Dr Ivan Lončar
Fakultet organizacije i informatike
V a r a ž d i n

UDK 51
Znanstveni rad

I N V E R Z N I L I M E S I P R E B R O J I V O K O M - P A K T N I H P R O S T O R A

Inverzne sisteme i limese prostora, koji poopćuju kompaktne prostore, istraživao je autor u radu |1|. Predloženi rad predstavlja nastavak tih istraživanja u pogledu neprekidnosti svojstava nepraznosti, prebrojive kompaktnosti, povezanosti, lokalne povezanosti i ekstremne nepovezanosti. Vezna preslikavanja najčešće su zatvorena ili zatvorena ireducibilna. Dokazani su novi teoremi 3.9., 3.12., 4.1., 4.2., 6.16, 6.17., 6.18, 6.19., 6.20., 7.2., 7.3., 7.5., 7.6., 8.4., 9.3. i 10.7. Poneki od ovih teorema predstavljaju poopćenje već poznatih rezultata.

1. UVOD

Inverzne sisteme uveo je u topologiju P.S.Aleksandrov u radu |1| 1929. godine pod nazivom projekcioni spektri (vidi i Aleksandrov |2|). Inverzne sisteme dalje su istraživali i primjenjivali A.G.Kuroš |1|, H.Freudenthal |1|, N.Steenrod |1|, S.Lefschetz |1|, S.Mardešić |1| i mnogi drugi.

Danas inverzni sistemi i limesi predstavljaju moćno sredstvo algebre i topologije. U posljednje vrijeme odigrali su značajnu ulogu u teoriji oblika (vidi S.Mardešić and J.Segal |1|).

Osnovne definicije i svojstva inverznih sistema mogu se naći u djelima: N.Steenrod and S.Eilenberg, |1|, P.S.Aleksandrov i V. A.Pasinkov |1| i R.Engelking |1|. Radi lakšeg čitanja rada dajemo u drugoj točki kratku informaciju o osnovnim svojstvima inverznih sistema.

Napomenimo na kraju da će teoremi, koji su prvi puta dokazani u ovom radu, biti označeni s m.n.p.TEOREM, a svi ostali sa m.n.p.teorem ili jednostavno m.n.p., odnosno m.n.

2. OSNOVNE DEFINICIJE I SVOJSTVA INVERZNIH SISTEMA I LIMESA

2.1. D e f i n i c i j a. Inverzni sistem $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$ sastoji se od: (a) djelomično uredjenog skupa $(A,<)$ koji je usmjeren, tj. za svaki konačan podskup elemenata skupa A postoji barem jedna gornja obrada u skupu A; (b) funkcije

$\alpha \to X_\alpha$ koja svakom indeksu $\alpha \in A$ pridružuje topološki prostor X_α i (c) funkcije $(\alpha,\beta) \to f_{\alpha\beta}$ koja svakom paru (α,β), $\alpha<\beta$, pridružuje neprekidno preslikavanje $f_{\alpha\beta}:X \to X_\alpha$ tako da vrijedi uvjet tranzitivnosti $f_{\alpha\beta}\, f_{\alpha\gamma} = f_{\alpha\beta}$ za $\alpha<\beta<\gamma$ i da je $f_{\alpha\alpha}$ identiteta na X_α. Preslikavanja $f_{\alpha\beta}$ nazivamo vezna preslikavanja inverznog sistema.

Ako je A skup prirodnih brojeva N, tada inverzni sistem nazivamo inverzni niz i označavamo s $\underline{X} = \{X_n, f_{nm}, N\}$.

2.2. D e f i n i c i j a. Inverzni limes $X = \lim \underline{X}$ inverznog sistema $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$ je potprostor produkta $\prod X_\alpha, \alpha\in A$ sastavljen od točaka $x=(x_\alpha)$ sa svojstvom $f_{\alpha\beta}(x_\beta) = x_\alpha$ za svaki α i svaki $\beta>\alpha$.

2.3. PRIMJER. Padajući nizovi skupova $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_\alpha \supset \ldots$ važan su primjer inverznog sistema kod kojeg su vezna preslikavanja inkluzije a limes jednak presjeku $F = \bigcap_\alpha F_\alpha$.

Obratno, svaki inverzni sistem inducira centriranu familiju skupova produkta a presjek te familije skupova je inverzni limes polaznog sistema.

2.4. Inverzni sistem može imati prazan limes kao što pokazuje inverzni sistem $F_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$ kojemu je prema 2.3. limes jednak presjeku svih skupova F_n, a taj je presjek očito prazan.

Nepraznost limesa inverznog sistema igra značajnu ulogu u mnogim pitanjima oko inverznih limesa. Zbog toga u slijedećoj točki navodimo neke teoreme o nepraznosti limesa koji su poznati od početka primjene inverznih sistema ili su postignuti nedavno u autorovoj disertaciji |1|.

Radi sažetijeg formuliranja teorema definirajmo još neprekidnost nekog topološkog svojstva P.

2.5. D e f i n i c i j a. Neka je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$ inverzni sistem topoloških prostora X_α sa svojstvom P. Ako i limes $X=\lim \underline{X}$ posjeduje svojstvo P, kažemo da je svojstvo P neprekidno. Ako je $\underline{X}$ inverzni niz, tada kažemo da je P prebrojivo neprekidno svojstvo.

3. NEPREKIDNOST SVOJSTVA NEPRAZNOSTI

Slijedeća dva teorema jednostavno se dokazuju i veoma često se primjenjuju.

3.1. T e o r e m. Ako je $\underline{X} = \{X_n, f_{nm} N\}$ inverzni niz nepraznih prostora X_n i surjektivnih veznih preslikavanja f_{mn}, tada je $X = \lim \underline{X}$ neprazan i sve projekcije $f_n : X \to X_n$ su surjekcije.

3.2. T e o r e m. Neka je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, \Omega\}$ neprekidni inverzni sistem. Ako su svi prostori X_α neprazni i sva vezna preslikavanja surjektivna, tada je $X = \lim \underline{X}$ neprazan i sve projekcije $f_\alpha : X \to X_\alpha$ su surjekcije.

3.3. T e o r e m. (Steenrod |1|; vidi Engelking |1|). Ako je $\underline{X}$ inverzni sistem nepraznih kompakata, tada je $X = \lim \underline{X}$ neprazan kompakt.

Ako u definiciji kompakata odustanemo od zahtjeva da prostor bude Hausdorfov, tada dobijemo kvazikompakte. Autor je u radu |1| dokazao slijedeći teorem. U toku izrade pojavio se rad A.H.Stone-a s istim i još nekim drugim teoremima.

3.4. T e o r e m. (A.H.Stone |1|). Inverzni sistem nepraznih T_o kvazikompakata i zatvorenih veznih preslikavanja ima neprazan limes.

Slijedeće teoreme dokazao je autor u radu |1|. Odnose se na prebrojivo kompaktne prostore koji su jedna od vrsta prostora koji poopćuju kompaktne prostore.

3.5. D e f i n i c i j a. Topološki prostor X je prebrojivo kompaktan ako je Hausdorfov i ako svaka prebrojiva centrirana familija zatvorenih podskupova ima neprazan presjek.

3.5. Teorem. Neka je $\underline{X} = \{X_n, f_{nm}, N\}$ inverzni niz nepraznih prebrojivo kompaktnih prostora X_n i zatvorenih veznih preslikavanja f_{nm}. Tada je $X = \underleftarrow{\lim}\, \underline{X}$ neprazan prebrojivo kompaktan prostor.

3.6. T e o r e m. Ako je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, W_o\}$ inverzni sistem prebrojivo kompaktnih prostora X_α definiran nad skupom W_o svih prebrojivih rednih brojeva i surjektivnih veznih preslikavanja $f_{\alpha\beta}$, tada je $X = \underleftarrow{\lim}\, \underline{X}$ neprazan i sve projekcije $f_\alpha : X \to X_\alpha$ su surjekcije.

3.7. T e o r e m. Neka je $\underline{X} = \{X_n, f_{nm}, N\}$ inverzni niz nepraznih nizovno kompaktnih prostora X_n, tada je $X = \varprojlim \underline{X}$ neprazan nizovno kompaktan prostor.

Pri tome za prostor X kažemo da je nizovno kompaktan ako svaki niz ima konvergentan podniz. Ako pak je zatvorenje svakog prebrojivog skupa kompakt, kažemo da je prostor strogo prebrojivo kompaktan. Za ove posljednje vrijedi teorem analogan teoremu 3.7.

3.8. T e o r e m. Limes inverznog tipa strogo prebrojivo kompaktnih prostora je neprazan i strogo prebrojivo kompaktan.

Cilj ove točke je da dokažemo još dva teorema o neprekidnosti prebrojive kompaktnosti.

3.9. TEOREM. Neka je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, W_o\}$ inverzni sistem nepraznih prebrojivo kompaktnih prostora X_α i surjektivnih zatvorenih veznih preslikavanja $f_{\alpha\beta}$. Inverzni limes $X = \varprojlim \underline{X}$ je neprazan prebrojivo kompaktan prostor, a projekcije $f_\alpha : X \to X_\alpha$ su surjekcije.

D o k a z. Potrebno je dokazati samo prebrojivu kompaktnost limesa. Sve ostalo slijedi iz teorema 3.6. K tome napomenimo da surjektivnost veznih preslikavanja nije potrebna za dokaz prebrojive kompaktnosti limesa X, nego samo za nepraznost limesa i surjektivnost projekcija. Neka je dakle $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$ padajući niz zatvorenih skupova limesa X. Za svako $\alpha \in W_o$ dobivamo projiciranjem niz $f_\alpha(F_1) \supseteq f_\alpha(F_2) \supseteq \ldots \supseteq f_\alpha(F_k) \supseteq \ldots$ skupova prostora X_α. Zbog prebrojive kompaktnosti prostora X_α neprazan je skup

(3.9.1.) $$Y_\alpha = \bigcap_{k \in N} \overline{f_\alpha(F_k)}.$$

Nije teško nadalje dokazati da je uvijek ispunjena relacija

(3.9.2.) $$f_{\alpha\beta}(f_\beta(F_k)) = f_\alpha(F_k), \alpha < \beta, k \in N.$$

Zbog zatvorenosti i neprekidnosti preslikavanja $f_{\alpha\beta}$ bit će

(3.9.3.) $$f_{\alpha\beta}(\overline{f_\beta(F_k)}) = \overline{f_\alpha(F_k)}.$$

Na temelju svega možemo sada izvršiti redukciju na surjekcije, tj. pokazati da vrijedi relacija

(3.9.4.) $f_{\alpha\beta}(Y_\beta) = Y_\alpha, \alpha<\beta.$

Neka je, dakle, $y_\alpha \in Y_\alpha$. Zbog (3.9.1.) i (3.9.3.) neprazni su skupovi $Z_k = f_{\alpha\beta}^{-1}(y_\alpha) \cap f_\beta(F_k)$. Zbog prebrojive kompaktnosti prostora X_β neprazan je i skup

(3.9.5.) $Z_\beta = \bigcap_{k\in N} f_{\alpha\beta}^{-1}(y_\alpha) \cap (\bigcap_{k\in N} \overline{f_\beta(F_k)}) = f_{\alpha\beta}^{-1}(y_\alpha) \cap Y_\beta.$

Za bilo koju točku $y_\beta \in Z_\beta$ bit će $f_{\alpha\beta}(y_\beta) = y_\alpha$. Dokaz relacije (3.9.4.) je gotov. Označimo li restrikcije veznih preslikavanja $f_{\alpha\beta}$ na skupove Y_β sa $f'_{\alpha\beta}$, dobivamo inverzni sistem

(3.9.6.) $\underline{Y} = \{Y_\alpha, f'_{\alpha\beta}, W_o\}$

na koji možemo primijeniti teorem 3.6. i utvrditi da je Y=lim $\underline{Y}\neq 0$. Nije teško dokazati da je $Y \subseteq F_k$ za svaki $k\in N$. Time je dokaz prebrojive kompaktnosti limesa X završen.

Jednostavnom modifikacijom prethodnog dokaza dobivamo dokaz prebrojive kompaktnosti limesa neprekidnog inverznog sistema.

3.10. D e f i n i c i j a. (Pontrjagin |1|, Šćepin |1|). Neka je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, \Omega\}$ inverzni sistem definiran nad dobro uredjenim skupom Ω. Ako je za svaki limitni ordinal $\alpha\in\Omega$ ispunjena relacija $X_\alpha = \varprojlim \{X_\beta, f_{\beta\gamma}, \beta<\gamma<\alpha\}$, kažemo da je sistem $\underline{X}$ neprekidan.

Transfinitnom indukcijom jednostavno se dokazuje slijedeći

3.11. T e o r e m. Ako je $\underline{X}$ neprekidan inverzni sistem nepraznih prostora X_α i surjektivnih veznih preslikavanja $f_{\alpha\beta}$, tada je $X = \varprojlim \underline{X}$ neprazan i sve projekcije $f_\alpha : X\to X_\alpha$ su surjekcije.

Dokažimo na kraju ove točke slijedeći teorem.

3.12. TEOREM. Ako je $\underline{X}$ neprekidan inverzni sistem nepraznih prebrojivo kompaktnih prostora X_α i zatvorenih surjektivnih veznih preslikavanja $f_{\alpha\beta}$, tada je $X = \varprojlim \underline{X}$ neprazan i prebrojivo kompaktan.

D o k a z. Ponavljajući doslovce dokaz teorema (3.9.) dobivamo inverzni sistem (3.9.6.). Na temelju poznate relacije za svaki podskup limesa X,

(3.12.1.) $\bar{A} = \varprojlim \{f_\alpha(A), f'_{\alpha\beta}, \Omega\}$

odnosno za zatvoreni dio F limesa

(3.12.2.) $F = \varprojlim \{f_\alpha(F), f''_{\alpha\beta}, \Omega\}$,

(Engelkig |1|, Aleksandrov i Pasinkov |1|) slijedi da je sistem $\underline{Y}$ neprekidan. Primjenom teorema 3.11. dokazujemo da je $Y = \varprojlim \underline{Y}$ neprazan. Ponavljajući dalje dokaz teorema 3.9. završavamo dokaz teorema 3.12.

4. ZATVORENOST PROJEKCIJA

Zenor je u radu |1| pokazao da su projekcije f_n zatvorene ako su vezna preslikavanja inverznog niza $\underline{X} = \{X_n, f_{nm}, N\}$ zatvorena preslikavanja.

Pokažimo da analogna tvrdnja vrijedi još za neke inverzne sisteme.

4.1.TEOREM. Ako je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, W_o\}$ inverzni sistem prebrojivo kompaktnih prostora X_α sa zatvorenim veznim preslikavanjima, tada su projekcije $f_\alpha : X \to X_\alpha$ zatvorena preslikavanja.

D o k a z. Neka je F zatvoren podskup limesa X. Pokažimo da je nemoguće da za kofinalno mnogo indeksa bude neprazan skup $Y_\alpha = \overline{f_\alpha(F)} \setminus f_\alpha(F)$. Zbog relacija (3.9.2.) i (3.9.3.) vrijedi relacija

(4.1.1.) $Y_\alpha = f_{\alpha\beta}(Y_\beta), \beta>\alpha$.

Dobili smo inverzni sistem

(4.1.2.) $\underline{Y} = \{Y_\alpha, f_{\alpha\beta/Y_\beta}, W_o\}$

na koji doduše ne možemo primijeniti teorem 3.6., ali možemo transfinitnom indukcijom dokazati nepraznost limesa $Y = \lim \underline{Y}$. Polazeći od $y_o \varepsilon Y_o$ možemo zbog (4.1.1.) odrediti $y_1 \varepsilon Y_1$ sa svojstvom $f_{o1}(y_1) = y_o$. Neka je za sve $\alpha<\beta<\omega_1$ konstruirana koordinata y_α . Konstruirajmo koordinatu $y_\beta \varepsilon Y_\beta$. Ako redni broj β ima neposrednog prethodnika, tada za $y_{\beta-1}\varepsilon Y_{\beta-1}$ postoji $y_\beta \varepsilon Y_\beta$ sa svojstvom $f_{\beta-1\beta}(y_\beta) = y_{\beta-1}$ i nova koordinata je konstruirana. Ako je β limitni ordinal, tada za već konstruirane koordinate $y_\alpha, \alpha>\beta$ imamo niz

(4.1.3.) $f^{-1}_{o\beta}(y_o) \supseteq f^{-1}_{1\beta}(y_1) \supseteq \dots \supseteq f^{-1}_{\alpha\beta}(y_\alpha) \supseteq \dots$

u prostoru X_β. Zbog (4.1.1.) neprazni su skupovi

(4.1.4.) $Z_\alpha = f^{-1}_{\alpha\beta}(y_\alpha) \cap Y_\beta$.

Zbog prebrojive kompaktnosti prostora X_β neprazan je skup

(4.1.5.) $Z_\beta = \overline{\bigcap_{\beta>\alpha} f^{-1}_{\alpha\beta}(y_\alpha)} \cap Y_\beta$.

Ako je, dakle, $y_\beta \;\varepsilon\; Z_\beta$, tada je $y_\beta \varepsilon \bigcap_{\beta>\alpha} f^{-1}_{\alpha\beta}(y_\alpha)$ i $y_\beta \;\varepsilon\; \bar{Y}_\beta$.

To znači da je $f_{\alpha\beta}(y_\beta) = y_\alpha$. Iz $y_\beta \varepsilon Y_\beta$ slijedi da je $y_\beta \;\varepsilon\; \overline{f_\beta(F)}$. Ne može nadalje biti $y_\beta \;\varepsilon\; f_\beta(F)$ jer bi tada bile $y_\alpha \varepsilon f_\alpha(F)$, što nije zbog definicije skupa Y_α. Prema tome je $y_\beta \varepsilon Y_\beta$ i transfinitna indukcija teče dalje. Time je dokazano da je $Y = \lim \underline{Y}$ neprazan. Zbog (3.12.1) je $Y \subseteq F$, a zbog (3.12.2.) je za svako $y \varepsilon Y$ ispunjena relacija $f_\alpha(y) = y_\alpha \varepsilon \overline{f_\alpha(F)} \setminus f_\alpha(F)$.

To znači da je $y \notin F$. Dobivena kontradikcija $y \varepsilon F \wedge y \notin F$ dokazuje da je za kofinalno mnogo indeksa skup Y_α prazan, tj. da je

(4.1.6.) $\overline{f_\alpha(F)} = f_\alpha(F), \; \alpha>\alpha_o$.

Zbog zatvorenosti veznih preslikavanja $f_{\alpha\beta}$ ova je relacija ispunjena za sve $\alpha<\omega_1$. Time je konačno zatvorenost projekcija $f_\alpha : X \to X_\alpha$ dokazana.

Ako je inverzni sistem $\underline{X}$ u prethodnom teoremu neprekidan, tada nije potrebna prebrojiva kompaktnost za egzistenciju točke y_β za limitni ordinal β. Egzistencija te točke slijedi jednostavno iz neprekidnosti sistema $\underline{X}$. Vrijedi, dakle, i ovaj

4.2.TEOREM. Ako je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, \Omega\}$ neprekidni inverzni sistem sa zatvorenim veznim preslikavanjima $f_{\alpha\beta}$, tada su i projekcije $f_\alpha : X \to X_\alpha$ zatvorena preslikavanja.

5. POVEZANOST I KOMPONENTE POVEZANOSTI

Ova točka sadrži osnovne definicije potrebne u točkama koje slijede.

5.1. D e f i n i c i j a. Topološki prostor X je povezan ako ne sadrži otvoren - zatvoren podskup različit od X i $\emptyset$. Ekvivalentno tome vrijedi: prostor X je povezan onda i samo onda kada se ne može prikazati kao unija dva neprazna zatvorena disjunktna skupa.

5.2. P r i m j e r. Skup realnih brojeva R je povezan prostor u standardnoj topologiji.

5.3. D e f i n i c i j a. Povezan kompaktan Hausdorfov prostor zove se kontinuum. Povezan prebrojivo kompaktan Hausdorfov prostor zove se pseudokontinuum.

5.4. Neprekidna Hausdorfova slika kontinuuma (pseudokontinuuma) je kontinuum (pseudo kontinuum).

5.5. Da bi produkt $\prod X_\alpha, \alpha\varepsilon A$ bio povezan prostor, nužno je i dovoljno da svi prostori X_α, $\alpha\varepsilon A$ budu povezani.

5.6. D e f i n i c i j a. Komponenta povezanosti prostora X je maksimalan povezan podskup prostora X.

Komponente povezanosti su zatvoreni i medjusobno disjunktni skupovi.

5.7. Ako je $A \subseteq X$ povezan, tada je i $\bar{A}$ povezan skup.

5.8. Ako su $Y_\alpha \subseteq X$, $\alpha\varepsilon A$ povezani i postoji $x \varepsilon X$ sa svojstvom $x \varepsilon \bigcap Y_\alpha, \alpha\varepsilon A$, tada je i $Y = \bigcup Y_\alpha, \alpha\varepsilon A$ povezan.

5.9. D e f i n i c i j a. Topološki prostor X je lokalno povezan ako za svaku točku $x \varepsilon X$ i svaki otvoreni skup $U \ni x$ postoji povezan skup C sa svojstvom $x \varepsilon \operatorname{Int} C \subseteq U$.

5.10. D e f i n i c i j a. (Engelking |1|,pp.440.) Preslikavanje $f: X \to Y$ je monotono ako je za svaku točku $y\varepsilon Y$ povezan skup $f^{-1}(y)$.

5.11. Ako je $f: X \to Y$ zatvoreno monotono preslikavanje, tada je za svaki povezani $C \subseteq Y$ povezan skup $f^{-1}(C) \subseteq X$.

6. POVEZANOST INVERZNOG LIMESA

Najprije ćemo u ovoj točki analizirati uvjete koji osiguravaju povezanost limesa uz povezane i eventualno normalne prostore X .

Ako limes X nije povezan, tada postoje otvoreno-zatvoreni skupovi F_1 i F_2 sa svojstvima:

(6.1.) $\quad F_1 \cup F_2 = X,$

(6.2.) $\quad F_1 \cap F_2 = \emptyset.$

Za neprekidna preslikavanja promatramo skupove $F_{1\alpha} = \overline{f_\alpha(F_1)}$, $F_{2\alpha} = \overline{f_\alpha(F_2)}$. Ako su projekcije f_α zatvorene, promatramo skupove $F_{1\alpha} = f_\alpha(F_1)$, $F_{2\alpha} = f_\alpha(F_2)$. U jednom i drugom slučaju vrijede relacije (Engelking |1|,pp.137).

(6.3.) $\quad F_1 = \lim \{F_{1\alpha}, f'_{\alpha\beta}, A\}$,

(6.4.) $\quad F_2 = \lim \{F_{2\alpha}, f''_{\alpha\beta}, A\}$,

gdje su $f'_{\alpha\beta}$ i $f''_{\alpha\beta}$ odgovarajuće restrikcije veznih preslikavanja. Nadalje, skupovi $F_\alpha = F_{1\alpha} \cap F_{2\alpha}$ tvore inverzni sistem

(6.5.) $\quad \underline{F} = \{F_\alpha, f'''_{\alpha\beta}, A\}$.

Ako sistem (6.5.) ima neprazan limes $F = \lim \underline{F}$, tada je očito $F \subseteq F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Dobivena kontradikcija dokazuje lemu.

6.6. LEMA. Ako su prostori X_α i preslikavanja $f'''_{\alpha\beta}$ takva da sistem 6.5. uz neprazne F_α ima neprazan limes $F = \varprojlim \underline{F}$, tada za barem jedan indeks $\alpha \in A$ mora biti

(6.7.) $\quad F_\alpha = F_{1\alpha} \cap F_{2\alpha} = \emptyset.$

6.8. Ako su k tome projekcije $f_\alpha : X \to X_\alpha$ surjekcije, tada je $F_{1\alpha} \cup F_{2\alpha} = X_\alpha$. Zbog povezanosti prostora X_α mora biti $F_1 = \emptyset$ ili $F_2 = \emptyset$.

6.9. Ako, dakle, svaki inverzni sistem (6.5.) uz surjektivne projekcije f_α ima neprazan limes, tada uz povezane X_α mora biti povezan i limes X.

6.10. Ako projekcije f_α nisu surjekcije, tada uz normalne prostore za disjunktne skupove iz (6.7.) postoje otvoreni skupovi U_α, $V_\alpha \subseteq X_\alpha$ sa svojstvima:

(6.11.) $\quad U_\alpha \cap V_\alpha = \emptyset$,

(6.12.) $\quad F_{1\alpha} \subseteq U_\alpha$, $F_{2\alpha} \subseteq V_\alpha$.

6.13. Ako je $U_\alpha \cup V_\alpha = X_\alpha$, tada dobivamo opet kontradikciju s povezanošću prostora X_α.

(6.14.) Ako je $Y_\alpha = X_\alpha \setminus (U_\alpha \cup V_\alpha)$ neprazan, neprazni su i $Y_\beta = X_\beta \setminus f^{-1}_{\alpha\beta}(U_\alpha \cup V_\alpha)$ za sve $\beta > \alpha$. Dobivamo ponovo inverzni sistem $Y = \{Y_\beta, f'_{\beta\gamma}, \alpha < \beta < \gamma\}$na koji možemo primijeniti sve zaključke 6.12.-6.14.

Provedena analiza omogućuje slijedeće teoreme.

6.15. T e o r e m. Inverzni limes kontinuuma je kontinuum.

D o k a z. To je poznati Teorem Capela |1|. Kada X ne bi bio povezan, promatrali bismo inverzni sistem $\underline{Y}$ konstruiran u (6.14.). Inverzni sistem kompakata uvijek ima neprazan limes. Mora dakle za barem jedan indeks vrijediti (6.13), što opet vodi u kontradikciju s povezanošću prostora X_α. To znači da pretpostavka o nepovezanosti limesa uvijek vodi u kontradikciju, tj. X je povezan prostor. Dokaz je gotov.

Na temelju prethodne analize i teorema 3. točke autor je u radu |1| dokazao ove teoreme o prebrojivoj neprekidnosti povezanosti.

6.16.TEOREM. Neka je $\underline{X} = \{X_n, f_{nm}, N\}$ inverzni niz povezanih prebrojivo kompaktnih prostora X_n i zatvorenih surjektivnih veznih preslikavanja f_{nm}. Inverzni limes $X = \lim \underline{X}$ je povezan prebrojivo kompaktan prostor.

D o k a z. Zbog zatvorenosti projekcija f_n moguće je u 6.3. i 6.4. uzeti samo projekcije skupova F_1 i F_2 iz (6.1.) i (6.2.). Sistem (6.5.) ima neprazan limes radi teorema 3.5. Limes X je dakle povezan prema (6.9.).

6.17. TEOREM. Inverzni limes niza prebrojivo kompaktnih normalnih povezanih prostora uz zatvorena vezna preslikavanja je povezan prostor.

Limes je naravno u ovom slučaju normalan i prebrojivo kompaktan.

Na kraju ove točke dokažimo još dva teorema o povezanosti limesa inverznih sistema.

6.18. TEOREM. Neka je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, W_0\}$ inverzni sistem prebrojivo kompaktnih povezanih prostora X_α i zatvorenih surjektivnih monotonih preslikavanja $f_{\alpha\beta}$. Inverzni limes X je prebrojivo kompaktan povezan prostor.

D o k a z. Pretpostavimo da X nije povezan. Postoje dva disjunktna zatvorena skupa F_1 i F_2 sa svojstvima (6.1.) i (6.2.). Prema teoremima (3.9.) i (4.1.) projekcije $f_\alpha : X \to X_\alpha$ su surjektivna zatvorena preslikavanja. To znači da je za svako $\alpha \in W_0$

(6.18.1) $$f_\alpha(F_1) \cup f_\alpha(F_2) = X_\alpha$$

i k tome su $f_\alpha(F_1)$ i $f_\alpha(F_2)$ zatvoreni skupovi. Pretpostavimo li da su disjunktni, dolazimo u kontradikciju s povezanošću prostora X_α. Pretpostavka da nisu disjunktni dovodi nas u kontradikciju na slijedeći način. za svako $\alpha \in W_0$ imamo neprazan prebrojivo kompaktan skup

(6.18.2.) $$Y_\alpha = f_\alpha(F_1) \cap f_\alpha(F_2).$$

Dokažimo relaciju

(6.18.3.) $$f_{\alpha\beta}(Y_\beta) = Y_\alpha, \ \alpha<\beta.$$

Neka je $y_\alpha \in Y_\alpha$. Kada $f_{\alpha\beta}^{-1}(y_\alpha)$ ne bi sjekao Y_β, imali bismo rastav

(6.18.4.) $$f_{\alpha\beta}^{-1}(y_\alpha) = (f_{\alpha\beta}^{-1}(y_\alpha) \cap f_\beta(F_1)) \cap (f_{\alpha\beta}^{-1}(y_\alpha) \cap f_\beta(F_2)).$$

Zbog $f_{\alpha\beta}^{-1}(y_\alpha) \cap Y_\beta = \emptyset$ vrijedila bi relacija

(6.18.5.) $$(f_{\alpha\beta}^{-1}(y_\alpha) \cap f_\beta(F_1)) \cap (f_{\alpha\beta}^{-1}(y_\alpha) \cap f_\beta(F_2)) = \emptyset$$

Time bismo na skupu $f_{\alpha\beta}^{-1}(y_\alpha)$ dobili rastav na disjunktne zatvorene skupove. To je radi monotonosti preslikavanja $f_{\alpha\beta}$ nemoguće.

Relacija (6.18.3.) je dokazana. Primijenimo li sada na sistem

(6.18.6.) $\underline{Y} = \{Y_\alpha, f_{\alpha\beta/Y_\beta}, W_o\}$

teorem 3.6., dobivamo da je $Y = \lim \underline{Y} \neq \emptyset$. Zbog relacije(3.9.8.) slijedi da je $Y \subseteq F_1 \cap F_2$. Ovo se protivi disjunktnosti skupova F_1 i F_2. Dokaz teorema je gotov.

Analiza dokaza ovog teorema pokazuje da je bitno da projekcije f_α budu zatvorene surjekcije i da redukcija na surjektivnost osigurava nepraznost limesa Y. To je ispunjeno u slučaju inverznog niza i neprekidnog inverznog sistema. Imamo dakle ove teoreme.

6.19. TEOREM. Ako je $\underline{X} = \{X_n, f_{nm}, N\}$ inverzni niz povezanih prostora i zatvorenih surjektivnih veznih preslikavanja f_{nm}, tada je $X = \lim \underline{X}$ povezan ako su vezna preslikavanja monotona.

6.20. TEOREM. Neka je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, \Omega\}$ neprekidni inverzni sistem povezanih prostora X_α i zatvorenih surjektivnih monotonih veznih preslikavanja, tada je $X = \lim \underline{X}$ povezan prostor.

7. LOKALNA POVEZANOST LIMESA

Capel |1| je istraživao inverzne sisteme s monotonim veznim preslikavanjima. On je za kompakte u tom slučaju dokazao monotonost projekcija $f_\alpha : X \to X_\alpha$. Dokažimo analogne rezultate za inverzne sisteme s pseudosavršenim monotonim preslikavanjima.

7.1. D e f i n i c i j a. Preslikavanje $f: X \to Y$ je pseudosavršeno ako je neprekidno, zatvoreno i ako je za svaku točku $y \in Y$ skup $f^{-1}(y)$ prebrojivo kompaktan.

7.2. TEOREM. Ako je $\underline{X} = \{X_n, f_{nm}, N\}$ inverzni niz s pseudosavršenim monotonim veznim preslikavanjima f_{nm}, tada su projekcije $f_n : X \to X_n$ pseudosavršena monotona preslikavanja.

D o k a z. Za svaku točku $x_n \in X_n$ je

(7.2.1.) $f_n^{-1}(x_n) = \underleftarrow{\lim} \{f_{nm}^{-1}(x_n), m>n\}$.

Prema teoremu 3.5. i 6.16. je limes na desnoj strani povezan i prebrojivo kompaktan, a prema teoremu Zenora |1| su projekcije f_n zatvorene. Dokaz je gotov.

7.3. TEOREM. Neka je $\underline{X} = \{X_n, f_{nm}, N\}$ inverzni niz lokalni povezanih prostora X_n i pseudosavršenih monotonih preslikavanja f_{nm}. Inverzni limes $X = \lim X$ je lokalno povezan prostor.

D o k a z. Za svaku točku $x \in X$ i svaku okolinu $U \ni x$ postoji prirodan broj $n \in N$ i okolina U_n točke $f_n(x)$ sa svojstvom $f_n^{-1}(U_n) \subseteq U$. Zbog lokalne povezanosti prostora X_n postoji povezan $C_n \subseteq U_n$ takav da je $f_n(x) \in \mathrm{Int} C_n$. Zbog zatvorenosti i monotonosti projekcija f_n (prethodni teorem!) i tvrdnje 5.11. je skup $f_n^{-1}(C_n) \subseteq U$ povezan. Dokaz lokalne povezanosti limesa je gotov.

Ako su prostori X_n lokalno povezani i prebrojivo kompaktni, tada zatvorena preslikavanja f_{nm} postaju pseudosavršena, pa imamo

7.4. KOROLAR. Uz zatvorena monotona vezna preslikavanja je svojstvo prebrojiva kompaktnost + lokalna povezanost prebrojivo neprekidno svojstvo.

U slučaju inverznog sistema $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, W_o\}$ s pseudosavršenim monotonim preslikavanjima $f_{\alpha\beta}$, uzeli bismo umjesto(7.2.1.)

(7.4.1.) $\quad f^{-1}(x_\alpha) = \lim\limits_{\leftarrow} \{f_{\alpha\beta}^{-1}(x_\alpha),\ \beta > \alpha\}.$

Za limes na desnoj strani primijenili bismo (6.18.) i dobili da je povezan i prebrojivo kompaktan. Primijenimo li zatim analogni dokaz kao i u teoremu 7.3., dobivamo

7.5. TEOREM. Ako je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, W_o\}$ inverzni sistem lokalno povezanih prostora X_α i pseudosavršenih monotonih preslikavanja $f_{\alpha\beta}$, tada je $X = \lim \underline{X}$ lokalno povezan.

Analogno, primijenimo li na (7.4.1.) teorem 6.20., dobivamo

7.6. TEOREM. Inverzni limes X neprekidnog inverznog sistema $\underline{X}$ lokalno povezanih prostora i pseudosavršenih monotonih veznih preslikavanja je lokalno povezan prostor.

8. KOMPONENTE POVEZANOSTI

Neka je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$ inverzni sistem s limesom $X = \lim \underline{X}$. Ako je K komponenta povezanosti limesa X, tada je $f_\alpha(K)$ povezan skup prostora X_α i sadržan je u nekoj komponenti povezanosti K_α zbog maksimalnosti komponenata povezanosti. Za $\beta>\alpha$ imat ćemo $f_\beta(K) \subseteq K_\beta$ i prema tome $f_{\alpha\beta} f_\beta(K) \subseteq f_{\alpha\beta}(K_\beta)$. Kako je $f_{\alpha\beta} f_\beta(K) = f_\alpha(K)$, to je $f_\alpha(K) \subseteq f_{\alpha\beta}(K_\beta)$. Odatle slijedi da je $f_\alpha(K) \subseteq K_\alpha \cap f_{\alpha\beta}(K_\beta)$. Zbog maksimalnosti komponente K_α opet slijedi $K_\alpha \supseteq f_{\alpha\beta}(K_\beta)$. Posljednja relacija znači da imamo inverzni sistem.

(8.1.) $\underline{K} = \{K_\alpha, f'_{\alpha\beta}, A\}$.

U ovom poglavlju dajemo neke odgovore na pitanje da li je promatrana komponenta K limes sistema $\underline{K}$? U tom će slučaju biti

(8.2.) $K = \lim\limits_{\leftarrow} \underline{K}$.

8.3. TEOREM. Ako je inverzni sistem $\underline{X}$ takav da inverzni sistem $\underline{K}$ ima povezan limes, tada je ispunjena relacija(8.2.) i obratno.

D o k a z. Kako je $f_\alpha(K) \subseteq K_\alpha$ i K zatvoren skup, to je $K = \lim \{f_\alpha(K), f'_{\alpha\beta}, A\}$. Odatle slijedi da je $K \subseteq \lim \underline{K}$. Ako je $\lim \underline{K}$ povezan, onda je posljednja relacija moguća samo ako je $K = \lim \underline{K}$ zbog maksimalnosti komponenata.

Sada možemo na temelju teorema povezanosti limesa iz prethodnog poglavlja dobiti niz teorema o komponentama povezanosti limesa.

8.4. TEOREM. Ako je $\underline{X} = \{X_n, f_{nm}, N\}$ inverzni niz prebrojivo kompaktnih prostora X_n i zatvorenih veznih preslikavanja f_{nm}, tada je svaka komponenta povezanosti limesa $\underline{X}$ inverzni limes komponenata povezanosti prostora X_n.

D o k a z. Primjena teorema 6.16. i teorema 8.3.

8.5. TEOREM. Ako je $\underline{X}$ inverzni niz prebrojivo kompaktnih normalnih prostora X_n i zatvorenih veznih preslikavanja f_{nm}, tada je svaka komponenta povezanosti limesa $X=\lim\underline{X}$ inverzni limes komponenata povezanosti prostora X_n.

D o k a z. Teorem 6.17. i teorem 8.3.

Ako su vezna preslikavanja $f_{\alpha\beta}$ zatvorena i monotona, tada je za $\beta>\alpha$ povezan skup $f^{-1}_{\alpha\beta}(K_\alpha) \supseteq K_\beta$ (Engelking |1| ,pp.441).Zbog maksimalnosti komponente povezanosti K_β slijedi $f^{-1}_{\alpha\beta}(K_\alpha) = K_\beta$. To znači da inverzni sistem (8.1.) ima surjektivna zatvorena monotona vezna preslikavanja $f'_{\alpha\beta}$. Možemo dakle primijeniti teoreme 6.18., 6.19. i 6.20. uz teorem 8.3. i dobiti slijedeće teoreme.

8.6. TEOREM. Svaka komponenta povezanosti limesa sistema $\{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, W_o\}$ prebrojivo kompaktnih prostora X_α i surjektivnih zatvorenih monotonih veznih preslikavanja $f_{\alpha\beta}$ je inverzni limes komponenata povezanosti prostora X_α.

8.7. TEOREM. Ako je $\underline{X}$ inverzni niz sa zatvorenim surjektivnim monotonim veznim preslikavanjima, tada je svaka komponenta povezanosti limesa $X=\lim\underline{X}$ inverzni limes komponenata prostora X_n.

8.8. TEOREM. Ako je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, \Omega\}$ neprekidan inverzni sistem sa zatvorenim surjektivnim monotonim preslikavanjima $f_{\alpha\beta}$, tada je svaka komponenta povezanosti limesa X inverzni limes komponenata povezanosti prostora X_α.

9. NEPREKIDNOST UNIKOHERENTNOSTI

9.1. D e f i n i c i j a (Kuratovski II,pp.171). Topološki prostor je unikoherentan ako je za svaki par povezanih zatvorenih podskupova $A,B \subseteq X$ sa svojstvom $A \cup B = X$ povezan i presjek $A \cap B$.

Ako u ovoj definiciji ne zahtijevamo uvjet $A \cup B = X$, kažemo da je prostor strogo unikoherentan.

9.3. TEOREM. Neka je $\underline{X} = \{X_n, f_{nm}, N\}$ inverzni niz unikoherentnih prebrojivo kompaktnih normalnih prostora X_n i zatvorenih surjektivnih preslikavanja f_{nm}. Tada je $X = \lim \underline{X}$ neprazan normalan prebrojivo kompaktan unikoherentan prostor.

D o k a z. Potrebno je dokazati samo unikoherentnost limesa X. Neka su A i B zatvoreni, povezani i $A \cup B = X$. Zbog surjektivnosti i zatvorenosti projekcija su $f_n(A)$ i $f_n(B)$ zatvoreni, povezani i $f_n(A) \cup f_n(B) = X_n$. Zbog unikoherentnosti prostora X_n je $Y_n = f_n(A) \cap f_n(B)$ povezan. Jasno je da skupovi Y_n čine inverzni niz

(93.1.) $\underline{Y} = \{Y_n, f'_{nm}, N\}$

na koji možemo primijeniti teorem 6.17. i dobiti da je $Y=\lim \underline{Y}$ povezan. Zbog relacije (3.12.2.) primijenjene na skupove A i $\overline{B}$ je $Y=A \cap B$. To znači da je i $A \cap B$ povezan. Unikoherentnost limesa X je dokazana.

Za strogu unikoherentnost nije nam potrebna relacija $f_n(A) \cup f_n(B) = X_n$ pa prema tome ni surjektivnost projekcija. Prema tome iz prethodnog dokaza slijedi

9.3. TEOREM. Ako je $\underline{X} = \{X_n, f_{nm}, N\}$ inverzni niz normalnih strogo unikoherentnih prebrojivo kompaktnih prostora X_n i zatvorenih veznih preslikavanja f_{nm}, tada je $X = \lim \underline{X}$ normalan strogo unikoherentan prebrojivo kompaktan prostor.

Za monotona zatvorena vezna preslikavanja će kao i u dokazu teorema 6.18. biti vezna preslikavanja sistema 9.2.1. surjekcije, pa iz teorema 6.19. slijedi

9.4. TEOREM. Ako je $\underline{X}$ inverzni niz unikoherentnih prostora i zatvorenih monotonih surjektivnih veznih preslikavanja, tada je $X = \lim \underline{X}$ unikoherentan.

10. EKSTREMNA NEPOVEZANOST LIMESA

Istraživanja ovog rada završit ćemo nekim teoremima o neprekidnosti ekstremne nepovezanosti limesa.

10.1. D e f i n i c i j a. (Engelking |1|, pp.452.). Topološki prostor X je nepovezan ako svaka dva disjunktna otvorena podskupa $U,V \subseteq X$ imaju disjunktna zatvorenja.

10.2. (Engelking |1|,pp.454.). Limes inverznog niza ekstremno nepovezanih prostora ne mora biti ekstremno nepovezan.

Dokažimo neprekidnost ekstremne nepovezanosti za zatvorena ireducibilna vezna preslikavanja.

10.4. D e f i n i c i j a. Preslikavanje $f:X\ Y\to$ je ireducibilno ako ne postoji zatvoreni $F \subseteq X$ sa svojstvom $f(F)=f(X)$.

10.4. Ako je $f:X\to Y$ ireducibilno preslikavanje, tada je za svaki otvoreni $U \subseteq X$ neprazna mala slika $f^*(U)= \{y\varepsilon Y : f^{-1}(y) \subseteq U\}$.

10.5. Ako je $f:X\to Y$ zatvoreno ireducibilno preslikavanje, tada je mala slika $f^*(U)$ neprazna i otvorena za svaki neprazan i otvoren skup $U \subseteq X$.

10.6. (Arhangelskij i Ponomarev |1|,pp.356.). Ako je $f:X \to Y$ zatvoreno ireducibilno preslikavanje, tada je za svaki otvoreni skup $U \subseteq X$ ispunjena relacija $f(\overline{U}) = \overline{f^*(U)}$.

Dokažimo sada naš teorem.

10.7. TEOREM. Ako je $\underline{X} = \{X_n, f_{nm}, N\}$ inverzni niz ekstremno nepovezanih prostora X_n i zatvorenih ireducibilnih surjektivnih veznih preslikavanja f_{nm}, tada je i $X = \lim \underline{X}$ ekstremno nepovezan.

D o k a z. Projekcije $f_n:X \to X_n$ su zatvorene i surjektivne. Dokažimo da su ireducibilne. U suprotnom slučaju bi postojao zatvoreni pravi dio $F \subseteq X$ sa svojstvom $f_n(F)=X_n$. Zbog ireducibilnosti preslikavanja $f_{nm}, m > n$, mora biti $f_m(F) = X_m$. Odatle bi slijedilo da je $F=\lim \{X_m, f_{nm}, m > n\}$, što nije. Dakle su f_{nm}

zatvorena ireducibilna preslikavanja. Dokažimo sada ekstremnu nepovezanost limesa X. Neka su U i V dva disjunktna otvorena skupa limesa X. Prema 10.6. su skupovi $f_n^*(U)$ i $f_n^*(V)$ neprazni i otvoreni radi zatvorenosti i ireducibilnosti preslikavanja f_n. Ovi skupovi su naravno i disjunktni, te je zbog ekstremne nepovezanosti prostora X_n ispunjena relacija

(10.7.1.) $\overline{f_n^*(U)} \cap \overline{f_n^*(V)} = \emptyset$

Zbog (10.6) vrijedi i relacija

(10.7.2.) $f_n(\bar{U}) \cap f_n(\bar{V}) = \emptyset$

Zbog zatvorenosti projekcija f_n je $f_n(\bar{U}) = \overline{f_n(U)}$. Odatle slijedi da je

(10.7.3.) $\overline{f_n(U)} \cap \overline{f_n(V)} = \emptyset$

Kako je

$$\bar{U} = \lim\{\overline{f_n(U)}, f'_{nm}, N\},$$
$$\bar{V} = \lim\{\overline{f_n(V)}, f''_{nm}, N\},$$

to je zbog relacije (10.7.3.) $\bar{U}$ ispunjena relacija $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$. Time je ekstremna nepovezanost limesa X dokazana.

Analiza dokaza pokazuje da vrijedi i općenitiji

10.8. TEOREM. Ako su za inverzni sistem $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$ sa limesom X vezna preslikavanja $f_{\alpha\beta}$ i projekcije f_α zatvorene, surjektivne i ireducibilne, tada ekstremna nepovezanost prostora X_α implicira ekstremnu nepovezanost limesa X.

U nizu prilika vidjeli smo da zatvorenost veznih preslikavanja implicira zatvorenost projekcija. Na taj način dobivamo slijedeće teoreme.

10.9. TEOREM. Ako je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, W_o\}$ inverzni sistem ekstremno nepovezanih prebrojivo kompaktnih prostora X_α sa zatvorenim surjektivnim ireducibilnim preslikavanjima $f_{\alpha\beta}$, tada je $X = \lim \underline{X}$ ekstremno nepovezan.

D o k a z slijedi iz teorema 4.1. i 10.8.

10.9. TEOREM. Neka je $\underline{X}$ neprekidni inverzni sistem sa zatvorenim surjektivnim ireducibilnim veznim preslikavanjima. Ako su svi prostori X_α ekstremno nepovezani, tada je i $X=\lim \underline{X}$ ekstremno nepovezan.

D o k a z slijedi iz teorema 4.2. i 10.8.

Z A K L J U Č A K

U radu je demonstrirana uloga teorema nepraznosti inverznog limesa u dokazima neprekidnosti raznih topoloških svojstava,posebice svojstava poopćene kompaktnosti (prebrojive kompaktnosti, nizovne kompaktnosti, strogo prebrojive kompaktnosti i m-kompaktnosti).

Dokazani su nadalje teoremi o zatvorenosti, pseudosavršenosti i monotonosti projekcija te na temelju tih teorema razni teoremi o neprekidnosti normalnosti, povezanosti i lokalne povezanosti. Dobiveni su i neki teoremi o komponentama povezanosti limesa i ekstremnoj nepovezanosti limesa. Pri tome se pokazalo da su zatvorena i zatvorena ireducibilna preslikavanja vrlo pogodna za takva istraživanja. Veći broj teorema su novi rezultati, dok su ostali generalizacije već poznatih teorema.

L I T E R A T U R A

Aleksandrov,P. S.

|1| *Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen belibiger Dimension, Ann.of Math.30(1929),101-187.*

|2| *Teorija funkcij dejstvitel'nogo peremenogo i teorija topologičeskih prostranstv, Nauka, Moskva, 1978.*

Aleksandrov,P.S. i Pasynkov,P.A.

|1| *Vvedenije v teoriju razmernosti, Nauka, Moskva, 1973.*

Arhangelskij,A.V. i Ponomarev,V.I.

|1| *Osnovy obščej topologii v zadačah i upražnenijah, Nauka, Moskva, 1974.*

Borsuk, K.

|1| Theory of shape,PWN,Warszawa, 1975.

Capel,C.E.

|1| Inverse limit spaces,Proc.Amer.Math.Soc.1953,233-244.

Eilenberg,S. and Steenrod,N.

|1| Foundations of algebraic topology.,Princeton,1952.

Engelking,R.

|1| General topology,PWN,Warszawa,1977.

Freudenthal,H.

|1| Entwicklungen von Räumen und ihren Gruppen, Compositio Math.4(1937,154-234.

Kuratovskij,K.

|1| Topologija, I i II, Mir, Moskva, 1966.

Kuroš,A.G.

|1| Kombinatorischer Aufbau der bikompakten topologischen Räumen , Compositio Math., 2(1935), 471-476.

Lefschetz,S.

|1| Algebraic topology, Providence,1974.

Lončar,I.

|1| Inverzni limesi prostora koji poopćuju kompaktne prostore, Disertacija, Prirodoslovno matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu,1980.

Mardešić,S. and Segal,J.

|1| Shapes of compacta and ANR - systems,Fund.Math.72/1971), 41-59.

Pontrjagin,L.S.

|1| Nepreryvnye gruppy, Nauka, Moskva, 1973.

Steenrod,N.

|1| Universal Homology Groups, Amer.Math.J.48(1936),661-701.

Ščepin,E.V.

|1| *Topologija predel'nyh prostranstv nesčetnyh obratnyh spektrov, UMN 31 (1976), 191-226.*

Zenor,P.

|1| *On countably paracompactness and normality, Prace Math 13 (1969), 23-32.*

Primljeno: 1980-11-27

Lončar I. Inverse Limits of Countably Compact Spaces

S U M M A R Y

Non-emptiness of the limit X of an inverse system $\underline{X} = \{ X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$ *plays a significant role in the proof of the continuity of various topological properties. Various theorems of the non-emptiness of the limit space X are given in Part Three of the present paper. These theorems are used in the other parts of the paper for the proof of the closedness of projections, the continuity of connectedness, local connectedness and extremal disconnectedness.*