Mr Milorad Bojanić

D V O K T R I T E R I J A L N O P R O G R A M I R A N J E U T R A N S P O R T U

UVOD

U matematičkom programiranju problem transporta manifestira se, najčešće, kao problem distribucije tereta od nekih ishodišta do nekih odredišta uz najniže ukupne troškove prijevoza. Kao takav ovaj problem obradjuje se u linearnom programiranju kada se može definirati linearna funkcija cilja.

Neki transportni problemi u praksi ne mogu se rješavati isključivo uzimanjem u obzir samo transportnih troškova kao kriterija optimalnosti. Katkad se u transportu nalazi veoma pokvarljiva roba koju treba transportirati od nekih ishodišta do unaprijed poznatih odredišta u što kraćem roku. Pri tome se često puta ne daje prioritetna važnost transportnim troškovima, već vremenu transporta. Sličan se problem u transportu tereta može pojaviti i u nekim vojnim situacijama kada je najbitnije da odredjeni vojni materijal stigne na predvidjena odredišta u najkraćem mogućem roku.

U ovakvim i sličnim slučajevima funkcija cilja nije linearna funkcija te se problem transporta svodi na nelinearan problem. Kao kriterij optimalnosti uzima se, zbog iznesenih momenata, vrijeme transporta koje se mora minimalizirati.

Ukoliko se prilikom transporta neke robe žele poštivati dva kriterija optimalnosti, vrijeme i troškovi, problem transporta svodi se na dvokriterijalni transportni problem. Jedan kriterij bit će vrijeme koje se mora minimalizirati, a drugi kriterij bit će troškovi transporta koji moraju biti najniži prilikom izbora konačnog optimalnog programa transporta.

BARSOVLJEVA METODA

Problem minimalizacije vremena transporta prvi je obradio A.S. Barsov u knjizi "Što je linearno programiranje" koja je izašla u Moskvi 1959.godine. U njoj autor daje formulaciju i rješenje transportnog problema gdje vrijeme transporta uzima kao krite-

rij optimalnosti.[1] *Problem se može formulirati na slijedeći način:*

$$\min_{X} \max_{(i,j) \in M} t_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$X_{ij} \geq 0$$

U gornjim izrazima sa t_{ij} *notirano je vrijeme prijevoza od i-tog ishodišta u j-to odredište, sa* $X = [X_{ij}]$ *količina tereta prevezena od i-tog ishodišta na j-to odredište, dok je* $M = \{(i,j) \mid X_{ij} > 0\}$ *skup ruta po kojima će se kretati teret. Izložena formulacija problema pokazuje da se radi o minimaliziranju maksimalnog vremena potrebnog za operaciju transporta. Maksimum treba tražiti preko svih ruta (i,j) na kojima je programski zamišljena distribucija tereta, a minimum preko mogućih programa transporta. 2) Iznesena notacija pokazuje da funkcija cilja nije linearna funkcija te se zato i govori o nelinearnom problemu transporta kada se minimalizira vrijeme transporta.*

Da se dobije optimalno rješenje transporta, Barsov predlaže slijedeću proceduru po koracima: 3)

1. *treba se odrediti početno bazično rješenje* X_1 *(početni program transporta može se postaviti metodom sjeverozapadnog kuta ili nekom drugom metodom za postavljanje početnog programa),*

---

1) Prof.dr Lj.Martić: Nelinearno programiranje,odabrana poglavlja,Informator, Zagreb,1973, str.107.

2) Prof.dr Lj.Martić: citirano djelo, str.107.

3) Prof.dr Lj.Martić: citirano djelo, str.108.

2. utvrdi se maksimalno vrijeme t_{X_1} za program X_1,

3. precrtaju se polja (i,j) u tabeli transporta koji imaju $t_{ij} > t_{X_1}$ te se tako isključe iz daljnjeg razmatranja,

4. istražuju se, zatim, preostala polja kako bi se mogao konstruirati "zatvoreni put", u kojem će biti polje t_{X_1}, da bi se odgovarajuća bazična varijabla svela na nulu ili joj se smanjila vrijednost,

5. izmijeni se program po konstruiranom "zatvorenom putu". Ukoliko je program X_2 takav da je $t_{X_2} = t_{X_1}$, treba ponoviti postupak iz četvrtog koraka. Ukoliko ponavljanje tog postupka ne osigura bolje rješenje, postignuto rješenje smatra se optimalno,

6. medjutim, kada novo rješenje X_2 daje $t_{X_2} < t_{X_1}$, postupak treba nastaviti ponavljanjem koraka 3. i 4. dok se u nekom konačnom broju koraka ne dodje do optimalnog rješenja.

NUMERIČKI PRIMJER

Jedna organizacija udruženog rada ima četiri klaonice locirane u četiri mjesta. Klaonice su šifrirane kao K_{o1}, K_{o2}, K_{o3} i K_{o4}. Organizacija mora odmah isporučiti jednom kupcu 245 tona svježeg govedjeg mesa koje mora kamionima-hladnjačama otpremiti u pet potrošačkih centara, tj. u pet gradova šifriranih kao G_{o1}, G_{o2}, G_{o2}, G_{o4} i G_{o5}. S obzirom na svojstva svježeg govedjeg mesa potrebno je izvesti transport hladnjačama tako da vrijeme transporta bude što manje, odnosno, da se što manje količine govedjeg mesa transportiraju u dužem vremenu. Matrica vremena transporta $[t_{ij}]$ u satima te količine ponude a_i i potražnje b_j u tonama daje slijedeća tabela:

Klaonica	Grad					Ponuda u tonama (a_i)
	G_{o1}	G_{o2}	G_{o3}	G_{o4}	G_{o5}	
K_{o1}	39	38	18	70	14	82
K_{o2}	43	58	16	10	50	94
K_{o3}	48	40	41	69	42	28
K_{o4}	27	56	20	30	45	41
Potražnja u tonama (b_j)	30	40	50	80	45	245

Matrica vremena transporta $\left[t_{ij} \right]$ pokazuje da postoji značajna razlika u vremenu transporta od pojedinih klaonica do pojedinih opskrbnih centara (gradova). Nadalje, očito je da postoje i razlike u kapacitetima pojedinih klaonica (a_i) kao i razlike u zahtjevima za svježim govedjim mesom pojedinih potrošačkih centara (b_j). Treba uočiti da u ovom primjeru postoji ravnoteža izmedju ponude i potražnje,tj. ukupno je moguće isporučiti 245 tona svježeg govedjeg mesa koliko se i traži od strane kupca. Zbog toga se u ovom primjeru radi o tzv. zatvorenom transportnom problemu. 4)

RJEŠAVANJE PROBLEMA

Da se primijeni Barsovljeva metoda minimalizacije vremena transporta,treba konstruirati neko početno rješenje jednom od metoda za postavljanje početnog rješenja.Neka u ovom primjeru to bude metoda sjeverozapadnog kuta.Početni program transporta po toj metodi daje slijedeći prijedlog transporta svježeg govedjeg mesa od klaonica do potrošačkih centara.

Tabela 1. Početni program transporta

Klaonica	Grad					a_i
	G_{o1}	G_{o2}	G_{o3}	G_{o4}	G_{o5}	
K_{o1}	39 30	38 40	18 12	70	14	82
K_{o2}	43	58	16 38	10 56	50	94
K_{o3}	48	40	41	69 24	42 4	28
K_{o4}	27	56	20	30	45 41	41
b_j	30	40	50	80	45	245

4) Prof.dr S.Dobrenić: Linearno programiranje,skripta,Fakultet organizacije i informatike,Varaždin, 1975, str.134.

Maksimalno vrijeme transporta po početnom programu iznosi 69 sati, tj. $t_{X_1} = t_{34} = 69$ sati. U tabeli 1.precrtano je polje (1,4) u kojem se nalazi veće vrijeme transporta. Početni program može se poboljšati i u tabeli 1 . je naznačen zatvoreni put koji obuhvaća polje (3.4) s maksimalnim vremenom. Ukoliko se izmijeni program po zatvorenom putu, dobije se novi program transporta X_2. Za taj program transporta je maksimalno vrijeme transporta $t_{X2} = t_{45} = 45$ sati. Prvi poboljšani program transporta skraćuje vrijeme operacija transporta za 24 sata i prikazan je u tabeli 2.

Tabela 2. Prvi poboljšani program

Klaonica	Grad					a_i
	G_{o1}	G_{o2}	G_{o3}	G_{o4}	G_{o5}	
K_{o1}	39 30	38 40	18 12	~~70~~	14	82
K_{o2}	43	~~58~~	16 38	10 56	~~50~~	94
K_{o3}	~~48~~	40	41	~~69~~	42 28	28
K_{o4}	27	~~56~~	20	30 24	45 17	41
b_j	30	40	50	80	45	245

U tabeli 2. precrtana su polja (1,4), (2,2), (2,5), (3,1), (3,4) i (4,2) jer imaju veće vrijeme transporta od t_{X_2}. Kada su ova polja eliminirana iz daljnjeg razmatranja, konstruiran je zatvoreni put po kojem će se izvesti promjena programa X_2 i dobiti program X_3.

Ponavljanjem opisanog postupka konstruirane su nadalje tabele 3, 4 i 5. U tabeli 5.nalazi se četvrti poboljšani program koji predstavlja ujedno i optimalan program transporta jer se bazična varijabla $x_{32} = 28$ ne može svesti na nulu.

Tabela 3. Drugi poboljšani program

Klaonica	Grad					a_i
	G_{o1}	G_{o2}	G_{o3}	G_{o4}	G_{o5}	
K_{o1}	39 30	38 40	18	70	14 12	82
K_{o2}	43	58	16 50	10 44	50	94
K_{o3}	48	40	41	69	42 28	28
K_{o4}	27	56	20	30 36	45 5	41
b_j	30	40	50	80	45	245

Tabela 4. Treći poboljšani program

K_{o1}	39 25	38 40	18	70	14 17	82
K_{o2}	43	58	16 50	10 44	50	94
K_{o3}	48	40	41	69	42 28	28
K_{o4}	27 5	56	20	30 36	45	41
b_j	30	40	50	80	45	245

Tabela 5. Četvrti poboljšani program

Klaonica	G_{o1}	G_{o2}	G_{o3}	G_{o4}	G_{o5}	
K_{o1}	39 (25)	38 (12)	18	70	14 (45)	82
K_{o2}	43	58	16 (50)	10 (44)	50	94
K_{o3}	48	40 (28)	41	69	42	28
K_{o4}	27 (5)	56	20	30 (36)	45	41
b_j	30	40	50	80	45	245

Optimalni program transporta predložen u tabeli 5. nije jedini optimalni program transporta. Optimalni su i slijedeći programi transporta:

$x_{11} = 25$, $x_{12} = 12$, $x_{15} = 45$, $x_{23} = 14$, $x_{24} = 80$, $x_{32} = 28$, $x_{41} = 5$ i $x_{43} = 36$, te: $x_{12} = 12$, $x_{13} = 25$, $x_{15} = 45$, $x_{23} = 25$, $x_{24} = 69$, $x_{32} = 28$, $x_{41} = 30$ i $x_{44} = 11$

Sve ostale (nebazične) varijable u četvrtom poboljšanom programu jednake su nuli. Početni program i svi ostali poboljšani programi su nedegenerirani jer imaju $m + n - 1$ pozitivnu varijablu x_{ij}. 5)

---

5) Prof.dr Lj.Martić: Matematičke metode za ekonomske analize, II svezak, Narodne novine, Zagreb, 1966, str. 194.

ANALIZA OPTIMALNOG PROGRAMA TRANSPORTA

Tabela 5. daje optimalno rješenje transporta te je vidljivo da će se sav teret prevesti u roku od 40 sati. Prijedlog transporta sastoji se, prema tabeli 5, u tome da se iz klaonice K_{o1} opskrbi grad G_{o1} s 25 tona, grad G_{o2} s 12 tona i grad G_{o5} s 45 tona svježeg govedjeg mesa. Klaonica K_{o2} snabdjet će grad G_{o3} s 50 tona i grad G_{o4} s 44 tone govedjeg mesa. Klaonica K_{o3} snabdijeva grad G_{o2} s 28 tona govedjeg mesa, dok klaonica K_{o4} snabdijeva grad G_{o1} s 5 tona i grad G_{o4} s 36 tona govedjeg mesa.Ovakav prijedlog transporta govedjeg mesa daje minimalno vrijeme u kojem se može obaviti predvidjeni transport. Iz tabele 5.uočljivo je, nadalje, da se veće količine mesa prevoze u što kraćem vremenu, što je naročito značajno s obzirom na svojstva mesa koje se nalazi u transportu.

Kao u ovom primjeru postoje još dva optimalna programa transporta, treba ispitati, prije donošenja konačne odluke o transportu, njihove prednosti. Te komparativne prednosti ovih optimalnih programa mogu biti na strani angažiranih transportnih kapaciteta, boljih prometnih mogućnosti transporta, cijene transporta, još kraćeg vremena snabdijevanja nekih potrošačkih centara i tsl. Prema tome, očito je da se kao dodatni kriterij kod odlučivanja mogu izabrati i neki drugi momenti. Koji će dopunski kriterij biti izabran, to ovisi o nizu okolnosti u datom trenutku. Neka u ovom primjeru kao dopunski kriterij budu uzeti troškovi transporta po jedinici tereta.

DOPUNSKI KRITERIJ OPTIMALNOSTI

Navedeni problem transporta ima tri optimalna rješenja i sigurno je da medju njima postoje neke razlike, a pogotovu ako se oni razmatraju s obzirom na transportne troškove. Transportni se troškovi po jedinici tereta razlikuju od grada do grada s obzirom na način sastavljanja kalkulacije i obuhvaćanja svih troškova. Zbog razlike u troškovima transporta može se postaviti dopunski kriterij optimalnosti. Postavlja se pitanje koji od triju predloženih optimalnih programa transporta ima prioritet uzmu li se i troškovi transporta kao jedan od kriterija optimalnosti. Prioritet imat će onaj program koji osigurava najniže ukupne troškove transporta.

Da se nadje optimalni program s obzirom na troškove ukoliko postoji više gotovo optimalnih programa s obzirom na vrijeme,Hammer *preporučuje da se riješi slijedeći zajednički problem transporta:* [6]

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c''_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$x_{ij} \geq 0$$

i gdje je:

$$c''_{ij} = \begin{cases} c_{ij} & \text{ako je } t_{ij} \leq z^+ \\ \infty & \text{ako je } t_{ij} > z^+ \end{cases}$$

odnosno: $$z^+ = \min_{X} \max_{(i,j) \in M} t_{ij}$$

Gornja formulacija pokazuje da se optimalni program dobiven Barsovljevom metodom mora podvrći testiranju s obzirom na troškove. Optimalni program sada predstavlja početni program transporta koji se može testirati MODI metodom. Ukoliko u nezauzetim poljima tabele ne postoji ni jedan pozitivan relativan trošak, može se smatrati da je predloženi optimalni program ujedno i optimalan s obzirom na troškove. Ukoliko se u nekom nezauzetom polju nadje relativan trošak pozitivnog predznaka, to upućuje da postoji bolji optimalni program s obzirom na troškove transporta. Ako se, pak, u nekom nezauzetom polju nadje kao relativan trošak O, onda je to upozorenje da postoji još jedan optimalan program s istim ukupnim troškovima transporta. [7]

---

6) Prof.dr Lj.Martić: Nelinearno programiranje, str. 128.

7) Prof.dr S.Dobrenić: Linearno programiranje, skripta, str.125.

Neka su troškovi po jedinici tereta (po toni) u navedenom numeričkom primjeru slijedeći:

Tabela 6. Matrica troškova

Klaonica	Grad					a_i
	G_{o1}	G_{o2}	G_{o3}	G_{o4}	G_{o5}	
K_{o1}	300	299	180	380	160	82
K_{o2}	310	340	170	150	330	94
K_{o3}	319	302	303	370	309	28
K_{o4}	210	335	200	260	320	41
b_j	30	40	50	80	45	

Respektiraju li se troškovi iz tabele 6, optimalni program transporta iz tabele 5. ima ukupne troškove transporta od 52 254 dinara.

Testiranjem programa transporta iz tabele 5. MODI metodom dolazi se u drugoj iteraciji do najnižih ukupnih troškova transporta koji iznose 46 624 dinara. Za ove najniže ukupne troškove predlaže se slijedeća shema transporta svježeg govedjeg mesa od klaonica do potrošačkih centara:

Tabela 7. Druga iteracija

Klaonica	Grad G_{o1}	G_{o2}	G_{o3}	G_{o4}	G_{o5}	a_i	u_i
K_{o1}	300 - 110	299 12	180 25	∞ ∞	160 45	82	0
K_{o2}	∞ ∞	∞ ∞	170 14	150 80	∞ ∞	94	-10
K_{o3}	∞ ∞	302 28	∞ ∞	∞ ∞	∞ ∞	28	3
K_{o4}	210 30	∞ ∞	200 11	260 -80	∞ ∞	41	20
b_j	30	40	50	80	45	245	
v_j	190	299	180	160	160		

Predložena shema transporta svježeg govedjeg mesa iz tabele 7. ima najniže transportne troškove uz miminalno moguće vrijeme transporta. Analiza transportnog programa pokazuje da će se transport obaviti u roku od 40 sati s tim da će najveća količina mesa (75% količine) biti dostavljena kupcu u vremenu od 10 do 27 sati, a manja količina (25%) u vremenu od 27 do 40 sati. Ukoliko radna organizacija ovim prijedlogom transporta osigura i zadovoljavajuće korištenje transportnih kapaciteta, primijenjene metode optimalizacije daju, bez sumnje, velike efekte. Višekriterijalno programiranje, prema tome, može imati veoma značajno mjesto u politici transporta jer će se njegovom primjenom postići značajne uštede na transportnim troškovima i vremenu transporta, što u krajnjem slučaju dovodi i do većih ekonomskih efekata i rentabilnijeg poslovanja.

ZAKLJUČAK

Dvokriterijalno programiranje u problemima transporta ima višestruku namjenu i praktičnu sadržajnost. Upotrebljavat će se u onim transportnim situacijama kada je minimalizacija vremena transporta prioritetniji zahtjev od minimalizacije transportnih troškova.

Radnim organizacijama u oblasti prometa dvokriterijalno programiranje daje mogućnost da u vodjenju poslovne politike odabiru one odluke koje će im osigurati povoljnije efekte u konkurentskoj igri na tržištu. Primjenom ovog oblika programiranja one mogu na tržištu transportnih usluga postati konkurentnije jer iza svake pojedine ponude transportne usluge točno znaju vrijeme i cijenu usluge. U izuzetno jakoj konkurenciji optimalan program transporta po dvokriterijalnom principu je onaj program koji će u potpunosti zadovoljiti naručioca usluge i nosioca usluge.

Na kraju, dvokriterijalno programiranje je, u organizacijama udruženog rada koje obavljaju transport za svoje potrebe, instrument s kojim se tokom poslovanja može veoma značajno utjecati na vrijeme prijevoza robe, a s tim i na troškove poslovanja.

LITERATURA

1. S.Dobrenić: *Linearno programiranje, skripta, Fakultet organizacije i informatike, Varaždin, 1975.*

2. Lj.Martić: *Matematičke metode za ekonomske analize, II svezak, Narodne novine, Zagreb, 1966.*

3. Lj.Martić: *Nelinearno programiranje, odabrana poglavlja, Informator, Zagreb, 1973.*

4. A.Vadnal: *Linearno programiranje, teorija i upotreba u privredi, Informator, Zagreb, 1972.*