

Ovaj proces izračunavanja vrhova hodografa obavlja se tako dugo dok se neki idući nadjeni vrh hodografa ne poklopi s prvim vrhom C_{11}.

Radi ilustracije odredjivanja vrhova hodografa funkcije gustog razmještaja neka je zadan četverokut A_1 s koordinatama vrhova: A_{11} (2; 3), A_{12}(-2; 1), A_{13} (-1; -2) i A_{14} (1; -1). Neka je objekt A_2 četverokut sukladan četverokutu A_1. Da se odrede koordinate prvog vrha objekta A_2 a s time i koordinate prvog vrha hodografa, potrebno je preko relacije (1) i koordinata vrhova objekta A_1 izračunati odstupanja. Jednadžba pravca koji prolazi vrhovima A_{11} i A_{12} objekta A_1 je $\phi_1(x,y) = 2x-4y+8$, dok su odstupanja pojedinih točaka A_{1i} od tog pravca jednaka: $\phi_1(2;3)=0$; $\phi_1(-2;1)=0$; $\phi_1(-1;-2)=14$ i $\phi_1(1;-1)=14$. Kako je u ovom slučaju max $\phi_1(x_{2i}, y_{2i})$ postignut za dvije točke, prvi vrh objekta A_2 može biti s koordinatama $A_{21}(-1;-2)$ ili $A_{21}(1;-1)$. Izabere li se za prvi vrh objekta A_2 vrh s koordinatama $A_{21}(-1;-2)$, tada ostali vrhovi objekta A_2 imaju koordinate: $A_{22}(1;-1)$, $A_{23}(2;3)$ i $A_{24}(-2;1)$. Koordinate prvog vrha hodografa C_{11} korištenjem izraza (4) jesu: $\bar{x}_1^{(1,1)} = 2-(-1) = 3$ i $\bar{y}^{(1,1)} = 3-(-2)=5$.

Za izračunavanje koordinata drugog vrha hodografa potrebno je izračunati jednadžbu pravca kroz točke A_{21} i A_{22}. Ta jednadžba glasi: $\psi_1(x,y) = -x+2y+3$, te su odstupanja točaka A_{11} i A_{12} od tog pravca jednaka: $\psi_1(2;3)=7$ i $\psi_1(-2;1)=7$. Kako je $\psi_1(2;3) = \psi_1(-2;1)$ /izraz (5)/, to se koordinate drugog vrha hodografa izračunavaju pomoću izraza (8) te je $C_{22}(-3; 2)$. Kako je za izračunavanje koordinata drugog vrha hodografa korišten izraz (5), to je za izračunavanje koordinata trećeg vrha hodografa potrebno, prvenstveno, izračunati jednadžbu pravca kroz točke A_{22} i A_{23} objekta A_2 koja glasi: $\psi_2(x,y) = -4x+y+5$. Odstupanja točaka A_{12} i A_{13} od izračunatog pravca iznose: $\psi_2(-2;1) = 14$ i $\psi_2(-1;-2) = 7$. Budući da je $\psi_2(-2;1) > \psi_2(-1;-2)$, treći vrh hodografa ima koordinate /izraz (10)/: -4; -2, te je $C_{23}(-4;-2)$.

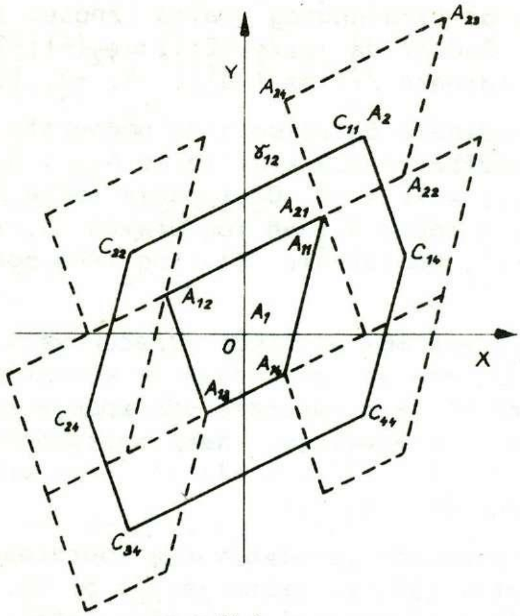
Izračunavanje koordinata četvrtog vrha hodografa započinje izračunavanjem jednadžbe pravca kroz točke A_{23} i A_{24} objekta A_2 koja glasi: $\psi_3(x,y) = 2x-4y+8$. Odstupanje točke A_{12} od pravca $\psi_3(x,y)$ iznosi 0, a točke A_{13} od tog pravca 14, te kako je $\psi_3(-2;1) < \psi_3(-1;-2)$, koordinate četvrtog vrha hodografa /izraz (9)/ jesu $C_{33}(-3;-5)$.

Zbog korištenja izraza (6) prilikom izračunavanja koordinata četvrtog vrha hodografa za izračunavanje koordinata petog vrha hodografa potrebno je izračunati odstupanja točaka A_{13} i A_{14} objekta A_1 od pravca $\psi_3(x,y)$. Kako su ta odstupanja medjusobno jednaka, tj. $\psi_3(-1;-2) = \psi_3(1;-1)$, peti vrh hodografa/izraz (8)/ ima koordinate $C_{44}(3;-2)$.

Budući da je u prethodnom izračunavanja koordinata vrha hodografa korišten izraz (5), potrebno je, da bi se izračunale koordinate šestog (i posljednjeg) vrha hodografa, izračunati jednadžbu pravca kroz točke A_{24} i A_{21} objekta A_2. Kako je jednadžba pravca $\psi_4(x,y) = 3x+y+5$, to odstupanja točaka A_{14} i A_{11} objekta A_1 od $\psi_4(x,y)$ iznose 7 odnosno 14, te budući da je $\psi_4(1;-1) < \psi_4(2;3)$, šesti vrh hodografa /izraz (9)/ ima koordinate C_{14} (4;2).

Prati li se na slici 1. obilaženje objekta A_2 oko objekta A_1, onda se može primijetiti da su neke stranice objekta A_2(A_{21} A_{22},$A_{23}A_{24}$) klizile po nekim stranicama objekta A_1 ($A_{11}A_{12}$, $A_{13}A_{14}$). U takvom slučaju dobivene su dvije paralelne stranice hodografa funkcije gustog razmještaja ($C_{11}C_{11}$, $C_{33}C_{44}$). Nadalje, može se na slici 1. vidjeti da su stranice hodografa $C_{14}C11$ i $C_{13}C_{33}$ paralelne kao što su paralelne i stranice $C_{44}C_{14}$ i $C_{11}C_{13}$. U oba ova slučaja jedan od vrhova ili objekta A_1 ili objekta A_2 je klizio po jednoj od stranici objekta A_2 ili objekta A_1. (označavanje vrhova hodografa izvedeno je u zavisnosti od vrhova objekta A_1 i A_2 koji su sudjelovali u formiranju odredjenog vrha hodografa).

Kada su izračunate sve koordinate vrhova hodografa, može se pristupiti izračunavanju funkcije gustog razmještaja koja izražava udaljenost polova O_1 i O_2 gusto razmještenih objekata za kuteve Θ(u ovom slučaju korak za kut Θ iznosit će 1^0).Trag funkcije gustog razmještaja, gdje je $\Theta\varepsilon[0,2\pi]$, predstavlja



Sl. 1

hodograf funkcije gustog razmještaja. Zbog toga svakoj vrijednosti funkcije gustog razmještaja odgovara udaljenost od pola hodografa do neke točke koja se na njemu nalazi, tj. $f_{12}(\Theta) = (x^2 + y^2)^{1/2}$. Nadalje, svakoj točki koja leži na hodografu funkcije gustog razmještaja korespondira kut nagiba vektora koji spaja pol hodografa s tom točkom, tj. $\Theta = \mathrm{arctg}\ (y/x)$.

Ukoliko se sa ρ_i označi udaljenost od pola do i-te stranice hodografa, funkcija gustog razmještaja može se izraziti (2;19):

$$f(\Theta) = \rho_i \left|\sec(\Theta_i - \Theta)\right| , \quad \beta_i \leqslant \Theta \leqslant \beta_{i+1}, \quad (i=1,2,\ldots,r) \qquad (11)$$

gdje je:

Θ_i - kut, koji zatvara pravac, okomit na stranicu "i" hodografa a prolazi polom, s osi x,

β_i - kut naklona spojnice pola s i-tim vrhom hodografa,

r - broj vrhova hodografa funkcije gustog razmještaja.

Za izračunavanje funkcije gustog razmještaja /prema izrazu(11)/ potrebno je prvenstveno odrediti jednadžbe pravaca koji prolaze vrhovima hodografa. Na osnovi koordinata vrhova hodografa (idući od prvog prema zadnjem) te jednadžbe pravaca su slijedeće:

$Y_{C_{11}C_{22}} = 1/2x + 7/2$; $Y_{C_{22}C_{23}} = 4x + 14$; $Y_{C_{23}C_{33}} = -3x - 14$;

$Y_{C_{33}C_{44}} = 1/2x - 7/2$; $Y_{C_{44}C_{14}} = 4x - 14$; $Y_{C_{14}C_{11}} = -3x + 14$.

Izračunavanje udaljenosti ρ_i (dužina okomice od stranice hodografa na pol) izvodi se na osnovi parametara jednadžbi pravaca po obrascu:

$$\rho_i = \frac{|b|}{\sqrt{1 + a^2}} \tag{12}$$

Dužine okomica, od prve do zadnje stranice hodografa, na pol jesu slijedeće: $\rho_1 = 3,130495$, $\rho_2 = 3,395499$, $\rho_3 = 4,427189$, $\rho_4 = 3,130495$, $\rho_5 = 3,395499$ i $\rho_6 = 4,427189$.

Na osnovi koordinata vrhova hodografa mogu se izračunati kutevi naklona spojnica vrhova hodografa OC_i s osi x. Ovi kutevi izračunavaju se pomoću izraza:

$$\beta_i = \text{arctg } (y_i/x_i) \tag{13}$$

a iznose: $\beta_1 = 59^0 02'10''$, $\beta_2 = 146^0 18'36''$, $\beta_3 = 206^0 33'54''$, $\beta_4 = 239^0 02'10''$, $\beta_5 = 326^0 18'38''$ i $\beta_6 = 26^0 33'54''$.

Da se dodje do kuteva Θ_i, potrebno je prvenstveno izračunati koordinate točaka K_i u kojima okomica iz pola na stranicu hodografa $C_i C_{i+1}$ presijeca tu stranicu. Za izračun ovih koordinata polazi se od jednadžbi pravaca kroz vrhove hodografa i pravaca koji su okomiti na te pravce. Koordinate točaka K_i su slijedeće: $K_1(-1,4;2,8)$, $K_2(-3,2941176;\ 0,823529)$, $K_3(-4,2;\ -1,4)$, $K_4(1,4;-2,8)$, $K_5(3,2941176;-0,823529)$ i $K_6(4,2;1,4)$. Koordinate ovih točaka dozvoljavaju izračunavanje kuteva Θ_i = = $\text{arctg}(y_i/x_i)$, koji su: $\Theta_1 = 116^0 33'54''$, $\Theta_2 = 165^0 57'50''$, $\Theta_3 = 198^0 26'06''$, $\Theta_4 = 296^0 33'54''$, $\Theta_5 = 345^0 57'50''$ i Θ_6 = = $18^0 26'06''$.

Na osnovi izračunatih parametara moguće je prići izračunavanju funkcije gustog razmještaja na slijedeći način:

$$f(\Theta)=\begin{cases} 3{,}130495\ \left|\sec(116^{\circ}33'54''-\Theta)\right|, & 59^{\circ}02'10''\leq\Theta\leq146^{\circ}18'36'' \\ 3{,}395499\ \left|\sec(165^{\circ}57'50''-\Theta)\right|, & 146^{\circ}18'36''\leq\Theta\leq206^{\circ}33'54'' \\ 4{,}427189\ \left|\sec(198^{\circ}26'06''-\Theta)\right|, & 206^{\circ}33'54''\leq\Theta\leq239^{\circ}02'10'' \\ 3{,}139495\ \left|\sec(296^{\circ}33'54''-\Theta)\right|, & 239^{\circ}02'10''\leq\Theta\leq326^{\circ}18'38'' \\ 3{,}395499\ \left|\sec(345^{\circ}57'50''-\Theta)\right|, & 236^{\circ}18'38''\leq\Theta\leq 26^{\circ}33'54'' \\ 4{,}427189\ \left|\sec(18^{\circ}26'06''-\Theta)\right|, & 26^{\circ}33'54''\leq\Theta\leq 59^{\circ}02'10'' \end{cases}$$

Funkcija gustog razmještaja $f(\Theta)$ mnogokutnih objekata ima slijedeća značajna svojstva (3; 112):

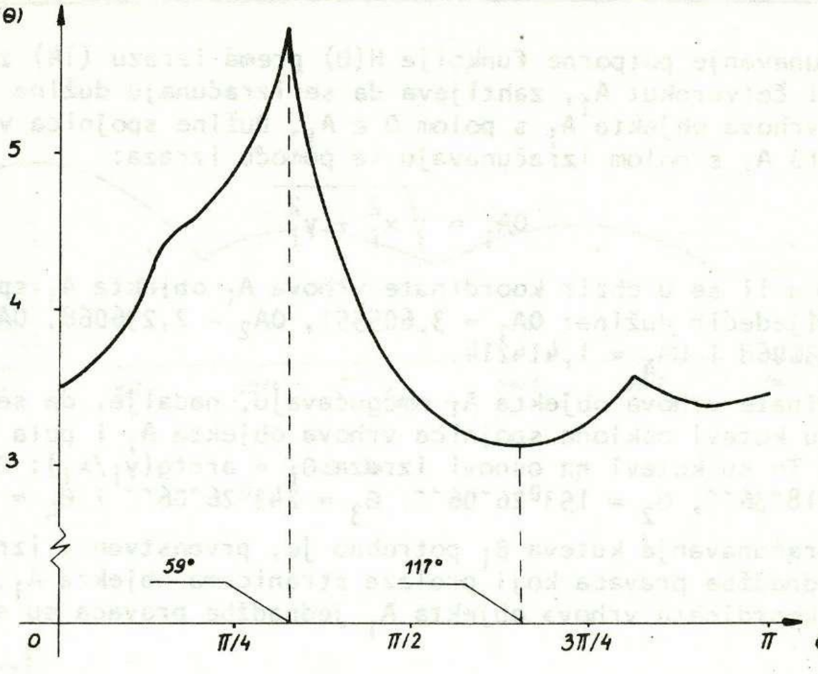
- max $f(\Theta)$ uvijek se postiže samo u točkama gdje se spajaju odresci koji tvore konturu hodografa funkcije gustog razmještaja (mnogokutnim objektima korespondira i mnogokutni hodograf funkcije gustog razmještaja γ_{12}),
- ako su objekti A_1 i A_2 konveksni, tada se min $f(\Theta)$ ne postiže u vrhovima mnogokutnika γ_{12} ; hodograf funkcije gustog razmještaja γ_{12} u takvom slučaju ima oblik konveksnog mnogokutnika,
- ako su objekti A_1 i A_2 konkavni, tada je i njihov hodograf funkcije gustog razmještaja γ_{12}, u općem slučaju, konkavan. Zato se min $f(\Theta)$ može postići i u vrhovima mnogokutnika γ_{12}. Točnije, min $f(\Theta)$ postiže se u onom vrhu mnogokutnika γ_{12} koji se javlja kao vrh unutarnjeg kuta mnogokutnika γ_{12} većeg od π.

Za promatrane objekte A_1 i A_2 izračunate su vrijednosti funkcije gustog razmještaja $f(\Theta)$ u intervalu $[0,\pi]$ i prikazane na slici 2.

Maksimum $f(\Theta)$ (slika 2.) postignut je kod 59^{0} (točnije, analitički je max $f(\Theta)$ postignut kod $\beta_1 = 59\ 02'10''$), a minimum ove funkcije je kod 117^{0} (ili, analitički, kod $\Theta_1 = 116^{0}33'54''$).

3. POTPORNA FUNKCIJA

Odredjivanje širine trake za kut pod kojim će biti razmješteni sukladni objekti izvodi se pomoću potporne (oslonačne) funkcije. U ravnini (R^2) potporna funkcija $H(\Theta)$ predstavlja ovisnost udaljenosti pola 0 objekta $A \subset R^2$ od potpornog pravca, postavljenog na objekt A pod kutem Θ, koji odredjuje smjer okomice spuštene na svaki potporni pravac objekta A (2;16).



Sl. 2

Potporna funkcija zatvorenog, ograničenog i nedegeneriranog objekta $A \subset R^2$ ima slijedeća svojstva (4;58): potporna funkcija $H(\Theta)$ svakog objekta podudara se s potpornom funkcijom njegovog konveksnog omotača; funkcija $H(\Theta)$ je jednoznačna; potporna funkcija je periodična i u općem slučaju ima period od $2k\pi$, $k \in N$; ako objekt A ima "s" ($s \neq 0$) osi simetrije, njegova potporna funkcija ima period jednak $2\pi/s$; funkcija $H(\Theta)$ je neprekidna.

Za konveksni mnogokutnik potporna se funkcija izračunava na slijedeći način. Neka je zadan konveksni mnogokutnik $A \subset R^2$ s koordinatama vrhova $A_i(x_i, y_i)$ tako da je njegov pol smješten u ishodište koordinatnog sustava xOy. Potporna je funkcija sada predstavljena izrazom (2; 16):

$$H(\Theta) = OA_i \left|\cos(\Theta_i - \Theta)\right|, \text{ ako je } \beta_i \leqslant \Theta \leqslant \beta_{i+1} \qquad (14)$$

u kojem su simboli ovih značenja:

OA_i - dužine spojnica vrhova mnogokutnika s polom 0, pri čemu je i = 1, 2, ..., n;

Θ_i - kutevi koje spojnice OA_i zatvaraju s osi x;

β_i - kutevi koji zatvaraju okomice povučene iz pola na stranice A_iA_{i+1} i osi x.

Izračunavanje potporne funkcije $H(\Theta)$ prema izrazu (14) za već zadani četverokut A_1, zahtijeva da se izračunaju dužine spojnica vrhova objekta A_1 s polom $0 \in A_1$. Dužine spojnica vrhova objekta A_1 s polom izračunavaju se pomoću izraza:

$$0A_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \tag{15}$$

te uzmu li se u obzir koordinate vrhova A_i objekta A_1 spojnice su slijedećih dužina: $0A_1 = 3{,}605551$, $0A_2 = 2{,}236068$, $0A_3 = 2{,}236068$ i $0A_4 = 1{,}414214$.

Koordinate vrhova objekta A_1 omogućavaju, nadalje, da se izračunaju kutevi naklona spojnica vrhova objekta A_1 i pola 0 s osi x. To su kutevi na osnovi izraza $\Theta_i = \mathrm{arctg}(y_i/x_i)$: $\Theta_1 = 56^0 18'36''$, $\Theta_2 = 153^0 26'06''$, $\Theta_3 = 243^0 26'06''$ i $\Theta_4 = 315^0$.

Za izračunavanje kuteva β_i potrebno je, prvenstveno, izračunati jednadžbe pravaca koji prolaze stranicama objekta A_1. Na osnovi koordinata vrhova objekta A_1 jednadžbe pravaca su slijedeće:

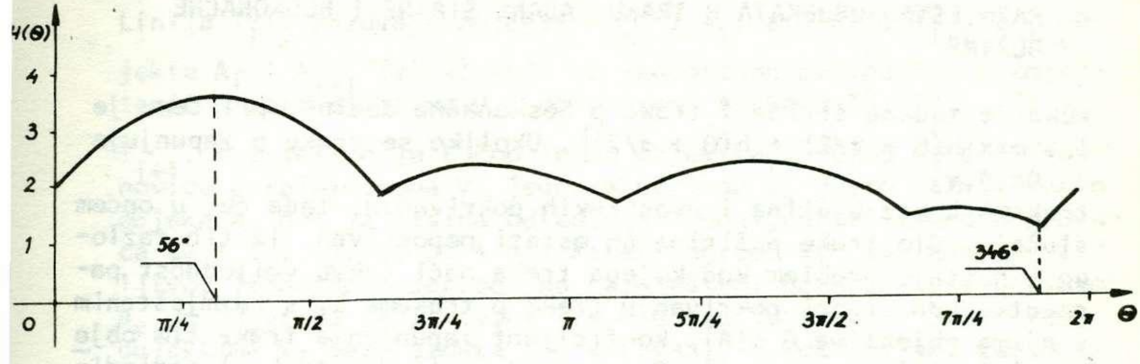
$Y_{A_{11}A_{12}} = 1/2x + 2$; $Y_{A_{12}A_{13}} = -3x - 5$; $Y_{A_{13}A_{14}} = 1/2x - 3/2$ i $Y_{A_{14}A_{11}} = 4x - 5$.

Kada se na ove pravce postave okomiti pravci, mogu se izračunati koordinate točaka M_i u kojima okomica spuštena sa stranice A_iA_{i+1} na pol 0 objekta A_1 presijeca tu stranicu. Koordinate točaka M_i su slijedeće: $M_1(-0{,}8;1{,}6)$, $M_2(-1{,}5;-0{,}5)$, $M_3(0{,}6;-1{,}2)$ i $M_4(1{,}176471;-0{,}294118)$. Koordinate točaka M_i omogućavaju, sada, izračunavanje kuteva $\beta_i = \mathrm{arctg}(y_i/x_i)$, te su oni: $\beta_1 = 116^0 33'54''$, $\beta_2 = 198^0 26'06''$, $\beta_3 = 296^0 33'54''$ i $\beta_4 = 345^0 57'49''$.

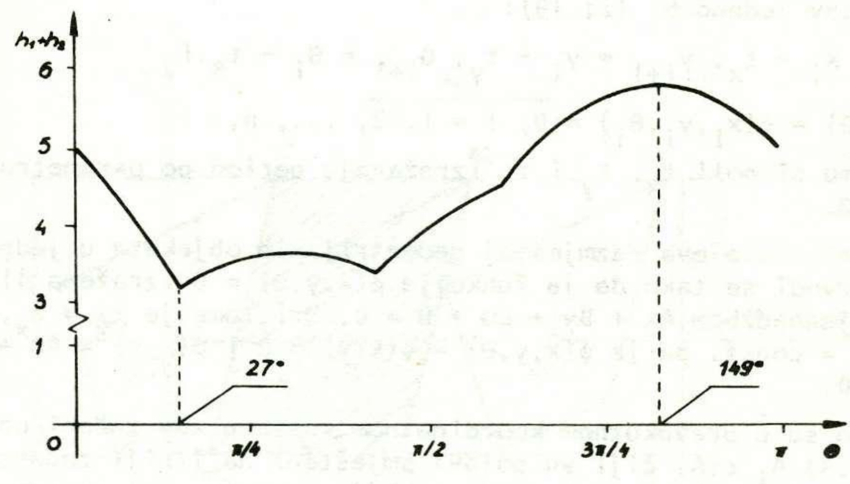
Navedeni elementi omogućavaju izračunavanje vrijednosti potporne funkcije $H(\Theta)$ objekta A_1 na slijedeći način:

$$H(\Theta) = \begin{cases} 2{,}236068\ |\cos(153^0 26'06'' - \Theta)|, & 116^0 33'54'' \leq \Theta \leq 198\ 26'06'' \\ 2{,}236068\ |\cos(243^0 26'06'' - \Theta)|, & 198^0 26'06'' \leq \Theta \leq 296\ 33'54'' \\ 1{,}414214\ |\cos(315^0 00'00'' - \Theta)|, & 296^0 33'54'' \leq \Theta \leq 345\ 57'49'' \\ 3{,}605551\ |\cos(\ 56^0 18'36'' - \Theta)|, & 345^0 57'49'' \leq \Theta \leq 116\ 33'54''. \end{cases}$$

Na slici 3a grafički je prikazana potporna funkcija $H(\Theta)$ i funkcija $\Sigma h(\Theta) = h_1 + h_2 = h(\Theta - \pi/2) + h(\Theta + \pi/2)$ na slici 3b (bit će potrebna u kasnijem izlaganju) objekta $A_1 \subset R^2$. Maksi-



Sl. 3a



Sl. 3b

malnu vrijednost potporna funkcija $H(\Theta)$ ovog objekta ima kod 56^0, dok minimalnu kod 346^0.

Funkcija $\Sigma h(\Theta) = h_1 + h_2 = h(\Theta-\pi/2) + h(\Theta-\pi/2)$, kao što je to vidljivo na slici 3b, ima minimalnu vrijednost kod 27^0, dok joj je maksimalna vrijednost kod 149^0. Na osnovi pojedinih vrijednosti ove funkcije za odredjeni kut Θ odredjena je širina trake L u koju se razmještaju objekti $A_i \in \{A\}$.

4. RAZMJEŠTAJ OBJEKATA U TRAKU ZADANE ŠIRINE I BESKONAČNE DUŽINE

Neka je zadana širina l trake p beskonačne dužine, pri čemu je $l > \max\limits_{\theta\varepsilon[0,\pi]}[h(\theta - \pi/2) + h(\theta + \pi/2)]$. Ukoliko se traku p zapunjuje trakama L bez bjelina i dvostrukih pokrivanja, tada će, u općem slučaju, dio trake p širine Δh ostati nepokriven. Iz tih razloga i nastaje problem kod kojega treba naći takvu vrijednost parametra θ da bi pri pokrivanju trake p trakama L, s razmještenim u njima objektima $A \varepsilon\{A\}$, koeficijent zapunjenja trake tim objektima $A \varepsilon\{A\}$ bio najveći. O jednorednom (jednostrukom) periodičnom razmještaju geometrijskih objekata govori se u onom slučaju kod kojega bar jedan parametar razmještaja od jednog do drugog položaja objekta uvijek mijenja vrijednost za jednu te istu, konstantnu veličinu, tj. period. U općem slučaju, parametri razmještaja jednoredno razmještenih objekata zadovoljavaju slijedeći sustav jednadžbi (2; 19):

$$x_{i+1} = x_i - t_x,\ y_{i+1} = y_i - t_y,\ \theta_{i+1} = \theta_i - t_\theta \text{ i}$$

$$\phi(x,y,\theta) = \phi(x_i,y_i,\theta_i) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

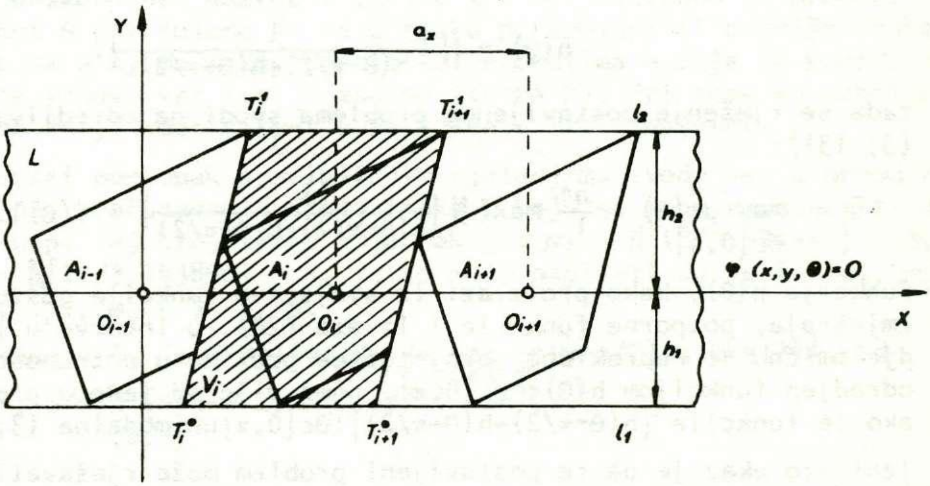
pri čemu simboli t_x, t_y i t_θ izražavaju period po parametru x, y ili θ.

U većini slučajeva razmještaj geometrijskih objekata u jednom redu izvodi se tako da je funkcija $\phi(x,y,\theta) = 0$ izražena linearnom jednadžbom $Ax + By + C\theta + D = 0$. Pri tome je $t_x = a_x$, a $\theta = \theta_1 = \text{const.}$ pa je $\phi(x,y,\theta) = \phi(x,y) = 0$ i $\phi(x,y) = Ax + By + D = 0$.

Ukoliko su u pravokutnom koordinatnom sustavu xOy zadani objekti (sl.4) $A_i \varepsilon\{A\}$ čiji su polovi smješteni na liniji zadanoj funkcijom $\phi(x,y,\theta) = y = 0$, tada nastaje potreba, pri jednorednom razmještaju objekata, da se odredi takav $t_x = a_x$ pri kojem se objekti neće presijecati. Kada se objektima $A_i \varepsilon \{A\}$ povuku donji i gornji potporni pravci l_1 i l_2 paralelni s pravcem $y = 0$, dobiva se traka L u koju se razmještaju zadani objekti. Tada je širina trake L odredjena potpornom funkcijom, tj. $h_1 + h_2 = h(\theta - \pi/2) + h(\theta + \pi/2)$, a period po apscisi s vrijednošću funkcije gustog razmještaja za zadani kut $\theta = \theta_1$, tj. $a_x = f(\theta_1)$.

Linija $T_i^0 T_i^1$ razdvaja objekte A_{i-1} i A_i, a linija $T_{i+1}^0 T_{i+1}^1$ objekte A_i i A_{i+1} (sl.4) koji su jednoredno periodično razmješteni. U paralelogramu V_i, odredjenom točkama T_i^0, T_{i+1}^0, T_1^1 i T_{i+1}^1, razmješten je točno jedan objekt A_i. Očito je da je osnovica paralelograma V_i jednaka periodu a_x gusto razmještenih objekata, dok je visina odredjena s udaljenosti izmedju pravaca l_1 i l_2, tj. sa $h_1 + h_2$. Paralelogrami V_i su, kako je vidljivo, jednoredno periodično razmješteni na traci L s periodom a_x uz uvjet da je $\phi(x,y,\Theta) = y = 0$, te je traka L prekrivena objektima V_i bez razmaka i prekrivanja a koeficijent zapunjenja trake je jednak 1. Kako se u svakom paralelogramu V_i razmješta samo po jedan objekt $A_i \varepsilon \{A\}$, koeficijent zapunjenja trake L objektima $A_i \varepsilon \{A\}$ može se izračunati izrazom (2;20):

$$\mu = \frac{a^*}{V}. \tag{16}$$



Sl. 4

Kako je površina objekta $A_i \varepsilon \{A\}$ a^* = const., tj. invarijantna s obzirom na različite mogućnosti razmještaja, to je kod izraza (16) potrebno odrediti minimalnu površinu paralelograma V da se dobije što bolji koeficijent zapunjenja μ.

Prema definicijama potporne funkcije i funkcije gustog razmještaja površina paralelograma V može se izračunati kao:

$$v(\Theta) = [h(\Theta - \pi/2) + h(\Theta + \pi/2)]\ f(\Theta). \qquad (17)$$

Uzme li se u obzir, posve općenito, da je širina l trake p jednaka $l \geqslant \max\limits_{\Theta\epsilon[0,\pi]} [h(\Theta - \pi/2) + h(\Theta + \pi/2)]$ a da je nepokriveni dio trake p širine $\Delta h < h(\Theta - \pi/2) + h(\Theta + \pi/2)$, tada je površina paralelograma širine a_x i visine l jednaka: $k = nv + a_x \Delta h$, gdje je n broj traka L koje su razmještene u traku p. Iz ovoga slijedi da je koeficijent zapunjenja trake p moguće izračunati kao (3;131):

$$\mu = \frac{n\ .\ a^*}{k} = \frac{n\ .\ a^*}{nv + a_x h}\ . \qquad (18)$$

Uvaži li se jednakost $a_x = f(\Theta)$ i jednakost u izrazu (17), tada se koeficijent zapunjenja μ može izračunati kao:

$$\mu = \frac{na^*}{f(\Theta)\ [n[h(\Theta-\pi/2)+h(\Theta+\pi/2)]+\Delta h]}\ . \qquad (19)$$

Kako je $a^* = \text{const.}$, $n[h(\Theta-\pi/2)+h(\Theta+\pi/2)]+\Delta h = l = \text{const.}$, a

$$n(\Theta) = N\left[\frac{l}{h(\Theta-\pi/2)+h(\Theta+\pi/2)}\right],$$

tada se rješenje postavljenog problema svodi na odredjivanje (3; 131):

$$\bar{\mu} = \max_{\Theta\epsilon[0,\pi]} \mu\ (\Theta) = \frac{a^*}{1} \max\{N\left[\frac{l}{h(\Theta-\pi/2)+h(\Theta+\pi/2)}\right] : f(\Theta)\}. \qquad (20)$$

Funkcija $\mu(\Theta)$, kako proizlazi iz svojstava funkcije gustog razmještaja, potporne funkcije i izraza (20), u intervalu $[0,\pi]$ djelomično je neprekidna, broj točaka prekida u potpunosti je odredjen funkcijom $h(\Theta):\Theta\epsilon\ [0,\pi]$, nema više od jednog prekida ako je funkcija $[h(\Theta-\pi/2)+h(\Theta+\pi/2)]:\Theta\epsilon[0,\pi]$ unimodalna (3;131).

Iznijeto ukazuje da se postavljeni problem može rješavati postepeno preko slijedećih faza (3; 132):

1. Odredjuju se oni kutevi Θ u kojima djelomično neprekidna funkcija $N[l/h(\Theta-\pi/2)+h(\Theta+\pi/2)]$ ima prekid. Zbog toga je u intervalu $[0,\pi]$ potrebno naći rješenja jednadžbi:

$$l - i\ [h(\Theta-\pi/2) + h(\Theta+\pi/2)] = 0,\ i = m_1,\ m_1+1, \ldots, m_2 \qquad (21)$$

gdje je:

$$m_1 = N\left[\frac{l}{\max\limits_{\Theta\varepsilon[0,\pi]}[h(\Theta-\pi/2)+h(\Theta+\pi/2)]}\right], m_2 = N\left[\frac{l}{\min\limits_{\Theta\varepsilon[0,\pi]}[h(\Theta-\pi/2)+h(\Theta+\pi/2)]}\right]$$

koja se i javljaju kao točke prekida funkcije $h(\Theta)$. Neka su ta rješenja $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_m$ i neka je, ne narušavajući općenitost, $\Theta_1 < \Theta_2 < \ldots \Theta_m$.

2. Analitički ili računski odredjuju se oni Θ_i u kojima se postiže $\min\limits_{\Theta\varepsilon[\Theta_i,\Theta_{i+1}]} f(\Theta)$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$.

3. Sada je jasno da je moguće izračunati:

$$\max \mu(\Theta) = \frac{a^*}{l} \max \{N[\frac{l}{h(\Theta_i^*-\pi/2)+h(\Theta_i^*+\pi/2)}] : f(\Theta_i^*)\}. \quad (22)$$

Neka je za ilustraciju izloženog problema zadana traka p "beskonačne" dužine i širine l = 18. Potrebno je pronaći kut Θ pri kojemu će se u traku p razmjestiti najviše traka L sa u njima razmještenim četverokutima A čije su koordinate vrhova već ranije zadane (točka 2). Pri tome se zahtijeva da je koeficijent μ zapunjenja trake najveći.

Računski postupak s približnim rješenjima svodi se, u prvom redu, na izračunavanje broja traka L koje se mogu razmjestiti u traku p. Taj broj traka L jednak je: $m_1 = N[18/5{,}830951] = 3$, $m_2 = N[18/3{,}143896] = 5$, te se može napisati da je $i = m_1, m_1+1, \ldots, m_2 = 3, 4, 5$.

Iz tabele 1. je vidljivo da je $\max\limits_{\Theta\varepsilon[0,\pi]} [h(\Theta-\pi/2)+h(\Theta+\pi/2)]$ kod 149^0, a $\min\limits_{\Theta\varepsilon[0,\pi]} [h(\Theta-\pi/2)+h(\Theta+\pi/2)]$ kod 27 .

Ako se u traku p širine l = 18 razmjeste 3 trake L, tada bi svaka traka L mogla imati širinu 6 $(18-3\,[h_1+h_2]=0)$.Kako u tabeli 1.ne postoji ni jedna vrijednost $\Sigma h(\Theta)=[h(\Theta-\pi/2)+h(\Theta+\pi/2)]$ koja bi iznosila 6, može se reći da se sukladni četverokuti A_i ε {A} mogu razmještati u trake L pod bilo kojim kutem. Jasno je da ovakva orijentacija četverokuta u trakama L dovodi do slabog iskorištenja zaposjednutosti istih, te tako i trake p. Rješenje nije zadovoljavajuće i zbog toga ga se ne uzima u daljnje razmatranje.

Tabela 1. Vrijednosti funkcije gustog razmještaja i potporne funkcije

θ	f(θ)	$\frac{h_1}{(\theta-\pi/2)}$	$\frac{h_1}{(\theta-\pi/2)}$	$\Sigma h(\theta) = h_1+h_2$	$v(\theta) = \Sigma h(\theta) f(\theta)$
0	3,500000	2,000000	3,000000	5,000000	17,500000
1	3,515876	1,982243	2,964638	4,946881	17,392620
.	....	....	....	....	....
8	3,663101	1,841363	2,692458	4,533821	16,607844
9	3,689727	1,818942	2,650196	4,469138	16,489899
10	3,717884	1,795967	2,607127	4,403094	16,370193
..	....	....	....	....	....
20	4,097461	1,537365	2,135037	3,672402	15,047524
21	4,146976	1,508793	2,084005	3,592798	14,899247
22	4,198998	1,479761	2,032338	3,512099	14,747297
..	....	....	....	....	....
26	4,434864	1,359215	1,819638	3,178853	14,097781
27	4,477121	1,344997	1,798989	3,143986	14,076006
28	4,489605	1,352420	1,821892	3,174312	14,251407
..	....	....	....	....	....
52	5,313103	1,403673	2,191683	3,595356	19,102497
53	5,376178	1,409451	2,199086	3,599537	19,351752
54	5,442446	1,396803	2,205820	3,602623	19,607081
..	....	....	....	....	....
58	5,742869	1,377968	2,226016	3,603984	20,697208
59	5,827794	1,372206	2,229373	3,601579	20,989260
60	5,681591	1,366026	2,232051	3,598077	20,442802
61	5,536099	1,359430	2,234049	3,593479	19,893855
..	....	....	....	....	....
79	3,949348	1,390827	2,154063	3,544890	14,000004
80	3,897623	1,448671	2,143264	3,591935	14,000008
81	3,848393	1,506073	2,131811	3,637884	14,000007
..	....	....	....	....	....
208	3,165802	2,829164	1,593096	4,422260	14,000000
109	3,157982	2,867741	1,596655	4,464396	14,098482
110	3,151158	2,905446	1,623733	4,529179	14,272159
...	....	....	....	....	....
116	3,130647	3,112702	1,775536	4,888238	15,303348
117	3,130585	3,143985	1,798989	4,942974	15,474400
118	3,131477	3,174311	1,821892	4,996203	15,645495
...	....	....	....	....	....
148	3,569506	3,603983	2,226016	5,829999	20,810216
149	3,549960	3,601578	2,229373	5,830951	20,699643
150	3,531696	3,598076	2,232051	5,830127	20,590236
...	....	....	....	....	....
179	3,485324	3,034448	2,017148	5,051596	17,606449
180	3,500000	3,000000	2,000000	5,000000	17,500000

Ukoliko se u traku p razmjeste 4 trake L, tada bi svaka traka L mogla imati širinu $18 - 4\,[h_1 + h_2] = 0$, tj. $\Sigma h(\Theta) = 18/4 = 4{,}5$. Približne vrijednosti za $\Sigma h(\Theta) = 4{,}5$ nalaze se u tabeli 1. kod 9^0 ($\Sigma h(9^0) = 4{,}469138$) i kod 109^0 ($\Sigma h(109^0) = 4{,}464396$), a to znači da se unutar intervala $[9^0, 109^0]$ objekti $A_i \varepsilon \{A\}$ mogu razmještati u trake L pod bilo kojim kutem, a da širina traka L ne prijedje širinu $\Sigma h(\Theta)$ veću od 4,5. Da se dodje do najmanje površine v paralelograma V, potrebno je u intervalu $[9^0, 109^0]$ pronaći najmanji $f(\Theta)$. Minimalni $f(\Theta)$ nalazi se kod 109^0, tj. $f(109^0) = 3{,}157982$. Razmjeste li se, sada, objekti $A_i \varepsilon \{A\}$ u trake L pod kutem od 109^0, dolazi se do spoznaje da je baza paralelograma $a_x = 3{,}157982$, a visina $\Sigma h(109^0) = 4{,}464396$, te se površina cijelog paralelograma može izračunati kao $k = nv + a_x \Delta h = 4.14{,}098482 + 3{,}157982.(18-4.4{,}464396) = 56{,}843675$ ili kao $k = 18.3{,}157982$. Koeficijent iskorištenja trake p, za ovakvu situaciju, jednak je:

$$\mu(109^0) = \frac{na^*}{k} = \frac{4\ .\ 10{,}5}{56{,}843675} = 0{,}7389.$$

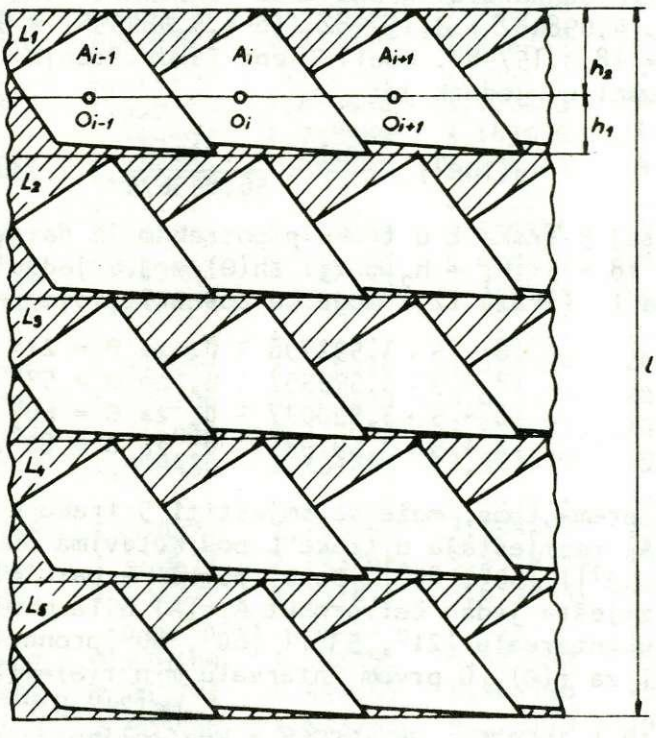
Za razmještaj 5 traka L u traku p potrebno je da svaka traka ima širinu $18 - 5\,[h_1 + h_2]$, tj. $\Sigma h(\Theta) = 3{,}6$ jedinica. Na osnovi tabele 1. izraza (21) mogu se postaviti ove relacije:

$$\begin{aligned}
18 - 5\cdot 3{,}592798 &\simeq 0, \text{ za } \Theta = 21^0\\
18 - 5\cdot 3{,}599537 &\simeq 0, \text{ za } \Theta = 53^0\\
18 - 5\cdot 3{,}598077 &\simeq 0, \text{ za } \Theta = 60^0\\
18 - 5\cdot 3{,}591935 &\simeq 0, \text{ za } \Theta = 80^0.
\end{aligned}$$

U traku p, prema tome, može se smjestiti 5 traka L ako se objekti $A_i \varepsilon \{A\}$ razmještaju u trake L pod kutevima unutar intervala $[21^0, 53^0]$ i $[60^0, 80^0]$. Da bi površina paralelograma u koji se razmješta jedan četverokut $A_i \varepsilon \{A\}$ bila minimalna, potrebno je u intervalu $[21^0, 53^0]$ i $[60^0, 80^0]$ pronaći minimalne vrijednosti za $f(\Theta)$. U prvom intervalu $\min\limits_{\Theta\varepsilon[21^0,53^0]} f(\Theta) = f(21^0) = 4{,}146976$, te je $k = 18\cdot 4{,}146976 = 74{,}645568$ a koeficijent zapunjenja trake p $\mu(21^0) = 0{,}7033$. U drugom intervalu $[60^0, 80^0]$ $\min\limits_{\Theta\varepsilon[60,80]} f(\Theta) = f(80^0) = 3{,}897623$, $k = 18\cdot 3{,}897623 = 70{,}157214$, te je koeficijent zapunjenja trake p jednak $\mu(80^0) = 0{,}7483$.

NAPOMENA UZ Tab.1: U tabeli su date samo one vrijednosti navedenih funkcija koje će se koristiti u daljnjem tekstu, te zbog toga tab.1.predstavlja izvadak iz tabele u kojoj su izračunate vrijednosti navedenih funkcija za sve kuteve u intervalu $[0,\pi]$.

Analiziraju li se dobiveni rezultati, dolazi se do spoznaje da je najveći koeficijent zapunjenja trake p dobiven za 5 traka L svaka širine $\Sigma h(80^0) = 3{,}591935$, u kojima se četverokuti $A_i \varepsilon \{A\}$ razmještaju pod kutem od 80^0 (sl.5). Račun, nadalje, pokazuje da je baza paralelograma V_i u koji se razmještaju objekti $A_i \varepsilon \{A\}$ jednaka $a_x = f(80^0) = 3{,}897623$, dok je širina traka L $\Sigma h(80^0) = 3{,}591935$ a $v(80^0) = 14{,}000008$. Pet traka L širine $\Sigma h(80^0) = 3{,}591935$ zauzima 17,959676 mjernih jedinica trake p, te je $\Delta h = 18 - 17{,}959676 = 0{,}040325$ mjernih jedinica širine ostalo nezaposjednuto.



Sl. 5

5. ZAKLJUČAK

Razmatrana situacija u pogledu razmještaja geometrijskih objekata nalazi svoju primjenu u mnogim praktičnim problemima. Tako npr. o razmještaju objekata govori se kod mnogih konstruktorskih problema, kod obrade podataka, u radio industriji i tsl. Naročito veliku primjenu ovo područje ima kod izrade krojnih shema, a preko njih kod plana krojenja, u problemima krojenja materijala. Tu su efekti mjerljivi i zbog toga i najuočljiviji.

Treba reći, na kraju, da je izloženi problem razmještaja geometrijskih objekata jedan od mogućih problema i da, s obzirom na različita tehnološka i druga ograničenja, ovo područje postaje izuzetno široko, te teorijski i praktično veoma značajno.

L I T E R A T U R A

1. Bojanić M.: Razmještaj geometrijskih objekata u prostoru (uvodna razmatranja), Zbornik radova 2-3, FOI, Varaždin, 1979, str. 355-370.

2. Bojanić B.-Bojanić M.: Razmještaj geometrijskih objekata na traci beskonačne dužine, PRAKSA br.4, Beograd, 1980, str.15-26.

3. Stojan J.G.: Razmeščenie geometričeskih ob'ektov, Naukova dumka, Kiev, 1975.

4. Stojan J.G.-Panasenko A.A.: Periodičeskoe razmeščenie geometričeskih ob'ektov, Naukova dumka, Kiev, 1978.

Primljeno: 1980-09-16

Боянич Милорад:

" Размещение геометрических объектов в полосы бесконечной длины и заданной ширины "

Р Е З Ю М Е

В работе рассматривается одна из пролем однорядного периодического размещения выпуклых геометрических объектов. Подход к проблеме размещения геометрических объектов выражен при помощи коэффициента заполнения μ в заданной области в R^2 .

Полученные результаты дают ответ на вопрос, как надо в полосы p разместить полосы L и в них объекты $A_i \varepsilon \{A\}$,чтобы получить мах.μ .