Vesna Dušak,
Fakultet organizacije i informatike
V a r a ž d i n

UDK 65.012.2:681.3
Stručni rad

RJEŠAVANJE TRANSPORTNOG PROBLEMA LINEARNOG PROGRAMIRANJA UZ POMOĆ ELEKTRONIČKOG RAČUNALA

Transportni problem linearnog programiranja je problem prijevoza homogenog tereta iz m ishodišta u n odredišta uz minimalne troškove. Uz primjenu metode najmanjih troškova i MODI metode na elektroničkom računalu B-1700 pokušalo se riješiti problem prijevoza šljunčanog materijala. Uštede koje su pri tome postignute svakako opravdavaju primjenu suvremenih metoda optimizacije.

1. TRANSPORTNI PROBLEM LINEARNOG PROGRAMIRANJA

U današnjem tempu razvoja društva pred organe upravljanja i rukovodjenja postavlja se složen problem donošenja pravovremenih i valjanih odluka. Težnje tih organa često osujećuje nedostatak iskustva, manjkavost ili pak preobilje informacija. Ti problemi mogu se uspješno riješiti primjenom suvremenih znanstvenih metoda koje će pružiti relevantne informacije za donošenje ispravnih odluka. Metode Operacijskih istraživanja, kao kvantiativne metode optimizacije, svojom primjenom daju upravo takve informacije.

Linearno programiranje najčešće je primjenjivana metoda Operacijskih istraživanja jer ono svojom prilagodljivosti pokriva široko polje djelatnosti organizacija udruženog rada. Problem prijevoza proizvoda organizacija udruženog rada, kao i lokacija njihovih pogona, uspješno se može riješiti metodama za postavljanje i rješavanje transportnog problema linearnog programiranja. Ove su metode prilagodjene rješavanju spomenutog transportnog problema za razliku od SIMPLEX-metode koja ima univerzalnu primjenu na probleme linearnog programiranja.
Transportni problem linearnog programiranja, poznat i kao "problem Hitchcocka" (1,4), jest problem prijevoza nekog homogenog proizvoda 1) iz m ishodišta u n odredišta. Odredišta i ishodišta prijevoza tereta nisu medjustanice u procesu transporta, već ona predstavljaju krajnje točke prijevoza robe. Cilj rješenja problema jest da se zadovolji sva potražnja za robom i iscrpe sve rezerve robe uz minimalne troškove po pojedinim relacijama.

---

1) *...što znači da se bilo koja jedinica tog tereta koja ide iz nekog ishodišta u neko odredište može zamijeniti bilo kojom drugom jedinicom istog tereta koja je predvidjena na neku drugu relaciju.*

Da bi se postavio matematički model transportnog problema linearnog programiranja, potrebno je poznavati (kao i za ostale postupke linearnog programiranja).
- funkciju cilja ili kriterija (z),
- linearna ograničenja (a_i i b_j) te
- koeficijente kriterija uz pojedine varijable (c_{ij}).

Funkcija cilja je pojam koji metodom optimizacije treba poprimiti neku od svojih ekstremnih vrijednosti (maksimalan prihod ili minimalne troškove). Originalni transportni problem teži za minimizacijom troškova prijevoza neke robe na raznim relacijama. U matematičkoj notaciji funkcija cilja je slijedeća:

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \longrightarrow \min$$

pri čemu simbol x_{ij} predstavlja količine robe na pojedinim relacijama (od nekog ishodišta a_i do nekog odredišta b_j), a simbol c_{ij} troškove po jedinici tereta na relaciji i-j (4,181).

Linearna ograničenja su uvjeti pod kojima se promatrani problem odvija. Kod transportnog problema to su količine neke robe koje ishodišta mogu isporučiti i količina te iste robe koju odredišta mogu primiti. U slučaju kada bi se suma količina neke robe iz svih ishodišta poklopila sa sumom količina neke robe iz svih odredišta, dobiva se zatvoreni transportni problem koji u matematičkoj notaciji glasi (4,181):

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \longrightarrow \min$$

uz ograničenja:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i=1,.....,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j=1,.....,n$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Kada ne postoji ravnoteža izmedju ukupnih količina neke robe ishodišta i odredišta, javlja se otvoreni transportni problem sa suviškom u otpremi, gdje je vidljivo da postoji:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

a model se u tom slučaju može notirati:

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \longrightarrow \min$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} < a_i \qquad i=1,\ldots\ldots\ldots, m$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_j \qquad j=1,\ldots\ldots\ldots, n$$

$$x_{ij} \geqslant 0$$

ili otvoreni transportni problem sa suviškom u primanju gdje postoji relacija

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

a model se može notirati uobičajenim simbolima:

$$z = \sum_{i\ 1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \longrightarrow \min$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_i \qquad i=1,\ldots\ldots\ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} < b_j \qquad j=1,\ldots\ldots,n$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Da bi se otvoreni transportni problemi mogli riješiti, potrebno ih je svesti na zatvoreni transportni problem otvaranjem fiktivnog odredišta ili ishodišta (ovisno o tome da li je veća potražnja ili ponuda neke robe). Od ograničenja javlja se još jedno koje proizlazi iz same prirode problema, a to je da sve količine prijevoza moraju biti veće od 0.

Koeficijenti kriterija su ponderi uz pojedine količine prijevoza. To su u stvari troškovi prijevoza po jedinici tereta na pojedinim relacijama (c_{ij}). Da bismo dobili vrijednost neke kombinacije (iteracije) nakon primjene metoda za rješavanje transportnog problema, množimo koeficijente kriterija (troškove) s količinama prijevoza po pojedinim relacijama.

Metode kojima se postiže tražena vrijednost funkcija cilja (minimizacija troškova) uz navedena ograničenja jesu dvojake. Prve traže postavljanje početnog programa koji se zatim poboljšava tako dugo dok se ne iscrpu sve rezerve.Drugu grupu metoda čine one metode koje u traženju optimuma ne zahtijevaju postavljanje početnog programa (Ford-Fulkersonova metoda). Najpoznatije metode kojima se postavlja početni program transporta jesu:

- metoda sjeverozapadnog kuta,
- metoda najmanjih troškova,
- Vogelova aproksimativna metoda,
- metoda dvojnog prvenstva.

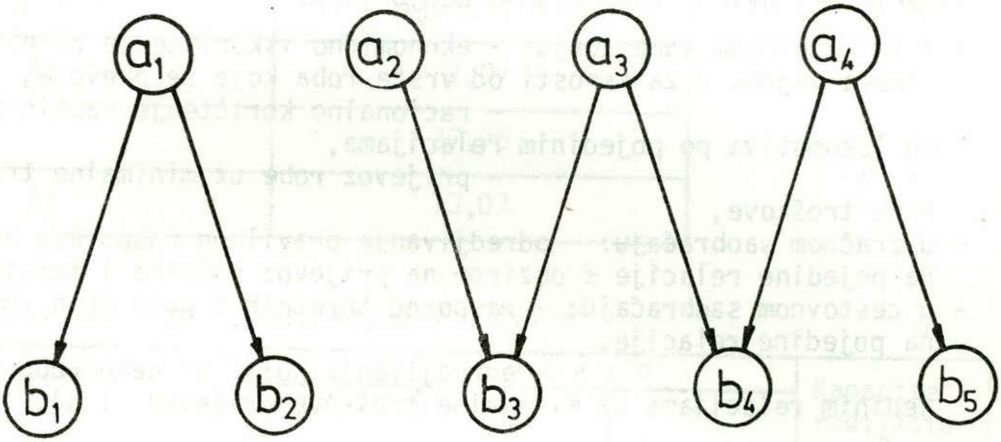
Najpoznatnije metode s kojima se testira početni program i traži konačno rješenje transportnog problema izmedju ostalih jesu:

- metoda relativnih troškova i
- MODI metoda.

Česta pojava u rješavanju transportnih problema linearnog programiranja je degeracija. Javlja se onda kada je broj relacija na kojima se prevozi teret manji od m+n-1. Promatrano preko strukture stabla to znači da u strukturi nedostaje jedna grana:

m=4

n =5



SLIKA 1

Na degeneraciju u transportnom problemu ukazuje i pojava dviju istih parcijalnih suma a_i i b_j ili njihovih medjusobnih kombinacija. Problem se rješava dodjeljivanjem zanemarujuće količine tereta (ε) na relaciju koja nedostaje. Ta količina mora biti manja od d/2m. Simbol d predstavlja vrijednost zadnje signifikantne znamenke u a_i i b_j. Ako su a_i i b_j cjelobrojni, tada je d=1, a ε manji od 1/2 m (4,193).

2. PRAKTIČNA PRIMJENA TRANSPORTNOG PROBLEMA LINEARNOG PROGRAMIRANJA

Transportni problem linearnog programiranja može se u praksi primijeniti na različita područja. Područje saobraćaja i problemi vezani uz saobraćaj naročito su pogodni za primjenu ove metode linearnog programiranja,što ne znači da se ne mogu primjenjivati i u mnogim drugim situacijama. Rezultati te primjene jesu optimalan raspored transportnih sredstava na pojedine relacije (ili drugih proizvodnih sredstava na pojedine operacije), optimalan raspored tereta koji se prevozi izmedju pojedinih lokacija, minimiziranje vremena transporta, pravilan izbor lokacije pogona i sl. Primjena metoda Operacijskih istraživanja, a s time i linearnog programiranja, tim više je opravdana ako se istakne cilj primjene tih metoda. U jednom slučaju taj cilj je maksimalan prihod, a u nekom drugom slučaju minimalni troškovi, a upravo to su i ciljevi poslovanja svake organizacije udruženog rada. Konkretni primjeri ovih metoda u saobraćaju jesu:

- u željezničkom saobraćaju: - ekonomično iskorištenje raznih tipova vagona u zavisnosti od vrste roba koje se prevoze,
  - racionalno korištenje raznih tipova lokomotiva po pojedinim relacijama,
  - prijevoz robe uz minimalne transportne troškove,
- u zračnom saobraćaju: - odredjivanje pravilnog rasporeda aviona na pojedine relacije s obzirom na prijevoz putnika i tereta,
- u cestovnom saobraćaju: - raspored teretnih i putničkih vozila na pojedine relacije,
  - odredjivanje količina neke robe na pojedinim relacijama uz minimalne troškove prijevoza i sl.

U ovom radu obradjena je primjena transportnog problema linearnog programiranja u cestovnom saobraćaju, točnije u prijevozu šljunčanog materijala.

Promatrana organizacija udruženog rada odvaja znatna sredstva na prijevoz svojih sirovina, pa se pokušalo prići primjeni metoda optimizacije kako bi se smanjili troškovi u manipuliranju tim sirovinama. Da bi se uspješno obavljao rad u sklopu promatrane organizacije udruženog rada,otvorene su šljunčare iz kojih se crpi šljunčani materijal, a postoji i vlastita asfaltna baza za proizvodnju asfaltne mase. Budući da postoji više šljunčara, a samo je jedna asfaltna baza, to je za primjenu transportnog problema linearnog programiranja interesantnija proizvodnja i prijevoz šljunčanog materijala. Kod nekih šljunčara (obično iznajmljenih) teren se najprije otkriva, zatim se iskopava šljunak i, konačno, utovaruje. Zadnja faza u manipuliranju šljunčanim materijalom je njegovo razastiranje po radilištu. Ovisno o radovima u pojedinim šljunčarama, te relaciji na kojoj se vozi šljunak, razlikuje se i cijena m^3 šljunka (tabela T-1).

Ovaj rad obradjuje kolanje šljunčanog materijala izmedju tri šljunčare Š1, Š2 Š3 i 4 radilišta R1, R2, R3 i R4. Kapaciteti šljunčara i potrebe radilišta, te troškovi transporta po pojedinim relacijama dani su u tabeli T-2. Šljunčare Š2 i Š3 su vlastite šljunčare organizacije udruženog rada čiji se primjer obradjuje, dok šljunak iz šljunčare Š1 predstavlja kupljenu deponiju koja se koristi za razna radilišta. Promatrani radovi odvijaju se u razdoblju izmedju 01.07.1978. i 19.07.1978.godine.

T-1 Cijena proizvodnje šljunka u din/m^3

Šljunčara	Cijena šljunka
Š1	7,07
Š2	27,76
Š3	13,03

T-2 Troškovi prijevoza šljunka u din/m^3

Radilišta	Š l j u n č a r e			Kapaciteti radilišta m^3
	Š1	Š2	Š3	
R1	75,80	72,90	63,30	4 800
R2	89,70	87,10	75,80	10 500
R3	107,20	104,50	94,70	16 500
R4	160,70	158,60	144,70	3 200
Kapaciteti šljunčara m^3	17 280	12 096	9 600	

Postojanje ovakvih radova i odgovarajućih podataka o izvršenim radovima daje mogućnost da se ovom problemu pridje s gledišta matematičkog programiranja. Kako promatrana organizacija udruženog rada crpi šljunak iz tri šljunčare, to će matrica modela imati tri reda. U ovom primjeru šljunkom se snabdijevaju četiri radilišta, pa će matrica modela imati četiri stupca. Dakle m=3 i n=4. Prema tabeli T-2 ograničenja modela(kapaciteti ishodišta i odredišta) glase:

- kapaciteti ishodišta:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 17\,280$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 12\,096$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 9\,600$$

- kapaciteti odredišta:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 4\,800$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 10\,500$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 16\,500$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 3\,200.$$

Prema istoj tabeli matrica troškova vezanih uz proizvodnju i prijevoz šljunka izgleda:

$$\begin{bmatrix} 82{,}87 & 96{,}77 & 114{,}27 & 167{,}77 \\ 100{,}66 & 114{,}86 & 132{,}26 & 186{,}36 \\ 76{,}33 & 88{,}83 & 107{,}73 & 157{,}73 \end{bmatrix}$$

Na temelju tih podataka možemo konstruirati slijedeći ekonomsko-matematički model za transportni problem:

T-3 Konstrukcija ekonomsko-matematičkog modela

Šljunčare	R a d i l i š t a				a_i
	R1	R2	R3	R4	
Š1	82,87	96,77	114,27	167,77	17 280
Š2	100,66	114,80	132,26	186,36	12 096
Š3	76,33	88,83	107,73	157,73	9 600
b_j	4 800	10 500	16 500	3 200	

Primijenjeni matematički model ukazat će svojim rješenjem na najbolje korištenje raspoloživih kapaciteta i dat će najniže troškove koji se javljaju prilikom obavljanja navedenih aktivnosti. Nadalje, postignuti rezultati optimizacije osigurat će komparativnu analizu sa činjeničnim stanjem što u svakom slučaju može poslužiti organima upravljanja i rukovodjenja prilikom definiranja planskih zadataka u organizaciji udruženog rada. Ujedno se ovakav model može uspješno riješiti uz primjenu elektroničkog računala.

3. FORTRAN PROGRAMI

Nakon što je zadatak točno definiran, kao i svi zahtjevi u vezi s njim, može se prići njegovom oblikovanju za rješavanje pomoću elektroničkog računala. U tu svrhu zadatak je potrebno prikazati u kodiranom obliku, tj. putem nekog programskog jezika. Zbog olakšanja rada i u svrhu bolje preglednosti toka obrade izradjuje se dijagram toka obrade. Grubi dijagram toka obrade za postavljanje transportnog problema linearnog programiranja putem metode najmanjih troškova i njegovo rješavanje putem MODI metode dani su kako slijedi.

Iz dijagrama tokova vide se osnovni dijelovi problema:

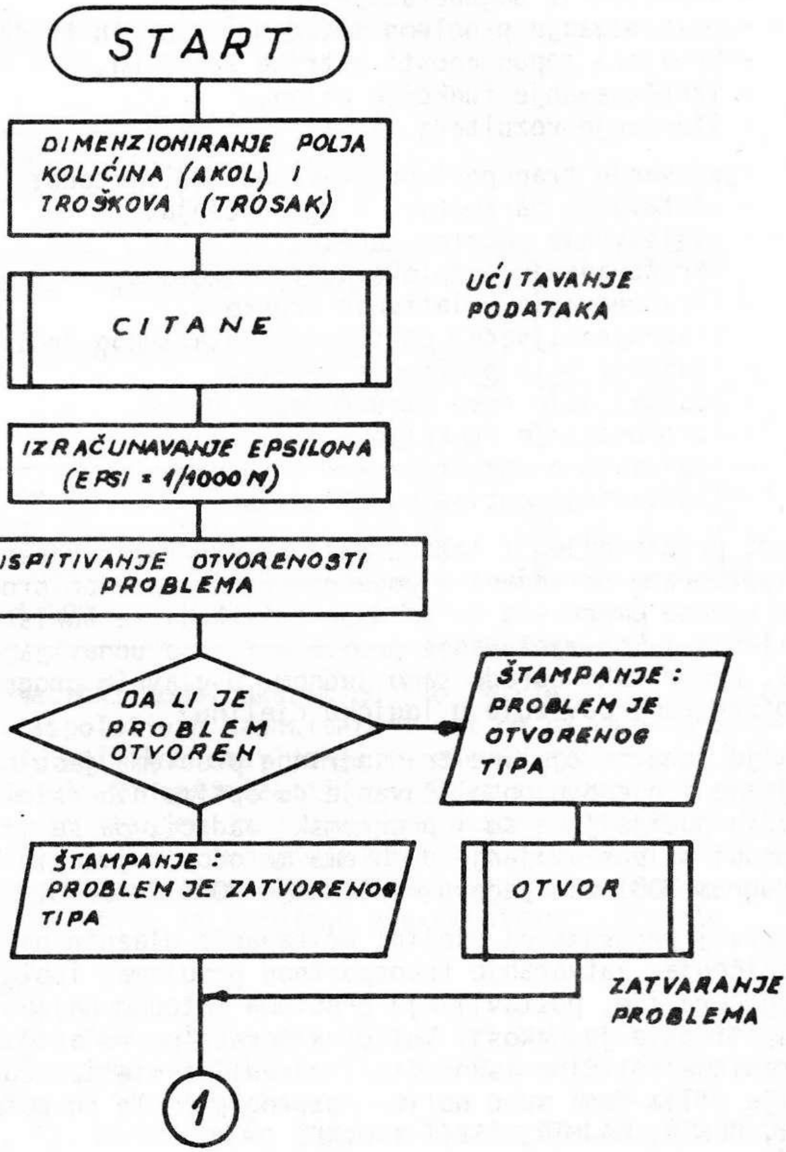
1. postavljanje transportnog problema:
   - učitavanje parametara i ograničenja,
   - ispitivanje zatvorenosti problema,
   - ispitivanje degeneracije problema,
   - postavljanje problema metodom najmanjih troškova,
   - provjera popunjenosti matrice količina,
   - izračunavanje funkcije cilja,
   - štampanje rezultata.
2. rješavanje transportnog problema MODI metodom:
   - učitavanje parametara i ograničenja,
   - ispisivanje početne tabele,
   - izračunavanje simpleks multiplikatora,
   - izračunavanje relativnih troškova,
   - traženje najvećeg pozitivnog relativnog troškova,
   - traženje puta pomicanja tereta,
   - postavljanje nove strukture,
   - izračunavanje funkcije cilja,
   - ispisivanje rezultata i
   - ispitivanje optimalnosti odluke.

Radi preglednijeg i lakšeg rada na programiranju neki su dijelovi programa obradjeni u posebnim rutinama - potprogramima. Time je ujedno omogućeno da se dijelovi, koji se koriste i kod postavljanja i kod rješavanja problema ili se ponavljaju u toku obrade, programski obrade samo jednom. U glavnim programima ti se potprogrami povezuju u logičku cjelinu.

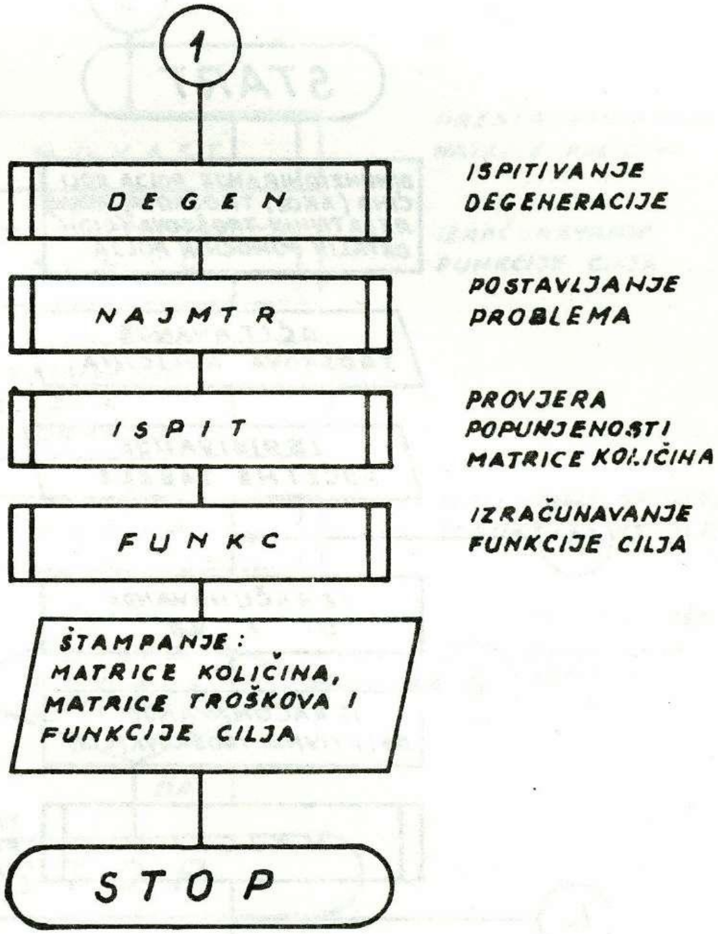
Dvije osnovne cjeline transportnog problema jesu njegovo postavljanje i njegovo poboljšavanje do optimalnih rezultata. Na isti način podijeljeni su i programski zadaci, pa se program TRANSP odnosi na postavljanje problema metodom najmanjih troškova, a program MODI za njegovo rješavanje MODI metodom.

U prvoj programskoj cjelini učitavanje ulaznih parametara i ograničenja, zatvaranje transportnog problema, ispitivanje njegove degeneracije, postavljanje problema metodom najmanjih troškova, ispitivanje jednakosti količina tereta po relacijama u odnosu na granične količine ishodišta i odredišta, te izračunavanje funkcije cilja dani su u obliku potprograma. To su potprogrami CITANE, DEGEN, NAJMTR, ISPIT i FUNKC.

DIJAGRAM TOKA OBRADE ZA POSTAVLJANJE PROBLEMA

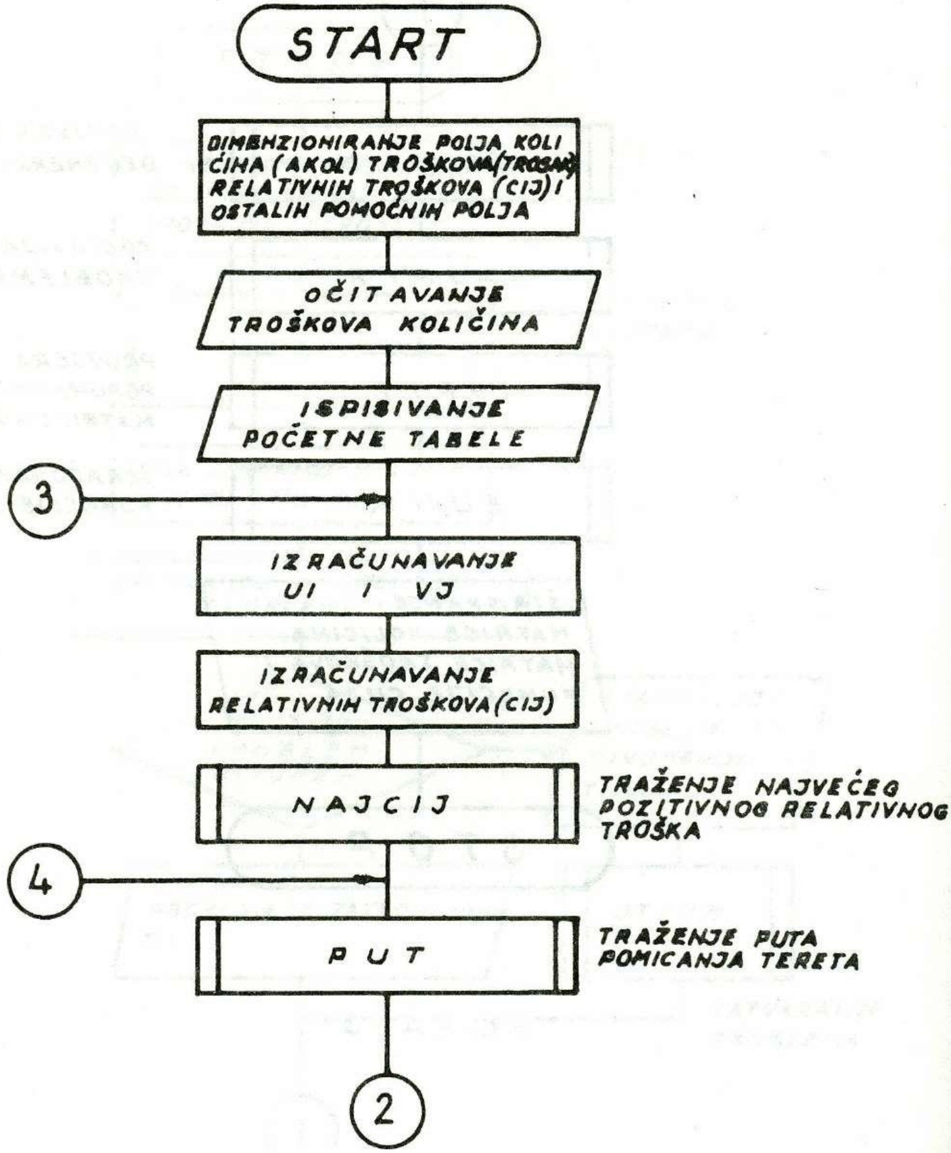


SLIKA 2

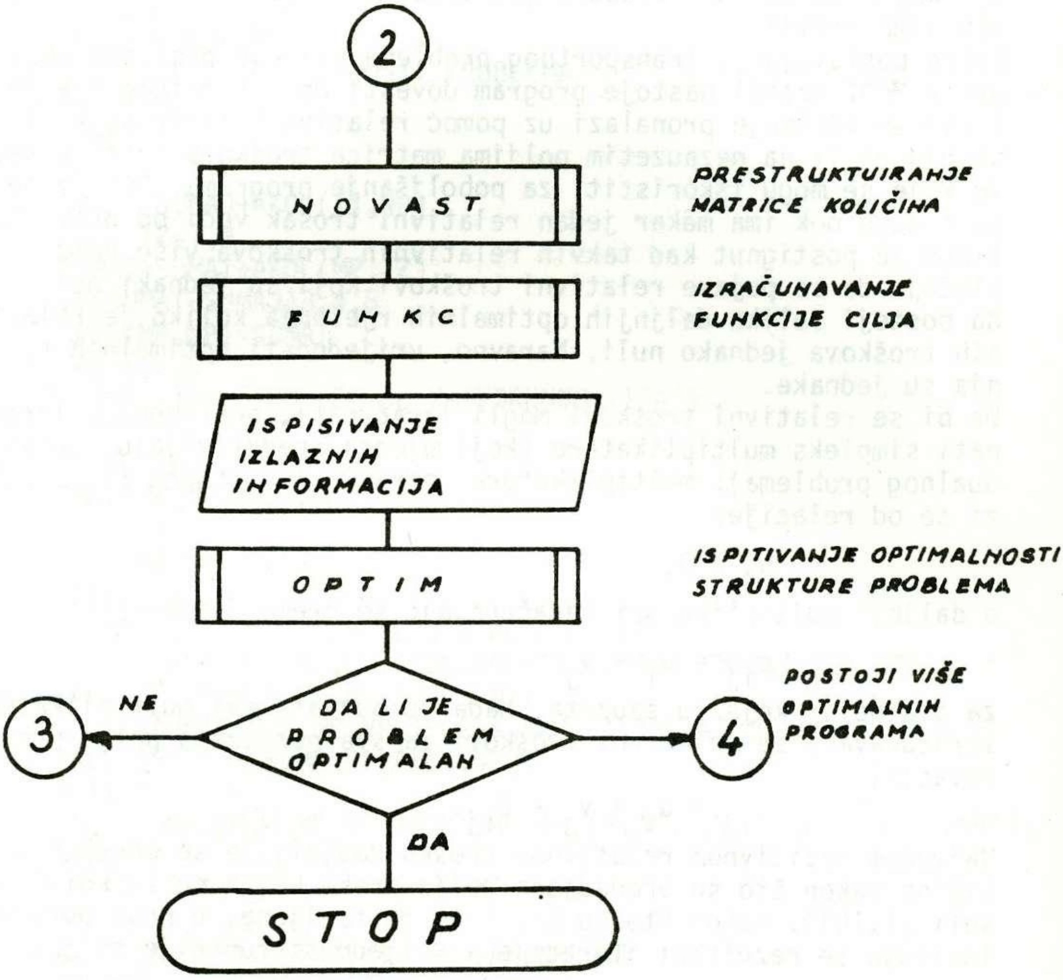

1
DEGEN
ISPITIVANJE DEGENERACIJE
NAJMTR
POSTAVLJANJE PROBLEMA
ISPIT
PROVJERA POPUNJENOSTI MATRICE KOLIČINA
FUNKC
IZRAČUNAVANJE FUNKCIJE CILJA
ŠTAMPANJE: MATRICE KOLIČINA, MATRICE TROŠKOVA I FUNKCIJE CILJA
STOP

SLIKA 3

DIJAGRAM TOKA OBRADE ZA RJEŠAVANJE PROBLEMA MODI METODOM



SLIKA 4


2
NOVAST
PRESTRUKTUIRANJE
MATRICE KOLIČINA
FUNKC
IZRAČUNAVANJE
FUNKCIJE CILJA
ISPISIVANJE
IZLAZNIH
INFORMACIJA
OPTIM
ISPITIVANJE OPTIMALNOSTI
STRUKTURE PROBLEMA
NE
3
DA LI JE
PROBLEM
OPTIMALAN
4
POSTOJI VIŠE
OPTIMALNIH
PROGRAMA
DA
STOP

SLIKA 5

Degeneracija problema ovdje se ispituje prije faze poboljšavanja programa, i to tako da se mogućnost degeneracije izbjegne dodavanjem malog broja (EPSI) kritičnim količinama, odnosno količinama kod kojih dolazi do izražaja jednakost parcijalnih suma ili njihovih kombinacija.
Nakon postavljanja transportnog problema slijede postupci koji prema MODI metodi nastoje program dovesti do optimalnog rješenja. Takvo se rješenje pronalazi uz pomoć relativnih troškova koji pokazuju da li na nezauzetim poljima matrice troškova postoje rezerve koje se mogu iskoristiti za poboljšanje programa. One postoje tako dugo dok ima makar jedan relativni trošak veći od nule. Optimum je postignut kad takvih relativnih troškova više nema. U slučaju da se pojave relativni troškovi koji su jednaki nuli, tada postoji toliko daljnjih optimalnih rješenja koliko je relativnih troškova jednako nuli. Naravno, vrijednosti optimalnih rješenja su jednake.
Da bi se relativni troškovi mogli izračunati, potrebno je izračunati simpleks multiplikatore (koji ujedno predstavljaju rješenje dualnog problema): multiplikatore retka (u_i) i stupca (v_j). Polazi se od relacije:

$$u_1 = 0,$$

a daljnji multiplikatori izračunavaju se prema jednakosti:

$$c_{ij} = u_i + v_j$$

za sva polja koja su zauzeta. Kada su poznati svi multiplikatori, izračunavaju se relativni troškovi za sva nezauzeta polja prema relaciji:

$$c_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}.$$

Najvećem pozitivnom relativnom trošku dodjeljuje se odredjena količina nakon što su pronadjena polja preko kojih se ta količina seli (1,161). Nakon što su količine postavljene, u novi poredak ispisuju se rezultati iteracije i vrijednost funkcije cilja.

Postupci za traženje najvećeg pozitivnog relativnog troška, traženje puta pomicanja tereta, postavljanje nove strukture matrice količina, izračunavanje funkcije cilja i ispitivanje optimalne strukture problema izdvojeni su u potprograme: NAJCIJ, PUT, NOVAST, FUNKC i OPTIM.

Slijede programi TRANSP i MODI i popis pojmova upotrijebljenih u njima. Zbog prirode transportnog problema linearnog programiranja programi su pisani u FORTRAN jeziku koji svojom strukturom olakšava programiranje matematičkih zadataka.

```
C METODE ZA RJEŠAVANJE TRANSPORTNOG PROBLEMA
      DIMENSION AKOL(20,20),TROŠAK (20,20)
C UČITAVANJE PODATAKA
      CALL CITANE (M,N,MP,NP,AKOL,TROSAK)
      D=1.0
      EPSI=D/1000*M
C ISPITIVANJE   OTVORENOSTI PROBLEMA
      SUMAI=0.
      SUMAJ=0.
      DO 1 I1=1,M
    1 SUMAJ=SUMAJ+AKOL(I1,NP)
      DO 2 I2=1,N
    2 SUMAI=SUMAI+AKOL(MP,I2)
      IF(SUMAI-SUMAJ)3,4,5
    4 AKOL(MP,NP)=SUMAI
      WRITE(6,6)
    6 FORMAT(10X,'PROBLEM JE ZATVORENOG TIPA')
      IVISE=0
      GO TO 10
    3 AKOL(MP,NP)=SUMAJ
      GO TO 7
    5 AKOL(MP,NP)=SUMAJ
    7 WRITE (6,8)
    8 FORMAT(10X,'PROBLEM JE OTVORENOG TIPA')
      CALL OTVOR(M,N,MP,NP,AKOL,TROSAK,SUMAI,SUMAJ,IVISE,EPSI)
   10 CALL DEGEN(M,N,MP,NP,AKOL,EPSI)
      CALL NAJMTR(M,N,MP,NP,TROSAK,AKOL,IVISE,&100)
      CALL ISPIT(M,N,MP,NP,AKOL,&100)
      NBIT=1
      CALL FUNKC(M,N,MP,NP,AKOL,TROSAK,IVISE,FCILJ,POZIT,AIKS,NBIT,
     *&100)
      DO 11 N1=1,NP
      DO 13 N2=1,MP
      WRITE(6,12)AKOL(N2,N1),TROSAK(N2,N1)
   12 FORMAT (10X.F20,6,10X,F20.6)
   13 CONTINUE
      WRITE (6,14)
   14 FORMAT(/60(1H*1))
   11 CONTINUE
      WRITE(6,20)FCILJ
   20 FORMAT(///,10X,F18.2)
  100 STOP
      END
```

```
C PROGRAM ZA JEDNU ITERACIJU MODI METODE
      DIMENSION AKOL(20,20),TROSAK(20,20),UI(20),VJ(20),
     *CIJ(20,20),POMOC(20,20),PORED(20),KRED(20),LSTUP(20)
      READ(5,801)M,N
  801 FORMAT(2I5)
      READ(5,800)((TROSAK(INO,IN1),INO=1,INO-1,M),IN1=1,N)
  800 FORMAT(F18,6)
      MP=M+1
      NP=N+1
      READ(5,800)((AKOL(IN2,IN3),IN2=1,MP),IN3=1,NP)
      READ(5,800)FCILJ
      WRITE(6,250)
  250 FORMAT(1H1,5X,'MATRICA KOLICINA',25X,'MATRICA TROŠKOVA')
      DO 251 I52=1,MP
      DO 252 I53=1,NP
      WRITE(6,253)AKOL(I52,I53),TROSAK(I52,I53)
  253 FORMAT(F18.0, 24X,F18.2)
  252 CONTINUE
      WRITE(6,245)
  245 FORMAT(/132(1H*))
  251 CONTINUE
C IZRACUNAVANJE UI I VJ
     DO 400 M1=1,M
400   UI(M1)=0.
      DO 401 M2=1,N
  401 VJ(M2)=0.
      M3=0
      M4=1
      DO 402 M5=1,N
      IF (AKOL(1,M5))426,402,403
  426 WRITE (6,427)
  427 FORMAT('GREŠKA U MODI METODI')
      GO TO 500
  403 VJ(M5)=TROŠAK(1,M5)
      M3=M3+1
  402 CONTINUE
  419 DO 405 M6=1,N
      IF(VJ(M6))406,405,406
  406 DO 556 M7=2,M
      IF(AKOL(M7,M6))426,556,408
  408 IF(UI(M7))556,409,556
  409 UI(M7)=TROSAK(M7,M6)-VJ(M6)
      M4=M4+1
  556 CONTINUE
      IF(M4-M)405,410,426
```

```
  410 IF(M3-N)405,420,426
  405 CONTINUE
      DO 411 M8=2,M
      IF(UI(M8))412,411,412
  412 DO 557 M9=1,N
      IF(AKOL(M8,M9))426,557,414
  414 IF(VJ(M9))557,415,557
  415 VJ(M9)=TROSAK(M8,M9)-UI(M8)
      M3=M3+1
  557 CONTINUE
      IF(M3-N)411,416,426
  416 IF(M4-M)411,420,426
  411 CONTINUE
      GO TO 419
C IZRAcUNAVANJE RELATIVNIH TROŠKOVA
  420 DO 421 M10=1,M
      DO 421 M11=1,N
  421 CIJ(M10,M11=99999999999.999999
     DO 422 M12=1,M
      DO 422 M13=1,N
     IF(AKOL(M12,M13))426,423,422
  423 CIJ(M12M13)=UI(M12)+VJ(M13)-TROsAK(M12,M13)
  422 CONTINUE
C TRAŽENJE NAJVEcEG POZITIVNOG RELATIVNOG TROŠKA
      CALL NAJCIJ(M,N,CIJ,POZIT,MRED,NSTUP)
      IF(POZIT)426,555,430
C TRAŽENJE PUTA POMICANJA TERETA
  430 NBODL=0
  558 CALL PUT(M,N,MP,NP,AKOL,TROsAK,MRED,NSTUP,POMOC,PORED,KRED,
      *LSTUP,MS,&500)
C KOLIcINA TERETA KOJA SE SELI
      CALL NOVAST(M,N,MP,NP,PORED,KRED,LSTUP,AKOL,AIKS,MS)
C FUNKCIJA CILJA
      NBIT=2
      CALL FUNKC(M,N,MP,NP,AKOL,TROSAK,IVISE,FCILJ,POZIT,AIKS,NBIT,
      *&500)
C ISPISIVANJE
      WRITE(6,256)(UI(I54),I54=1,M)
  256 FORMAT(1H1,5X,'UI :',4(6(3X,F18.2)/))
      WRITE(6,258)(VJ(I55),I55=1,N)
  258 FORMAT(//,5X,'VJ:',4(6(3X,F18.2)/))
      DO 561 IX1=1,M
      WRITE(6,560)IX1,(CIJ(IX1,IX2),IX2=1,N)
  560 FORMAT(//,5X,'CIJ(',I2,'):',4(6(3X,F18.2)/))
  561 CONTINUE
```

```
      IF(POZIT)581,580,581
  580 WRITE(6,562)POZIT
  562 FORMAT(//,5X,'NAJVECI POZITIVNI TROSAK=',F18.2)
  581 WRITE(6,255)POZIT,MRED,NSTUP
  255 FORMAT(//,5X,'NAJVECI POZITIVNI TROŠAK=',F18.2,'(',I2,',',
     *I2,')')
      WRITE(6,259)
  259 FORMAT(//5X,'KOLICINE NA PUTU','RED',7X, 'STUPAC')
      DO 6070 KAC=1,MS
      WRITE(6,6080)PORED(KAC),KRED(KAC),LSTUP(KAC)
 6080 FORMAT(5X,F18.6,2(5X,15))
 6070 CONTINUE
      WRITE(6,257)AIKS
  257 FORMAT(//5X,'KOLICINA KOJA SELI:',F18.2)
  255 CALL OPTIM(M,N,CIJ,MRED,NSTUP,NBODL,IDENT,POZIT)
      WRITE(6,250)
      DO 570 IJM=1,MP
      DO 575 IJN=1,NP
 575  WRITE(6,253)AKOL(IJM,IJN),TROSAK(IJM,IJN)
  570 WRITE(6,245)
      WRITE(6,286)FCILJ
  286 FORMAT(///,5X'FUNKCIJA CILJA= ',F18.2,'DIN')
      GO TO (1000,500,558),IDENT
  500 STOP
      END
```

T-4 Popis pojmova upotrijebljenih u programima TRANSP i MODI

Naziv pojma	Opis pojma
AIKS	količina tereta koja se seli
AKOL	matrica količina
CIJ	matrica relativnih troškova
DEGEN	potprogram za rješavanje degeneracije
EPSI	količina za uklanjanje degeneracije
FCILJ	vrijednost funkcije cilja
FUNKC	potprogram za izračunavanje funkcije cilja
IDENT	identifikator optimalnosti rješenja
ISPIT	potprogram za ispitivanje ravnoteže količ.
IVISE	identifikator zatvorenosti problema IVISE = 0 zatvoreni problem IVISE ≠ 0 otvoreni problem
KRED	polje za pamćenje indeksa redaka polja preko kojih se seli teret
LSTUP	polje za pamćenje indeksa stupaca polja preko kojih se seli teret
M	broj redaka
MRED	vodeći redak
N	broj stupaca
NAJCIJ	potprogram za traženje najvećeg pozitivnog relativnog troška
NAJMTR	potprogram za postavljanje problema metodom najmanjih troškova
NOVAST	potprogram za postavljanje nove strukture
NSTUP	vodeći stupac
OPTIM	potprogram za ispitivanje optimalnosti rješenja
OTVOR	potprogram za rješavanje otvorenosti problema
POMOC	pomoćno polje količina
PORED	polje za pamćenje količina na putu preko kojeg se seli teret
POZIT	najveći pozitivni relativni trošak
PUT	potprogram za traženje puta pomicanja tereta
SUMAI	pomoćno polje za zbrajanje količina
SUMAJ	pomoćno polje za zbrajanje količina
TROSAK	matrica troškova
UI	polje simpleks multiplikatora retka
VJ	polje simpleks multiplikatora stupca

4. RJEŠAVANJE MODELA I REZULTATI OBRADE

Podaci iz prikazanog ekonomsko-matematičkog modela obradjeni su na elektroničkom računalu B-1700 u Centru za informatiku FOI Varaždin. Nakon primjene spomenutih programa ispostavilo se da je ovaj transportni problem otvorenog tipa. Suma količina koje ishodišta mogu dati veća je od sume količina koju odredišta mogu primiti, tj.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = 38\,976 \qquad \sum_{j=1}^{n} b_j = 35\,000$$

iz čega slijedi da je $a_i > b_j$. Pokazalo se da kapacitet šljunčare Š2 neće biti iskorišten u iznosu od 3 976 m^3 šljunka. Nakon zatvaranja problema i primjene metode najmanjih troškova dobiven je program čija je vrijednost iznosila 3 914 675,00 din. Primjenom MODI metode postiglo se optimalno rješenje programa u drugoj iteraciji. Vrijednost optimalnog programa iznosi 3 898 355,00 din. Postignuto poboljšanje iznosi 16 320,00 din.

Usporede li se troškovi dobiveni na ovaj način sa stvarnim troškovima promatrane OUR vezani uz šljunčani materijal vidljiva je ušteda od 834 254,00 din. Stvarni troškovi izgledaju ovako:

T-5 Stvarno obračunati troškovi manipuliranja šljunčanim materijalom

Radilište	Potreba za šljunkom m^3	Cijena šljunka din/m^3	Ukupni trošak din
R1	4 800	153	734 400,00
R2	10 500	132	1 386 000,00
R3	16 500	130	2 145 000,00
R4	3 200	146	467 200,00
UKUPNO:			4 732 600,00

Iz priložene liste vidi se da će se troškovi vezani uz šljunčani materijal za promatrana radilišta dobiti ako se:

- za radilište R1 dopremi 4 800 m^3 šljunka iz šljunčare Š2,
- za radilište R2 dopremi 4 100 m^3 šljunka iz šljunčare Š1 i 6 400 m^3 iz šljunčare Š3,

- za radilište R3 dopremi 13 180 m^3 šljunka iz šljunčare Š1 i 3 320 m^3 šljunka iz šljunčare Š2,
- za radilište R4 3 200 m^3 šljunka iz šljunčare Š3.

Promatrana OUR tokom poslovne godine ima više ovakvih radova pa nije teško zaključiti o kojim se uštedama u pogledu prijevoza šljunčanog materijala može raditi. Te bi uštede uvelike utjecale na sniženje troškova poslovanja. Grubo bi se moglo reći da bi pravilnom kadrovskom politikom i s dobro opremljenim centrom za obradu podataka kao i neophodnim prestrukturiranjem praćenja poslovnih dogadjaja (statistika, računovodstvo i sl.) ova OUR mogla stati uz bok onih radnih organizacija koje primjenjuju suvremene znanstvene metode i time pravilno iscrpljuju svoje unutrašnje rezerve.
Ovakva razmišljanja potkrijepljuje i analiza dualnih varijabli transportnog problema (analiza simpleks multiplikatora u_i i v_j) optimalnog programa. Ova je analiza utoliko važnija ima li se na umu da simpleks multiplikatori direktno ukazuju na nove troškove koji bi nastali zbog odstupanja od optimalnog plana transporta. Naime, svaki pozitivan multiplikator retka u_i pokazuje za koliko bi se povećali troškovi prijevoza po jedinici tereta ako bi se odstupilo od količina prijevoza iz i-tog odredišta u odnosu na plan. Isti je slučaj i sa simpleks multiplikatorima stupaca v_j, samo što se oni odnose na količinu prijevoza tereta u odredišta.
U promatranom primjeru troškovi programa bi se povećali uslijed povećanja količina prijevoza iz šljunčare Š2 i to za 17,99 din po m^3 prevezenog šljunčanog materijala. Simpleks multiplikator vezan uz šljunčaru Š1 (u_1) je 0, a simpleks multiplikator vezan uz šljunčaru Š3 (u_3) je -7,94, pa povećanje količina prijevoza robe iz ovih šljunčara ne bi povećalo ukupne troškove prijevoza.

Za razliku od simpleks multiplikatora redaka, simpleks multiplikatori stupaca su svi pozitivni, što znači da bi svako povećanje količine prijevoza šljunčanog materijala na neko od radilišta donijelo nove troškove, i to:

- povećanje količine prijevoza šljunčanog materijala na radilište R1 donijelo bi nove troškove od 82,67 din/m3 (v_1),
- povećanje količine prijevoza šljunčanog materijala na radilište R2 donijelo bi nove troškove od 96,77 din/m3 (v_2),

- povećanje količine prijevoza šljunčanog materijala na radilište R3 donijelo bi nove troškove od 114,27 din/m3 (v_3) i
- povećanje količine prijevoza šljunčanog materijala na radilište R4 donijelo bi nove troškove od 165,67 din/m3 (v_4).

Matrica količina	Matrica troškova
0.	82.87
4100.	96.77
13180.	114.27
0.	167.77
17280.	0.00

****

4800.	100.66
0.	114.86
3320,	132.26
8120.	186.36
	0.00

****

0.	76.33
6400.	88.83
0.	107.73
3200.	157.73
9600.	0.00

****

4800.	0.00
10500.	0.00
165000.	0.00
3200.	0.00
35000.	0. 0

****

FUNKCIJA CILJA = 3898355.00 DIN

OPTIMALNA ODLUKA

5. ZAKLJUČAK

Da bi se transportni problem linearnog programiranja mogao primijeniti u praksi, nužan je uvjet postojanje odredjenih podataka.To su podaci o kapacitetima ishodišta i odredišta, te podaci o troškovima prijevoza (i troškovima proizvodnje) po jedinici promatrane robe.
Takvi podaci u promatranoj OUR postoje, ali se na njih ne primjenjuju suvremene znanstvene metode optimizacije, mada je vidljivo da dovode do znatno nižih troškova.

Primjena ovih metoda olakšala bi uvelike operativno planiranje u

OUR, a preko unaprijed odštampanih otpremnica materijala ujedno bi se olakšala i evidencija kretanja šljunčanog materijala.

Nadalje, tu se javlja i problem prihvaćanja novih ideja i načina rada koji se suprotstavlja često vrlo velikoj inerciji kadrovskog osoblja.
Svakako da se tu javlja i problem investicija jer primjena suvremenih metoda traži i suvremenu tehniku za obradu podataka putem njih. No uštede koje primjena ovih metoda donosi sigurno opravdavaju sredstva potrebna za njihovo izvodjenje.

Sve ovo govori u prilog složenosti problema primjene suvremenih metoda optimizacije. No planskim ulaganjima i racionalnim gospodarenjem taj se problem može riješiti, posebno imajući u vidu mnogobrojne ekonomske efekte koje primjena tih metoda donosi.

L I T E R A T U R A

1. *Dobrenić S.: Operativno istraživanje, FOI Varaždin, 1978.*
2. *Kreko B.: Linearno programiranje, Savrmena administracija, Beograd, 1966.*
3. *Lončar I.: Matematičke metode, FOI Varaždin, 1978.*
4. *Martić Lj: Matematičke metode za ekonomske analize II, Narodne novine, Zagreb, 1972.*
5. *Mc Closkey F.J. - Trefethen N.F.: Operativna istraživanja, Naučno donošenje odluka, Panorama, Zagreb, 1965.*
6. *Novaković S.: Uticaj transportnih troškova na privredu, Institut "Kirilo Savić", Beograd, 1971.*
7. *Petrić J.: Operaciona istraživanja, knjiga prva, Savremena administracija, Beograd, 1976.*
8. *Stefanini B.: FORTRAN, Udžbenik programiranja, Tehnička knjiga, Zagreb, 1972.*

Primljeno; 1979-10-1

Душак В. Решение транспортной проблемы линейного программирования при помощи ЭВМ .

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе рассматривается перевозка гравистого материала с целью получения самой низкой стоимости перевозки.

В связи с тем написаны программы в ФОРТРАМ,а проблема обработана ЭВМ Б-1700.

Полученные результаты показывают большие сбережения в отношении к действительным затратам,обосновывающие употребления современных научных методов и средств обработки данных.