Krsto Kero
Fakultet organizacije i informatike
V a r a ž d i n

UDK 311
Stručni rad

OCJENJIVANJE PARAMETARA FUNKCIJE POMOĆU METODE NAJMANJIH KVADRATA

Ovaj rad namijenjen je u prvom redu studentima društvenih nauka da vide kako se može primijeniti metoda najmanjih kvadrata. Ova metoda ima široku primjenu, a u nastavnim procesima (programima) posebno se ne izučava. Rad je ograničen na primjenu kod izračunavanja trenda i korelacije.

1. UVOD

U rješavanju ekonomskih problema često smo u situaciji da odredimo funkciju koja će najbolje aproksimirati neku ekonomsku situaciju. U tu svrhu potrebno je ocijeniti parametre funkcije. Za ocjenjivanje tih parametara postoje različite metode, kao: metoda najmanjih kvadrata, ortogonalna regresija, metoda najmanjih modula i ocjenjivanje parametara različitih tipova funkcija (CES funkcija, funkcija tipa HIPF).

U ovom radu zadržat ćemo se na ocjeni parametara pomoću metode najmanjih kvadrata.

2. METODA NAJMANJIH KVADRATA

Poznate su nam dvije serije statističkih podataka:

$$X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots, X_n$$

$$Y_1, Y_2, Y_3, \ldots\ldots, Y_n$$

ili niz empiričkih točaka

$$(X_1, Y_1),\ (X_2, Y_2), \ldots\ldots, (X_n, Y_n)$$

Ako taj niz prikažemo linijskim grafikonom, dobit ćemo jednu općenito izlomljenu liniju koja se naziva empirička ili statistička krivulja. Nju treba izgladiti tako da se izlomljena linija zamijeni s glatkom krivuljom.

Da se to riješi, potrebno je izabrati funkciju odredjenog tipa koja će se najbolje prilagoditi empiričkim točkama. "Iz rasporeda tih točaka vidi se da li će njezin analitički reprezentant (jednadžba)

$$Y = F(X;\ a_1,\ a_2, \ldots\ldots, a_k)$$

biti linearna, kvadratna, kubna, eksponencijalna ili neka druga funkcija".[1])

To je u stvari funkcija jedne varijable X sa k parametara $(a_1, a_2, \ldots\ldots a_k)$. Jasno je da broj parametara ne smije biti veći od broja poznatih empiričkih točaka ($k \leq n$).

Prije samog postupka ocjenjivanja parametara potrebno je izabrati tip funkcije. Ako izaberemo linearnu funkciju, trebat ćemo ocijeniti dva parametra, odnosno kod kvadratne tri, kod kubne četiri parametra.

Kad smo izabrali tip funkcije koji smatramo da će najbolje aproksimirati empiričke podatke, slijedi ocjena (izračunavanje) parametara. Parametre ćemo izračunati iz uvjeta:

$$\Sigma\,(Y_i - y_i)^2 = \min \qquad (1)$$

y_i nam predstavljaju ordinatu i-te empiričke točke, tj. originalnu vrijednost zavisne varijable, a Y_i teoretsku vrijednost zavisne varijable.

Po tom je uvjetu ova metoda dobila naziv metoda najmanjih kvadrata.[2])

Teoretska linearna veza postojat će izmedju varijabli x i y oblika $Y = a + bx$ ako bude zadovoljen uvjet

$$S_{(a,b)} = \Sigma(Y_i - y_i)^2 = \Sigma(y_i - a - bx_i)^2 = \min$$

Vrijednost parametra a i b možemo odrediti tako da deriviramo sumu S parcijalno najprije po a, a zatim po b i dobivene derivacije izjednačimo s nulom, tj.

---

1) Lj. Martić: Matematičke metode za ekonomske analize I dio, Narodne novine, Zagreb, 1976, str. 136.

2) Metodu najmanjih kvadrata prvi je predložio A.L. Legendre u svom radu "Nouvelles méthodes pour la detérmination des orbites des comètes" koji je publiciran 1806. godine u Parizu. Kratko vrijeme nakon toga P.S. Laplace (1812) i F.K. Gauss (1821-1823) potvrdili su njenu valjanost i opravdanost te istakli neka njena optimalna svojstva,

(Citirano: T. Vujković, Ekonometrijske metode i tehnike, Informator, 1976, str. 27),

$$S_a = -2\,\Sigma(y_i - a - bx_i) = 0$$
$$S_b = -2\,\Sigma(y_i - a - bx_i)x_i = 0$$

Na taj način dobili smo sistem normalnih jednadžbi:

$$\begin{aligned} Na + b\,\Sigma x_i &= \Sigma y_i \\ a\,\Sigma x_i + b\,\Sigma x_i^2 &= \Sigma x_i y_i \end{aligned} \qquad (2)$$

Dijeljenjem prve jednadžbe sistema (2) sa N dobit ćemo vrijednost parametra a

$$a = \frac{\Sigma y_i}{N} - b\,\frac{\Sigma x_i}{N} = \bar{y} - b\bar{x} \qquad (3)$$

U slijedećem koraku supstituirat ćemo vrijednost a u drugu jednadžbu sistema (2) dobit ćemo

$$b = \frac{\Sigma\, x_i y_i - N\bar{x}\bar{y}}{\Sigma x_i^2 - N\bar{x}^2} \qquad (4)$$

Pošto smo riješili vrijednosti parametara funkcije, uvrstimo ih u jednadžbu i izračunamo sve očekivane vrijednosti. Ako se teoretske vrijednosti slabo podudaraju s empiričkim, ići ćemo u daljnje istraživanje na parabolu drugog, trećeg ili n-tog reda. Optimalne vrijednosti parametara a,b,c, parabole drugog reda ($y = a+bx+cx^2$) dobit ćemo iz uvjeta:

$$\Sigma(y_i - a - bx_i - cx_i^2)^2 = \min \qquad (5)$$

Ovaj izraz bit će minimalan ako su prve parcijalne derivacije te funkcije po parametrima a,b,c jednake nuli, tj.

$$S_a = -2\Sigma(-cx_i^2 - bx_i - a + y_i) = 0$$
$$S_b = -2\Sigma(-cx_i^2 - bx_i - a + y_i)x_i = 0$$
$$S_c = -2\Sigma(-cx_i^2 - bx_i - a + y_i)x_i^2 = 0$$

Transformiranjem ovih jednadžbi dolazi se do tri normalne jednadžbe s tri nepoznanice:

$$\begin{aligned} c\Sigma x_i^2 + b\Sigma x_i + Na &= \Sigma y_i \\ c\Sigma x_i^3 + b\Sigma x_i^2 + a\Sigma x_i &= \Sigma x_i y_i \\ c\Sigma x_i^4 + b\Sigma x_i^3 + a\Sigma x_i^2 &= \Sigma x_i^2 y_i \end{aligned} \tag{6}$$

Ovaj sistem jednadžbi može se riješiti na različite načine:
- korištenjem već gotovih formula,
- primjenom metode jednakih koeficijenata,
- matričnim računom...

Kada smo izračunali vrijednosti parametara, uvrstimo ih u funkciju i izračunamo očekivane vrijednosti. Usporedimo ih s originalnim, odnosno izračunamo standardnu devijaciju ili koeficijent varijacije i donosimo zaključak da li izračunate vrijednosti dobro aproksimiraju empiričke podatke.

Ako dolazimo do zaključka da će parabola nekog višeg reda bolje reprezentirati statističke vrijednosti, onda ćemo ići dalje u istraživanje sve dok ne pronadjemo parabolu koja će najbolje aproksimirati dane empiričke točke.

Metodu najmanjih kvadrata možemo primijeniti i kod funkcija koje nisu linearnog oblika, i to tako da je lineariziramo bilo supstitucijom bilo logaritmiranjem.

Funkcija oblika y=alogx+b. Ovo je linearna funkcija u logx. Numeričke vrijednosti parametara a i b dobit ćemo iz uvjeta $\Sigma(Y_i-y_i)^2=$ min. Minimum će se postići ako su prve parcijalne derivacije izraza $\Sigma(a\log x_i+b-y_i)^2$ po parametrima a i b jednake nuli. Postupak rješenja je kao i kod prethodnih proračuna parametara linearne funkcije, jedino je razlika u tome da će svugdje gdje se nalazi x_i biti $\log x_i$ [3].

Kod linearizirane funkcije gdje imamo log y i log x, konkretno kod Paretove funkcije $y = A/x^a$, za izračunavanje vrijednosti parametara postoje formule[4].

"U praktičnim primjenama polazi se direktno od ove dvije formule. Ovdje treba napomenuti da te dvije formule ne daju naj-

3) *K.Kero: Primjena Engelovih zakona na trošenje dohotka kod četveročlanih radničkih domaćinstava SFRJ, Zbornik radova, FOI Varaždin, 2-3, Varaždin, 1979, str.275.*

4) *Lj.Martić: Matematičke metode za ekonomske analize I dio, Narodne novine, Zagreb, 1976, str. 144.*

bolje procjene parametara A i a. Razlog ne leži u metodi najmanjih kvadrata, već u njezinoj primjeni. Ta metoda nije bila primijenjena na veličine Y i y već na logaritme tih veličina logY i logy". 5)

3. PRIMJENA METODE NAJMANJIH KVADRATA KOD IZRAČUNAVANJA PARAMETARA TRENDA

Kod utvrdjivanja aritmetičke sredine vremenskog niza treba voditi računa o dinamici kretanja pojave. Zato je bolje koristiti srednju dinamičku vrijednost, odnosno trend. On nam pokazuje opću tendenciju kretanja pojave. Jednadžba trenda je $y_c = a+bx$ ako se radi o linearnom trendu, odnosno $y_c=a+bx + cx^2$ ako parabola drugog reda najbolje reprezentira statističke podatke, ili neka druga parabola n-tog reda ako se najbolje prilagodjava empiričkim podacima. Naš zadatak je da pronadjemo koja će krivulja najbolje reprezentirati originalne podatke. Za tu svrhu uzmimo jedan primjer. Podaci se nalaze u tabeli 1, u kolonama 1 i 2.

Tabela 1. Vrijednost izvršenih gradjevinskih radova na putevima SRH u milijunima dinara.

Godina	Vrijednost y_i	x_i	x_i^2	x_iy_i	y_c	y_i-y_c	$(y_i-y_c)^2$
1	2	3	4	5	6	7	8
1972	450	0	0	0	165,787	284,213	80777,029
1973	583	1	1	583	471,000	112,000	12544,00
1974	936	2	4	1872	776,215	159,785	25531,246
1975	521	3	9	1563	1081,429	-560,429	314080,66
1976	621	4	16	2485	1386,642	-765,642	586207,67
1977	2000	5	25	10000	1691,857	308,143	94952,108
1978	2459	6	36	14754	1997,070	461,930	213379,32
	7570	21	91	31256	7570,000	0,000	1327472,0

Izvor: SGH, 1979, str. 141.

Radi lakšeg izračunavanja parametara označit ćemo vremenska razdoblja u nizu s 0,1,2,...6. To se može vidjeti u koloni 3 tabele 1. S nulom smo označili vremensko razdoblje koje smo odabrali za ishodište.

5) *Isto, str.144.*

Do parametara možemo doći tako da dobivene sume u tabeli 1 uvrstimo u sistem jednadžbi (2)

$$\begin{array}{rcl} 7a + 21b &=& 7570 \quad .(-3) \\ 21a + 91b &=& 31256 \\ \hline -21a - 63b &=& -22710 \\ 21a + 91b &=& 31256 \\ \hline 0 + 28b &=& 8545 \\ b &=& 305,214 \end{array}$$

Parametar a dobit ćemo tako da u prvu jednadžbu uvrstimo vrijednost parametra b, tj.

$$7a + 21.305,214 = 7570$$
$$7a = 1160,506$$
$$a = 165,787$$

Do rješenja možemo doći i na drugi način. U tabeli 1, koloni 1 i 2 nalaze se sume y_i i x_i. Te sume podijelimo s N i dobijemo $\bar{y}$ i $\bar{x}$. U istoj tabeli nalaze se ostale sume koje uvrstimo u izraz (3) i (4), tj.

$$b = \frac{31256 - 7.3.1081,429}{91 - 7.3^2} = 305,214$$

$$a = 1081,429 - 305,214 \,.\, 3 = 165,787.$$

Jednadžba linearnog trenda poslije proračuna parametara izgledala bi ovako:

$$y_c = a + bx$$
$$y_c = 165,787 + 305,214x$$

Ishodište je 30.VI 1972.g.
Jedinica za y_i je milijun dinara
Jedinica za x_i je jedna godina

Iz sume kvadrata odstupanja može se zaključiti da linearni trend slabo reprezentira empiričke podatke. Zbog ocjene reprezentativnosti trenda potrebno je izračunati standardnu devijaciju trenda, odnosno koeficijent varijacije trenda. Potrebni podaci nalaze se u tabeli 1, koloni 8.

$$\sigma_n = \frac{\Sigma(y_i - y_c)^2}{N} = \frac{1327472,0}{7} = 435,475$$

$$V_n = \frac{\sigma_n . 100}{\bar{y}} = \frac{435,475}{1081,429} . 100 = 40,269\%$$

Budući da linearni trend slabo reprezentira empiričke podatke, dobro je ispitati da li će neki krivolinijski trend bolje zamijeniti originalne vrijednosti, npr. parabola drugog reda $y_c = a + bx + cx^2$.

Potrebne sume za procjenu parametara a, b i c nalaze se u tabeli 2. U sistem normalnih jednadžbi (6) uvrstimo te sume pa ćemo imati:

$$\begin{aligned} 91c + 21b + 7a &= 7570 \\ 441c + 91b + 21a &= 31256 \\ 2275c + 441b + 91a &= 157476 \end{aligned}$$

Tabela 2. Vrijednost izvršenih gradjevinskih radova na putevima SRH u milijunima dinara

Godine	Vrijednost y_i	x_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$	y_c	$y_i - y_c$	$(y_i - y_c)^2$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1972	450	0	0	0	0	0	0	629,49	-179,49	32216,66
1973	583	1	1	1	1	583	583	471,00	112,00	12544,00
1974	936	2	4	8	16	1872	3744	498,00	438,00	191844,00
1975	521	3	9	27	81	1563	4689	710,47	-189,47	35898,88
1976	621	4	16	64	256	2484	9936	1108,43	-487,43	237588,00
1977	2000	5	25	125	625	10000	50000	1691,86	308,14	94950,26
1978	2459	6	36	216	1296	14754	88524	2460,77	-1,77	3,13
	7570	21	91	441	2275	31256	157476	7570,0	0,0	605044,93

Izvor: kao tabela 1.

Ovaj sistem jednadžbi možemo riješiti metodom suprotnih koeficijenata.

Prvu jednadžbu pomnožimo s -3 i pribrojimo drugoj da bismo time eliminirali nepoznanicu a. Rezultat toga je

$$\begin{array}{r}
-273c - 63b - 21a = 22710 \\
\underline{441c + 91b + 21a = 31256} \\
168c + 28b \qquad = 8546
\end{array}$$

Da bismo dobili sistem dviju jednadžbi s dvije nepoznanice,pomnožit ćemo u slijedećem koraku prvu jednadžbu s -13 i pribrojiti trećoj i tako opet eliminirati nepoznanicu a.

$$\begin{array}{r}
-1183c - 273b - 91a = -98410 \\
\underline{2275c + 441b + 91a = 157476} \\
1092c + 168b \qquad = 59066
\end{array}$$

Dobili smo sistem dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{array}{r}
168c + 28b = 8546 \ .(-6) \\
\underline{1092c + 168b = 59066} \\
-1008c - 168b = -51276 \\
\underline{1092c + 168b = 59066} \\
84c \qquad = 7790 \\
c = 92,74
\end{array}$$

Uvrštavanjem vrijednosti c u jednu od jednadžbi s vije nepoznanice dobivamo vrijednost parametra b.

$$b = -251,226$$

Parametar a dobit ćemo uvrštavanjem vrijednosti b i c u bilo koju od jednadžbi s tri nepoznanice, tj.

$$a = 629,49$$

Sada kad su nam poznati svi parametri krivolinijskog trenda, možemo napisati kompletnu jednadžbu s potrebnim oznakama.

$$y_c = a + bx + cx^2$$

$$y_c = 629,49 - 251,226x + 92,74x^2$$

Ishodište je 30.VI 1972.g.
Jedinica za y je milijun dinara.
Jedinica za x je jedna godina.

Mjere reprezentativnosti jesu:

$$\sigma_n = \frac{\Sigma(y_i - y_c)^2}{N} = \frac{605044,93}{7} = 294,00$$

$$V_n = \frac{\sigma_n}{\bar{y}} \cdot 100 = \frac{294,00}{1081,429} \cdot 100 = 27,186\%.$$

Analizom reprezentativnosti krivolinijskog trenda (parabole drugog reda) možemo zaključiti da mnogo bolje reprezentira empiričku krivulju od linearnog trenda. U daljnjem istraživanju vjerojatno bi se parabola nekog višeg reda još bolje prilagodila originalnoj krivulji.[6)]

4. PRIMJENA METODE NAJMANJIH KVADRATA KOD IZRAČUNAVANJA PARAMETARA REGRESIJSKIH PRAVACA

Zadatak je statistike ustanoviti postojanje veze medju pojavama, utvrditi oblik i smjer te izračunati jakost te veze. Statističke metode,koje se time bave, nazivamo metoda korelacije.

Statističar će često biti u situaciji da će pronaći vezu, ali to ne znači da će s time dokazati uzročno posljedične zavisnosti. Zato je dobro da nakon utvrdjene veze medju pojavama i mjerenja te veze stručnjak iz područja kojem pripadaju ispitivane pojave pravilno protumači statistički utvrdjenu vezu.

Ovdje ćemo imati dvije vrste modela: korelacijski i regresijski. O regresijskom modelu govorimo ako u ispitivanju veze medju pojavama unaprijed znademo koja je pojava uzrok (X), a koja je pojava posljedica (Y), tj. $y_c = a + bx$.

U drugom slučaju govorimo o korelacijskom modelu kad nam je svejedno da li je y funkcija od x ili je x funkcija od y. U tom slučaju potrebno je izračunati oba regresijska pravca,tj.

$$y_c = a + bx \quad i \quad x_c = \acute{a} + \breve{b}y.$$

Do vrijednosti parametara a i b za regresijski pravac $y_c = a + bx$ doći ćemo primjenom metode najmanjih kvadrata, tj. da suma odstupanja izmedju originalnih vrijednosti i teoretskih vrijednosti bude najmanja, tj.

$$\Sigma(Y_i - y_c)^2 = \text{minimum}.$$

U izrazu (2) nalazi se sistem normalnih jednadžbi dobivenih iz gornjeg uvjeta. U izrazu (3) i (4) nalaze se formule za izračunavanje parametara a i b izvedene od izraza (2).

Do parametara se može doći uvrštavanjem dobivenih suma iz tabele 3 u izraz (2) ili u izraze (3) i (4).

---

6) Kod pokušaja prilagodjavanja eksponencijalnom trendu došao sam do zaključka da je nešto bolji reprezentant od linearnog trenda (V_n = 36,39%), ali je slabiji od krivolinijskog trenda (parabole drugog reda).

Budući da su izraz (3) i (4) korak dalje, zato ćemo njih koristiti za izračunavanje parametara.

$$b = \frac{\Sigma x_i y_i - N.\bar{x}\bar{y}}{\Sigma x_i^2 - N.(\bar{x})^2} = \frac{44792 - 6.73,33.71,33}{45966 - 6 . 73,33^2} = 0,97854$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = 71,33 - 0,97854 . 73,33 = - 0,42634$$

Dakle, regresijski pravac y_c + bx izgledat će

$$y_c = -0,42634 + 0,97854 x.$$

Parametar b pokazuje da će se u društveno-političkoj zajednici Zajednica općina Varaždin povećati rashodi za 978 540 dinara ako se povećaju prihodi za milijun dinara.

Pod uvjetom da postoji jaka veza izmedju prihoda i rashoda, što nam pokazuje koeficijent korelacije (koji ćemo kasnije izračunati) moguće je planirati rashode ako znamo koliki će biti prihodi. Npr. ako se očekuje u 1980. godini prihod u DPZ općine Čakovec 140 milijuna dinara, rashodi mogu biti

$$y_{140} = -0,42634 + 0,97854 . 140 = 136,56926 \text{ milijuna dinara.}$$

Za regresijski pravac $x_c = \acute{a} + \acute{b}y$ do parametara $\acute{a}$ i $\acute{b}$ doći ćemo na slijedeći način. Iz jednadžbe regresijskog pravca možemo uočiti da je sličan onom prvom, tj. y_c = a+bx. Razlika je jedino u tome što su zamijenile pozicije varijable x i y, tj. sada je zavisna varijabla x, a nezavisna y.

Proračun parametara $\acute{a}$ bit će isti kao i za parametar a, samo što će $\bar{y}$ i $\bar{x}$ zamijeniti pozicije, tj. $\acute{a} = \bar{x} - \acute{b}\bar{y}$ (7)

Slično tome i parametar $\acute{b}$ dobit ćemo kao i b, samo što ćemo u nazivniku x^2 i $\bar{x}^2$ zamijeniti s y^2 odnosno $\bar{y}^2$, tj.

$$\acute{b} = \frac{\Sigma xiyi - N . \bar{x}\,\bar{y}}{\Sigma y_i^2 - N\,\bar{y}^2} \qquad (8)$$

Uvrstimo li potrebne podatke u izraze (7) i (8) iz tabele 3, dobit ćemo

$$\acute{b} = \frac{44792 \ . \ 6 \ . \ 73,33 \ . \ 71,33}{43680 - 6 \ . \ 71,33^2} = 1,019467$$

$$\acute{a} = 73,33 - 1,019467 \ . \ 71,33 = 0,611419$$

Izračunate parametre uvrstimo u jednadžbu te dobivamo da je

$$x_c = 0,611419 + 1,019467y.$$

Parametar $\acute{b}$ pokazuje da će se povećati prihodi DPZ Zajednice općina Varaždin za 1019467 dinara ako se rashodi u njoj povećaju za milijun dinara.

Zbog uloge parametara b i $\acute{b}$ nazivamo ih koeficijentom regresije. Drugi korijen umnoška b i $\acute{b}$ daje koeficijent korelacije koji nam pokazuje jačinu i smjer veze medju pojavama. Označavamo ga s r, a može zauzeti vrijednosti ± 1, te je on u konkretnoj situaciji

$$r = 0,97854 \ . \ 1,019467 = 0,9988.$$

Možemo zaključiti da je veza izmedju prihoda i rashoda veoma jaka, gotovo funkcionalna i pozitivnog smjera, tj. porast jedne pojave prati porast druge pojave.

Ako nas zanima koliki bi morali biti prihodi DPZ općine Čakovec da bi se u 1980.godini moglo utrošiti 130 milijuna dinara, tada ćemo u jednadžbu x_c uvrstiti za y 130, tj.

$$x_{130} = 0,611419 + 1,019467 \ . \ 130 = 133,14212 \text{ milijuna d.}$$

Tabela 3. Ostvareni prihodi i rashodi prihoda bilančnog dijela budžeta društveno-političke Zajednice općina Varaždin u milijunima dinara 6)

Budžeti	Prihodi x_i	Rashodi y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	2	3	4	5	6
Čakovec	126	125	15876	15625	15750
Ivanec	53	53	2809	2809	2809
Ludbreg	28	28	784	784	784
Novi Marof	33	33	1089	1089	1o89
Varaždin	152	147	23104	21609	22344
Zajednica općina	48	42	2304	1764	2016
Ukupno	440	428	45966	43680	44792

Izvor: SGH 1979. str.318-319.

$\bar{x} = \frac{440}{6} = 73,33 \qquad \bar{y} = \frac{428}{6} = 71,33$

Ako se istraživanjem dodje do zaključka da ne postoji linearna veza medju pojavama, onda se istraživanje nastavlja, tj. traži se krivolinijska korelacija. Postupak istraživanja parametara je sličan krivolinijskom trendu, samo što ovdje u jednom slučaju je $y = f(x)$, a u drugom $x = f(y)$.

5. ZAKLJUČAK

Zamisao ovog članka je bila da se pokaže kako se neka teoretska znanja mogu primijeniti u praksi. Konkretno, ovdje smo uzeli metodu najmanjih kvadrata radi ocjene parametara funkcije i vidjeli smo njenu primjenu na stvarnim primjerima.

Da smo išli do konačnog rješenja, rad bi bio veoma opsežan. Rad će postići svoju svrhu ako nekoga potakne da rješava probleme u praksi, a u tom slučaju ovaj će mu rad poslužiti kao putokaz kako se može doći do potrebnih rezultata.

6) *Podaci su dani u tisućama dinara. Radi lakšeg izračunavanja parametara podatke sam izrazio u milijunima dinara i zaokružio na cijele brojeve.*

U slučajevima primjene parabole višeg rada bilo kod trenda, bilo kod korelacije, izračunavanje parametara i ispitivanje reprezentativnosti funkcije bit će veoma, veoma teško i mukotrpno.

Da se to izbjegne, u nekim centrima za obradu podataka postoje programi za ispitivanje oblika funkcije i izračunavanje parametara tih funkcija pa se u tom slučaju mogu koristiti gotovi programi za spomenute operacije.

L I T E R A T U R A :

1. *A.Bilimović: Integralni račun sa pripremama, Novinsko-izdavačko preduzeće Tehnička knjiga, Beograd, 1962.*
2. *I.S.Berezin i N.P.Žitkov: Numerička analiza, Naučna knjiga, Beograd, 1963.*
3. *B.Ivanović: Teorijska statistika, Jugoslavenski institut za ekonomska istraživanja, Beograd, 1966.*
4. *K.Kero: Primjena Engelovih zakona na trošenje dohotka kod četveročlanih radničkih domaćinstava SFRJ, Zbornik radova FOI Varaždin, Varaždin, 1979.*
5. *Lj.Martić: Kvantitativne metode za financijske i računovodstvene analize, Informator, Zagreb, 1980.*
6. *Lj.Martić: Matematičke metode za ekonomske analize, I dio, Narodne novine, Zagreb, 1976.*
7. *A.I.Mazmišvili: Teorija ošibok i metod naimen'ših kvadratov, Nedra, Moskva, 1978.*
8. *V.Serdar: Udžbenik statistike, Školska knjiga, Zagreb, 1975.*
9. *V.Snidikor i W.G.Kohren: Statistički metodi, Vuk Karadžić, Beograd, 1971.*
10. *V.Vranić i Lj.Martić: Matematika za ekonomiste, I svezak, Zagreb, 1972.*
11. *V.Vranić: Vjerojatnost i statistike, Tehnička knjiga, Zagreb, 1965.*
12. *T.Vujković: Ekonometrijske metode i tehnike, Informator, Zagreb, 1976.*
13. *. . . . . . Statistički godišnjak SR Hrvatske 1979, Zagreb, kolovoz, 1979.*

Primljeno: 1980-10-04

Kero K. Marking of Parametar Function by Means of Method of the Least Quadrats

S U M M A R Y

The study may be divided in two parts. The first part displays theory and the second one represents the application refering to the real problems.

In the first example is seen the way how to get function, respectively the parameter researching dynamics of moving by some trend.

In the second part is the manner of calculating the parameter by the researching of the links between two correlations.