Mr Ivan Lončar

G E O M E T R I J S K O   P R O G R A M I R A N J E

1. UVOD

Problemi organizacije od izvanredne su važnosti u raznim područjima znanosti i tehnike. Nije stoga čudno što su metode optimizacije ušle u matematiku kao posebna disciplina. Kako je opći problem optimizacije nerješiv, traže se razne specijalne metode optimizacije koje se mogu primijeniti na funkcije koje se najčešće pojavljuju u primjeni. U ekonomskim, informatičkim i tehničkim disciplinama pojavljuju se funkcije koje liče na polinome, ali imaju eksponente potencija koji nisu prirodni brojevi, već bilo kakvi realni brojevi. Koeficijenti takvih "polinoma" najčešće su pozitivni brojevi. Takve funkcije nazivamo pozinomi.

Cilj ovog rada je dvojak. Jednim dijelom želimo iznijeti osnovni matematički aparat minimizacije pozinoma, tj. geometrijskog programiranja. To je postignuto u točkama 2, 3. i 4.

Proširenje metoda geometrijskog programiranja na neke funkcije koje nisu pozinomi dato je u točki 5.

U posljednjoj šestoj točki predloženi su neki jednostavni potprogrami u FORTRAN-u koji se mogu koristiti pri praktičnoj primjeni geometrijskog programiranja. Najnužniji komentari primjene potprograma dani su u samim potprogramima.

Nadam se da će ovaj rad barem djelomično ispuniti prazninu koja postoji u našoj literaturi u pogledu metoda optimizacije, a posebice u pogledu geometrijskog programiranja.

2. OSNOVNI POJMOVI GEOMETRIJSKOG PROGRAMIRANJA

Osnovni pojam geometrijskog programiranja je pojam pozinoma koji je veoma čest u tehničkoj i ekonomskoj primjeni.

Definicija 2.1

Pozinom je funkcija $P(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ *zadana izrazom*

$$P(t_1, t_2, \ldots, t_m) = \sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=1}^{n} c_i t_1^{a_{i1}} \ldots t_m^{a_{im}},$$

gdje su parametri c_i pozitivne konstante, a eksponenti a_{ij} bilo kakvi realni brojevi. Varijable t_i, $i=1,\ldots,m$ jesu nenegativne varijable:

$$t_1,\ldots,t_m \geqslant 0.$$

Pozinomi se javljaju u primjeni vrlo često. Proizvodimo li na primjer više proizvoda $P_1,\ldots,P_n$ uz prisustvo proizvodnih faktora $F_1,\ldots,F_m$, tada uz uvjet da je proizvodna funkcija Coob-Douglasova za svaki pojedini proizvod, slijedi da će ukupni troškovi proizvodnje biti izraženi u obliku

$$T(P_1,\ldots,P_n) = \sum_{i=1}^{n} A_i F_1^{a_{i1}} \ldots F_m^{a_{im}}.$$

Geometrijsko programiranje temelji se na geometrijskim nejednakostima od kojih je najvažnija i najjednostavnija nejednakost koja povezuje aritmetičku i geometrijsku sredinu.

Definicija 2.2.

Aritmetička sredina $A(x_1,\ldots,x_n)$ skupa brojeva $x_1,\ldots,x_n$ dana je izrazom

$$A(x_1,\ldots,x_n) = \frac{x_1 + \ldots + x_n.}{n}$$

Geometrijska sredina $G(x_1,\ldots,x_n)$ nenegativnih brojeva $x_1,\ldots,x_n$ zadana je izrazom

$$G(x_1,\ldots,x_n) = (x_1x_2\ldots x_n)^{1/n}.$$

U primjeni geometrijskog programiranja važnu ulogu igra Lema 2.3.

Neka su $x_1,\ldots,x_n$ nenegativni brojevi, a $d_1,\ldots,d_n$ nenegativni ponderi sa svojstvom $d_1+\ldots+d_n=1$. Za ponderiranu aritmetičku i geometrijsku sredinu vrijedi nejednakost

$$d_1x_1 + \ldots + d_nx_n \geqslant x_1^{d_1} \ldots x_n^{d_n} \quad \ldots\ldots (1)$$

Dokaz ove nejednakosti može se dati korištenjem činjenice da je lnx konveksna funkcija u skladu s ovom definicijom koveksnosti:

Definicija 2.4.

Funkcija $y=f(x)$ je konveksna na skupu S ako za sve elemente $x_1,\dots,x_n$ iz S i bilo koje pondere $d_1,\dots,d_n$ vrijedi nejednakost

$$d_1 f(x_1)+\dots+d_n f(x_n) \leqslant f(d_1x_1 + \dots + d_nx_n)$$

Kod funkcija jedne varijable konveksnost označava negativnost druge derivacije na promatranom skupu. Kod logaritamske funkcije to znači da je $d_1 \ln x_1 + \dots + d_n \ln x_n \leqslant \ln(d_1x_1+\dots+d_nx_n)$. Antilogaritmiranjem slijedi gornja nejednakost. Drugi dokaz može se dobiti ako se podje od činjenice da je lako dokazati nejednakost $(x_1+x_2)/2 \geqslant \sqrt{x_1x_2}$ polazeći od nejednakosti $(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geqslant 0$. Na jednostavan način moguće je ovu nejednakost proširiti na 4,8 i 2^n pribrojnika. Primjenom binarnog sustava, tj. prikazivanjem realnih brojeva u binarnom sustavu, proširuje se nejednakost na bilo koje pondere.

Važno je ovdje imati na umu da znak jednakosti u gornjoj nejednakosti vrijedi samo onda kada su svi x_i na lijevoj strani jednaki.

Slijedeći oblik te nejednakosti je pogodniji za primjenu:

$$x_1 + \dots + x_n \geqslant \left(\frac{x_1}{d_1}\right)^{d_1} \dots \left(\frac{x_n}{d_n}\right)^{d_n} . \qquad \dots\dots(1')$$

Posljednji oblik dobije se iz (1) tako da se članovi lijeve strane označe ponovo s x_i, a na desnoj strani dolaze tada kvocijenti.

U teoriji dualiteta geometrijskog programiranja važnu ulogu igra generalizacija gornje klasične nejednakosti.

Lema 2.5.

Ako su $x = (x_1,\dots,x_n)$ i $y=(y_1,\dots,y_n)$ n-dimenzionalni vektori (a y k tome vektor s nenegativnim koordinatama), tada za skalarni produkt ta dva vektora vrijedi nejednakost

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\ln\left(\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} y_i \ln y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\ln\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right).$$

Znak jednakosti vrijedi samo onda kada postoji nenegativan broj B sa svojstvom da je za svako i $y_i = Be^{x_i}$.

Dokaz se temelji na konkavnosti eksponencijalne funkcije $y=e^x$. *Za detalje dokaza činitelj može konzultirati djelo/1/ str.123-126.*

Pokažimo na jednom elementarnom primjeru primjenu klasične geometrijske nejednakosti. Neka je zadan pozinom

$$P(t_1,t_2,t_3)=\frac{1}{3}t_1^{0,3}t_2^{0,1}t_3^{-0,8}+\frac{1}{3}t_1^{0,2}t_2^{-0,3}t_3^{0,4}+\frac{1}{3}t_1^{-0,5}t_2^{0,2}t_3^{0,4}.$$

Ponderi su sada $d_1=d_2=d_3=\frac{1}{3}$ *i primjena nejednakosti (1) daje*

$$P(t_1,t_2,t_3)\geqslant 1$$

jer je zbroj eksponenata za svaku varijablu $t_i, i=1,2,3$ *jednak nuli.*

Dakle je vrijednost promatranog pozinoma uvijek veća ili jednaka jedinici. Odatle slijedi izvanredno važna informacija o infimu pozinoma ili o njegovom minimumu. Kasnije ćemo dokazati da se zaista radi o minimalnoj vrijednosti. K tome je već sada jasno da se radi o globalnom minimumu,tj. optimumu. Interesantno je da smo pronašli optimalnu vrijednost pozinoma a da uopće nismo trebali odredjivati minimizirajući vekto $t'=(t_1',t_2',t_3')$.

Ovih nekoliko konstatacija pokazuju izvanrednu prednost geometrijskog programiranjapred klasičnim načinom odredjivanja ekstrema pomoću derivacija. Čitatelj se može uvjeriti koliko su složene jednadžbe koje bi nastale primjenom derivacije na ovaj primjer.

Uvažimo li činjenicu da će pozinom imati vrijednost $V=1$ *onda i samo onda kada u klasičnoj nejednakosti vrijedi jednakost, a to će biti onda kada su svi članovi jednaki, odatle dobivamo sistem jednakosti za minimizirajuću točku*

$$t_1^{0,3}t_2^{0,1}t_3^{-0,8}=1,$$

$$t_1^{0,2}t_2^{-0,3}t_3^{0,4}=1,$$

$$t_1^{-0,5}t_2^{0,2}t_3^{0,4}=1.$$

Ovaj sustav jednadžbi prelazi u linearni sustav po novim varijablama $\ln t_1, \ln t_2$ i $\ln t_3$.

Ovo je karakteristična situacija u geometrijskom programiranju. Za odredjivanje minimizirajuće točke pozinoma dobiva se sustav linearnih jednadžbi po varijablama $\ln t_1, \ldots, \ln t_m$. Odatle slijedi i prednost geometrijskog programiranja jer sustav linearnih jednadžbi možemo riješiti na elektroničkom računalu. U programskom dijelu ovog rada predlažu se potprogrami i programi za rješavanje problema geometrijskog programiranja u programskom jeziku FORTRAN.

3. OSNOVNI PROBLEMI GEOMETRIJSKOG PROGRAMIRANJA

Problemi geometrijskog programiranja odnose se - kao što je jasno iz prethodnog primjera - na minimizaciju pozinoma uz izvjesna ograničenja. Problemi linearnog programiranja javljaju se u parovima. To je sadržaj teorema dualiteta geometrijskog programiranja.

Originalni problem geometrijskog programiranja.

Minimizirati pozinom

$$P(t_1, \ldots, t_m) = \sum_{i=1}^{n} p_i t_1^{b_1} \ldots t_m^{b_m} \qquad (2)$$

uz ograničenja

$$t_1, \ldots, t_m > 0 \qquad (3)$$

$$P_1(t_1, \ldots, t_m) \leqslant 1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (4)$$

$$P_p(t_1, \ldots, t_m) \leqslant 1$$

gdje su $P_1, \ldots, P_p$ pozinomi varijabli $t_1, \ldots, t_m$.

Pozinom (2) često nazivamo funkcijom ili kriterijem cilja, dok (3) i (4) nazivamo ograničenjima. (3) su prirodna ograničenja, dok su (4) strukturna ograničenja. Varijable t_i su varijable originalnog problema.

Dualni problem geometrijskog programiranja.

Maksimizirati funkciju

$$V(d_1,\ldots,d_n) = \left[\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{c_i}{d_i}\right)^{d_i}\right] \prod_{k=1}^{n} \lambda_k^{\lambda_k} \qquad (5)$$

gdje je $\lambda_K = \sum_{i=1}^{n} d_i$ $, k = 1,\ldots,p$ (6)

a c_i *pozitivne konstante, dok su* $d_1,\ldots,d_n$ *varijable s ograničenjima*

$$d_1,\ldots,d_n \geqslant 0 \qquad (7)$$

$$d_1 + \ldots + d_n = 1, \qquad (8)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} d_i = 0, \quad j=1,\ldots,m \qquad (9)$$

Pokažimo na primjerima vezu izmedju ova dva problema.

a) Problem minimizacije pozinoma bez ograničenja

Općenito ako je

$$P(t_1,\ldots,t_m) = \sum_{i=1}^{n} c_i t_1^{a_{i1}} \ldots t_{im}^{a_{im}}$$

pozinom, tada primjenom klasične nejednakosti u obliku (1') dobivamo

$$P(t_1,\ldots,t_m) \geqslant V(d_1,\ldots,d_n,t_1,\ldots,t_m) = V(d,t)$$

gdje je

$$V(d,t) = \left(\frac{c_1}{d_1}\right)^{d_1} \ldots \left(\frac{c_n}{d_n}\right)^{d_n} t_1^{E_1} \ldots t_m^{E_m} \qquad (10)$$

Ovdje su eksponenti E_j *linearne kombinacije pondera* d_i. *Naime*

$$E_1 = a_{11}d_1 + a_{12}d_2 + \ldots + a_{1n}d_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (11)$$

$$E_m = a_{m1}d_1 + a_{m2}d_2 + \dots + a_{mn}d_n$$

Funkciju $V(d,t)$ nazivamo kvazidualna funkcija, dok dio te funkcije koji zavisi samo o c_i i d_i zovemo dualna funkcija i označavamo s $V(d)$. Možemo li pondere d_i odabrati tako da svi eksponenti E_j budu jednaki nuli, dobivamo sistem linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} a_{11}d_1 + a_{12}d_2 + \dots + a_{1n}d_n &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}d_1 + a_{m2}d_2 + \dots + a_{mn}d_n &= 0, \\ d_1 + d_2 + \dots + d_n &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Posljednju jednadžbu sustava (12) zovemo uvjet normalizacije, dok preostali dio tog sustava nazivamo uvjeti ortogonalizacije.

Za pozinom $P(t_1,t_2) = 4t_1 + t_1t_2^{-2} + 4t_1^{-1}t_2$ primjenom nejednakosti (1) dobivamo

$$P(t_1,t_2) \geqslant (16t_1)^{1/4}\,(4t_1t_2^{-2})^{1/4}(8t_1^{-1}t_2)^{2/4}$$

jer možemo pisati

$$P(t_1,t_2) = \frac{1}{4}\,(16t_1) + \frac{1}{4}(4t_1t_2^{-2}) + \frac{1}{2}(8t_1^{-1}t_2)$$

i uzeti pondere $d_1 = d_2 = 1/4$ i $d_3 = 1/2$.

Iz gornje nejednakosti dalje slijedi da je $P(t_1,t_2) \geqslant 8$ jer se eksponenti varijabli na desnoj strani nejednakosti anuliraju. Odavde možemo zaključiti da je inf $P(t_1,t_2) = 8$, za sve $t_1, t_2 \in R^+$. U idućoj točki ćemo pokazati da umjesto inf možemo staviti min. Odredili smo dakle minimalnu vrijednost pozinoma bez poznavanja koordinata minimizirajućeg vektora $t' = (t_1', t_2')$.

Općenitiji primjer minimizacije pozinoma nastaje u slučaju da recimo troškovi proizvodnje zavise o tri faktora proizvodnje K, L i M po relaciji

$$T = 8K^{-1}L^{-1}M^{-1} + 8LM + 4KM + 2KL$$

Traži se minimum troškova.

Primjenom nejednakosti (1') dobivamo kvazidualnu funkciju

$$V(d_1,d_2,d_3,d_4,K,L.M)=(8K^{-1}L^{-1}M^{-1}d_1^{-1})^{d_1}(8LMd_2^{-1})^{d_2}(4KMd_3^{-1})^{d_3}(2KLd_4^{-1})^{d_4}$$

ili

$$V=V(d)K^{-d_1+d_3+d_4}L^{-d_1+d_2+d_4}M^{-d_1+d_2+d_3}$$

gdje je $V(d) = (8d_1^{-1})^{d_1}(8d_2^{-1})^{d_2}(4d_3^{-1})^{d_3}(2d_4^{-1})^{d_4}$ dualna funkcija.

Uvjeti normalizacije sada glase

$$-d_1 + d_3 + d_4 = 0,$$

$$-d_1 + d_2 + d_4 = 0,$$

$$-d_1 + d_2 + d_3 = 0,$$

dok uvjet je normalizacije

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 1.$$

Rješenje sustava normalizacije i ortogonalizacije je $d=(2/5, 1/5, 1/5, 1/5)$ pa je prema tome vrijednost dualne funkcije

$$V(d)=(8:2/5)^{2/5}(8:1/5)^{2/5}(4:1/5)^{1/5}(2:1/5)^{1/5}$$

ili

$$V(d) = 20.$$

Minimalni troškovi dakle iznose 20 novčanih jedinica.

b) Minimizacija pozinoma uz ograničenja

Definicija 3.1.

Problem

$$P_1(t_1,\dots,t_m) \leqslant 1,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (8)$$

$$P_p(t_1,\ldots,t_m) \leqslant 1,$$

$$\mathrm{Min}\; P\;(t_1,\ldots,t_m)$$

naziva se problem minimizacije pozinoma P uz ograničenja $P_1,\ldots, P_p \leq 1$. *Iz činjenice da* a^x *1-1 funkcija i da je* $(a^x)'=a^x \cdot \ln a$ *slijedi da je gornji problem ekvivalentan problemu*

$$P_1^{\lambda_1}(t_1,\ldots,t_m) \leqslant 1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (8')$$

$$P_p^{\lambda_p}(t_1,\ldots,t_m) \leqslant 1,$$

$$\mathrm{Min}\; P\quad (t_1,\ldots,t_m) \leqslant 1.$$

Posljednji problem moguće je obraditi primjenom nenormaliziranih pondera. Neka su $D_1,\ldots,D_n$ *ponderi(nenormalizirani) i* $\lambda = D_1 + \ldots + D_n$. *Tada su* $d_1 = D_1/\lambda, \ldots, d_n = D_n/\lambda$ *normalizirani ponderi, tj. sada je*

$$d_1 + \ldots + d_n = 1.$$

Supstitucijom u nejednakost (1') dobivamo

$$u_1+\ldots+u_n \geqslant (\lambda u_1/D_1)^{D_1/\lambda} \ldots (\lambda u_n/D_n)^{D_n/\lambda}$$

ili

$$(u_1+\ldots+u_n)^{\lambda} \geqslant (u_1/D_1)^{D_1} \ldots (u_n/D_n)^{D_n} \lambda^{\lambda} . \qquad (9)$$

Primijenimo li nejednakost (9) na problem (8'), možemo ga pisati u obliku

$$1 \geqslant P_1^{\lambda_1} \geqslant (u_{11}+\ldots+u_{1n_1})^{\lambda_1} \geqslant (u_{11}/D_{11})^{D_{11}} \ldots (u_{1n_1}/D_{n_1})^{D_{n_1}} \lambda_1^{\lambda}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$1 \geqslant P_p^{\lambda_p} \geqslant (u_{p1}+\ldots+u_{pn_p})^{\lambda_p} \geqslant (u_{p1}/D_{p1})^{D_{p1}} \ldots (u_{np_n})^{D_{pn}} \lambda_p^{\lambda_p}$$

$$P^{\lambda} = (u_1+\ldots+u_n)^{\lambda} \geqslant (u_1/D_1)^{D_1} \ldots\ldots (u_n/D_n)^{D_n} \lambda^{\lambda} .$$

Množenjem svih ovih nejednakosti dobivamo

$$P^{\lambda} \geqslant (u_1/D_1)^{D_1} \dots (u_n/D_n)^{D_n} \lambda^{\lambda} (u_{11}/D_{11})^{D_{11}} \dots \lambda_1^{\lambda 1} (u_{p1}/D_{p1})^{D_{p1}} \lambda_p^{\lambda_p} \qquad (10)$$

Iz (10) se vidi da svaki od pozinoma problema (8) donosi u (10) svoje pondere D i sumu pondera λ. Ukupno dakle ima onoliko pondera koliko ima članova u svim pozinomima i onoliko lambdi koliko je pozinoma. Uvjete ortogonalizacije ćemo dobiti tako da umjesto članova u_i uvrstimo pripadne članove pozinoma izražene varijablama t_j i da u (10) zahtijevamo da eksponenti varijabli t_j budu jednaki nuli. Uvjeta ortogonalizacije ima dakle onoliko koliko i varijabli t_j. Uvjet normalizacije je samo jedan, i to za pozinom P.

Za pozinom $P = 4o t_1^{-1} t_2^{-1/2} t_3^{-1} + 20 t_1 t_3 + 20 t_1 t_2 t_3$

uz ograničenje $P_1(t) = \frac{1}{3} t_1^{-2} t_2^{-2} + \frac{4}{3} t_2^{1/2} t_3^{-1} \leqslant 1$

moramo uvesti pondere D_1, D_2 i D_3 za sam pozinom i te pondere možemo normalizirati jednakošću

$$D_1 + D_2 + D_3 = 1. \qquad (11)$$

Za pozinom ograničenja trebamo dva pondera D_3 i D_4 koje ne možemo normalizirati. Jednadžbe normalizacije glase

$$\begin{aligned} -D_1 + D_2 + D_3 - 2D_4 &= 0, \\ -\tfrac{1}{2} D_1 \quad + D_3 - 2D_4 + \tfrac{1}{2} D_5 &= 0, \\ -D_1 + D_2 + D_3 \qquad - D_5 &= 0. \end{aligned} \qquad (12)$$

Dualna funkcija za ovaj problem glasi

$$V(D) = (4o D_1^{-1})^{D_1} (2o D_2^{-1})^{D_2} (2o D_3^{-1})^{D_3} (\tfrac{1}{3} D_4^{-1})^{D_4} (\tfrac{4}{3} D_5^{-1})^{D_5} (D_4 + D_5)^{D_4 + D_5} .$$

Potrebno je sada riješiti sustav (11) i (12) koji se sastoji od 4 jednadžbe i 5 varijabli. Primjena Gausovog algoritma daje

$$D_1 = 1 - 2p,$$

$$D_2 = p,$$

$$D_3 = p,$$

$$D_4 = -\frac{1}{2} + 2p,$$

$$D_5 = -1 + 4p.$$

Da bi svi ponderi D bili nenegativni, mora biti ispunjena nejednakost $1/4 \leqslant p \leqslant 1/2$. Odatle slijedi da u ovom slučaju ne možemo uvjetni minimum odrediti posve točno, nego uz po volji dobru aproksimaciju.

Nakon ovih primjera, kojima smo samo željeli objasniti vezu izmedju originalnog i dualnog problema, prelazimo na teoreme egzistencije geometrijskog programiranja.

4. OSNOVNI TEOREM GEOMETRIJSKOG PROGRAMIRANJA

U ovoj točki formulirat ćemo bez dokaza osnovni teorem geometrijskog programiranja. To je teorem dualiteta koji u preciznoj formi povezuje originalni i dualni problem geometrijskog programiranja.

Prije svega jedna definicija konzistentnosti problema. Kažemo da je problem (originalan ili dualan) konzistentan ako postoji barem jedan nenegativan vektor koji zadovoljava njegova ograničenja. Problem je strogo konzistentan ako postoji vektor s pozitivnim koordinatama za koji su sva ograničenja stroge nejednakosti.

Teorem 4.1. (Teorem dualiteta geometrijskog programiranja)

Ako je originalan problem geometrijskog programiranja strogo konzistentan i ako postoji vektor koji minimizira originalan problem, tada je:

a) odgovarajući dualan problem konzistentan i postoji vektor d za koji dualna funkcija V(d) dostiže maksimum;

b) maksimalna vrijednost dualne funkcije jednaka je minimalnoj vrijednosti originalne funkcije cilja;

c) ako je t' minimizirajući vektor originalnog problema, tada postoje Lagranžovi multiplikatori m_k' tako da funkcija

$$L(t,m)=P(t)+\sum_{k=1}^{p} m_k \left[P_k(t)-1\right]$$

ima svojstvo da je $L(t',m) \leqslant P(t')=L(t',m') \leqslant L(t,m')$ za sve

$t > 0$ i $m_k \geqslant 0$. Postoji nadalje maksimizirajući vektor d' dualnog programa s komponentama

$$d_i' = \frac{c_i t_1^{a_{i1}} \dots t_m^{a_{im}}}{P(t)}$$

ako su d_i ponderi vezani uz polinom P, odnosno

$$d_j' = \frac{m_k c_i\, t_1^{a_{i1}} \dots t_m^{a_{im}}}{P(t)}$$

ako su d_j ponderi vezani uz pozinom ograničenja P_k.

Ako je nadalje $\lambda_k(d') = \mu_k' / P(t')$, $k = 1,2,\dots,p$ tada

d) za maksimizirajući vektor d' dualnog problema svaki minimizirajući vektor t' originalnog problema zadovoljava jednakosti

$$c_i t_1^{a_{i1}} \dots t_m^{a_{im}} = \begin{cases} d_i' V(d') & \text{za pondere polinoma } P, \\ d_i' / \lambda_k(d') & \text{za pondere ograničenja za koje je } \lambda_k(d') > 0. \end{cases}$$

Osnovna pretpostavka prethodnog terema je konzistentnost originalnog problema. Slijedeći teorem daje dovoljne uvjete za takvu konzistentnost.

Teorem 4.2.

Ako je originalni problem konzistentan i postoji vektor d' s pozitivnim koordinatama koji zadovoljava ograničenja dualnog problema, tada postoji vektor t' koji zadovoljava ograničenja originalnog problema i koji minimizira pozinom P.

Dokaz jednog i drugog teorema može se naći u djelu (1).

Za pozinom $P(t_1,t_2) = 40t_1t_2 + 20t_2t_3$ *primjena oba teorema*

pri ograničenju $P_1(t_1,t_2)= \frac{1}{5}\, t_1^{-1}t_2^{-1/2} + \frac{3}{5}t_2^{-1}t_3^{-2/3} \leqslant 1$

dualnu funkciju

$$V(d)=(40d_1^{-1})^{d_1}(20d_2^{-1})^{d_2}(5^{-1}d_3^{-1})^{d_3}(3x5^{-1}d_4^{-1})^{d_4}(d_3+d_4)^{d_3+d_4}$$

i uvjete normalizacije i ortogonalizacije

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 \qquad\quad &= 1, \\ d_1 \qquad - d_3 \quad &= 0, \\ d_1+d_2- \tfrac{1}{2}\, d_3-d_4 &= 0, \\ d_2 \qquad - \tfrac{2}{3}\, d_4 &= 0. \end{aligned}$$

Rješenje ovog sustava dualnih ograničenja je vektor

$$d' = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}),$$

U ovom slučaju je polazni problem konzistentan jer je ograničenje zadovoljeno za $t_1=t_2=1$. *Možemo primijeniti drugi teorem da bismo utvrdili egzistenciju minimizirajuće točke, a zatim primijeniti prvi teorem za odredjivanje koordinata minimizirajuće točke. Lako je utvrditi da je*

$$V(1/2,\ 1/2,\ 1/2,\ 3/4) = 40.$$

Odatle slijedi da je minimalna vrijednost pozinoma P jednaka 40 jer je to maksimalna vrijednost dualne funkcije. Prema posljednjoj točki d) teorema 4.1. vrijede jednakosti

$$\begin{aligned} 40t_1t_2 &= 20, \\ 20t_2t_3 &= 20. \end{aligned}$$

Prema točki c) teorema 4.1. je ograničenje aktivno jer su 3. i 4. koordinata vektora d′ različite od nule. Prema tome je $g(t) =1$ *za minimizirajuću točku. Zbog toga opet iz teorema 4.1. c) slijedi*

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{5}\, t_1^{-1}t_2^{-1/2} &= \tfrac{2}{5}, \\ \tfrac{3}{5}\, t_2^{-1}t_3^{-2/3} &= \tfrac{3}{5}. \end{aligned}$$

Logaritmiranjem se dobiva sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} \log t_1 + \log t_2 \qquad\qquad &= -\log 2, \\ \log t_2 + \log t_3 &= 0, \\ -\log t_1 - \tfrac{1}{2}\log t_2 \qquad &= \log 2 \\ -\log t_2 - \tfrac{2}{3}\log t_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ovaj sustav ima rješenje (-log2,0,0). To znači da minimizirajući vektor ima koordinate (1/2,1,1).

5. PRIMJENA GEOMETRIJSKOG PROGRAMIRANJA NA NEPOZINOME

Osnovna primjena geometrijskog programiranja je minimiziranje pozinoma uz ograničenja koja su takodjer oblika pozinoma. Moguće je medjutim primijeniti geometrijsko programiranje i na neke funkcije koje nisu pozinomi ako se prevodjenjem problema u ekvivalentan problem funkciju i ograničenja može svesti na pozinome. U ovoj točki nabrojit ćemo neke takve primjere.

a) *Minimizirati funkciju* $F(t_1,t_2)=(3t_1+t_1t_2^{-2})^{1/2}(t_1^2+t_2^{-3})^a$ *gdje je a bilo koji realan broj. Ovaj problem ekvivalentan je problemu*

$$\text{Minimizirati } P = t_3^{1/2} t_4^a$$

uz ograničenja

$$3t_1 + t_1 t_2^{-2} \leqslant t_3,$$

$$t_1^2 + t_2^{-3} \leqslant t_4.$$

Funkcije početnog problema nisu bile pozinomi, dok se u ekvivalentnom problemu radi o minimizaciji pozinoma pa je primjenljivo geometrijsko programiranje.

b) *Općenitiji je primjer minimizacije funkcije* $F(t)=p(t)+\left[q(t)\right]^a r(t)$ *gdje su p,q,r pozinomi varijabli* $t_1,\dots,t_m$ *i* $a>0$ *realna konstanta. Ekvivalentan problem sada glasi*

$$\text{minimizirati } p(t) + t_o^a r(t)$$

uz ograničenje $\quad t_o^{-1} q(t) \leqslant 1.$

Konkretan primjer pokazuje koliko ovakve funkcije mogu biti složene. Neka se radi o minimizaciji funkcije

$$F(t)=t_1^{-0,3}t_2^4 + (t_1 t_2^{-1/5} + 0,7t_1 t_2)^2 (t_1 + 3t_1 t_2).$$

Ekvivalentan je problem minimizacije pozinoma

$$P = t_1^{-o,3}t_2^4 + t_o^2 (t_1+3t_1t_2)$$

uz ograničenje

$$t_o^{-1} t_1 t_2^{-1/5} + 0,7t_o^{-1} t_1 t_2 \leqslant 1.$$

c) Minimizacija funkcije $F(t)=p(t)+q(t)/\ u(t) - h(t)\ ^a$ kod koje su p, q i h bilo kakvi pozinomi, a $u(t)$ jednočlani pozinom svodi se na ekvivalentan problem minimizacije pozinoma

$$P = p(t) + t_o^{-a} q(t)$$

uz ograničenje $t_o/u(t) + h(t)/u(t) \quad 1.$

d) Minimizacija funkcije $F(t) = p(t) - u(t)$ kod koje $p(t)$ bilo kakav pozinom, a $u(t)$ jednočlani pozinom svodi se na minimizaciju pozinoma

$$P = t_o^{-1}$$

uz ograničenje

$$t_o/u(t) + p(t)/u(t) \leqslant 1.$$

e) Svi primjeri pokazuju da se geometrijsko programiranje može primijeniti na funkcije

$$F(t) = \sum_i \prod_j q_{ij}(t)^{a_{ij}} / \left[1 - p_{ij}(t)\right]^{b_{ij}}$$

gdje su p_{ij} i q_{ij} pozinomi, a a_{ij} i b_{ij} pozitivne konstante.

6. PRIMJENA ELEKTRONIČKOG RAČUNALA U ZADACIMA GEOMETRIJSKOG PROGRAMIRANJA

Zadaci geometrijskog programiranja često zahtijevaju rješavanje velikih sustava jednadžbi za koje je potrebna primjena elektroničkog računala. Predlažemo nekoliko potprograma za geometrijsko programiranje u programskom jeziku FORTRAN.

Potprogram POZOGR služi za prihvaćanje ulaznih podataka za pozinom i ograničenja u matricu GRAN čiju strukturu predstavlja tabela

	1. sumand			n-ti sumand	
Pozinom	C_1	$a_{11}\ a_{12}$---a_{1m}	. . .	C_n	a_{n1} ---a_{nm}
O g r a n i č e nj a	.	- - - - -	- - - -		- - - -
	c′i	$a'_{i1} a'_{i2}$--a'_{im}	- - - -	C′n	a'_{i1}---a'_{im}
	-	- - - -	- - - -		- - - -

```
      SUBROUTINE POZOGR (M,N,K,GRAN)
      DIMENSION GRAN (100,100)
C     POZOGR SLUŽI ZA ULAZ POZINOMA I OGRANIČENJA
C     M=BROJ VARIJABLI, N=BROJ SUMANADA, K=BROJ POZINOMA
C     I OGRANIČENJA.
      DO 10 I=1,100
      DO 10 J=1,100
   10 GRAN (I,J) =0.0
      DO 20 I=1,K
   20 READ (6,1) (GRAN (I,J),J=1,N*(M+1))
    1 FORMAT (16F4.0)
      RETURN
      END
      SUBROUTINE DUALNA (N,C,DELTA,V*)
      DIMENSION C(N),DELTA(N)
C     DUALNA JE POTPROGRAM ZA DUALNU FUNKCIJU ZA JEDNOSTA-
C     VAN SLUČAJ
C     BEZ OGRANIČENJA. C=MATRICA KOEFICIJENATA C(i),DELTA=
C     MATRICA
C     PONDERA D(i),V=VRIJEDNOST DUALNE FUNKCIJE

      S=o.o
      DO 10 I=1,N
      IF(DELTA(I))1,1,2
    2 V=DELTA(I)
      V=V*ALOG (C(I)/V)
   10 S=S+V
      V=EXP(S)
      RETURN
    1 WRITE (6,3)I
    3 FORMAT (T5,'DUALNA FUNKCIJA NE POSTOJI.DELTA (',I2,
      'NEPOZITIVAN')
```

```
      RETURN1
      END
      SUBROUTINE UVJETI (M,N,GRAN,A)
      DIMENSION GRAN (100,100),A(100,100)
C     POTPROGRAM ZA UVJETE NORMALIZACIJE I ORTOGONALIZACIJE
      DO 10 I=1,M
      DO 10 J=1,N
10    A(I,J)=GRAN(1,I+1+(J-1)*(M+L))
      DO 15 I=1, N+1
   15 A(M+1,I)=1.0
      DO 20 I=1,M
   20 A(I,N+1)=0.0
      RETURN
      END
      SUBROUTINE GAUS (M,N,A,DELTA,IP,*)
      DIMENSION A(M,N),DELTA (100), IP (100)
C     POTPROGRAM ZA RJESAVANJE SUSTAVA JEDNADZBI ORTOGONA-
C     LIZACIJE I NORMALIZACIJE GAUSOVIM ALGORITMOM.
      DO 11 I=1,N
   11 IP(I)=I
      DO 10 I=1,M
      IF (I-N+1)1,1,10
    1 IF(A(I,I))2,3,2
    3 J=1
   77 IF(I+J-M)4,4,5
    4 IF(A(I+J,I))6,7,6
    7 J=J+1
      GO TO 77
    6 DO 20 K=1,N
      C=A(I,K)
      A(I,K)=A(I+J,K)
   20 A(I+J,K)=C
      GO TO 2
    5 L=1
   12 IF (I+L-N+1) 13,13,15
   13 IS=IP(I)
      IP(I)=IP(I+L)
      IP(I+L)=IS
      DO 30 K1=1,M
      S=A (K1,I)
      A(K1,I)=A(K1,I+L)
   30 A(K1,I+L)=S
      GO TO 1
    2 DO 40 L1=1,N
   40 A(I,L1)=A(I,L1)/A(I,I)
      DO 50 I1=1,M
      IF (I1-I)55,50,55
```

```
 55     DO 70 J=1,N
 70     A(I1,J)=A(I1,J)-A(I,J)*A(I1,I)
 50     CONTINUE
 10     CONTINUE
        IF(M-N) 111,112,112
111     WRITE (6,222)
222     FORMAT ('SUSTAV JE KONZISTENTAN S BAZ.RJESENJEM:'///)
        DO 600 I=1, N-1
        IF (I-M) 333, 333, 334
333     DELTA (IP(I))=A(I,N)
        GO TO 600
334     DELTA (IP(I))=0.0
600     CONTINUE
        DO 610 I=1, N-1
610     WRITE (6,223) I,DELTA (I)
223     FORMAT (T10,'X (',I5,') = ',F15.5,/)
        RETURN
112     DO 620 J=N-1,M
        IF (A(J,N)) 625, 620,625
620     CONTINUE
        WRITE (6,630)
630     FORMAT ('SUSTAV JE KONZISTENTAN UZ SUVISNE JEDNADZBE'///)
        DO 640 I=1, N-1
        DELTA (IP(I))=A(I,N)
640     WRITE (6,650) I,DELTA (I)
650     FORMAT (T10, 'X(',I5,') = ',F15.5,/)
        RETURN
625     WRITE (6,660)
660     FORMAT ('SUSTAV JE KONTRADIKTORAN')
        RETURN1
 15     DO 670 I1=I,M
        IF(A(I1,N))625,670,625
670     CONTINUE
        DO 690 I1=1,N-1
        IF(I1-I)691,692,692
691     DELTA (IP(I1))=A(I1,N)
        GO TO 690
692     DELTA (IP(I1))=0.0
690     CONTINUE
        WRITE (6,700)
700     FORMAT('SUSTAV JE KONZISTENTAN S DEGENER.BAZ.RJES.'///)
        DO 710 I=1, N-1
710     WRITE (6,715)I,DELTA (I)
715     FORMAT (T10,'X (', I5,') = ',F15.5,/)
        RETURN
        END
```

```
      SUBROUTINE MINTOC (N1,M1,DELTA,V,TOCKA,GRAN,*)
      DIMENSION DELTA (100,TOCKA(100),GRAN(100,100),IP(100)
     * A(100,100)
C     POTPROGRAM ZA ODREDJIVANJE MINIMIZIRAJUCE TOCKE
      DO 10 I=1,N1
      DO 10 J=1,M1
   10 A(I,J)=GRAN(1,J+1+(I-1)*(M1+1))
      DO 20 I=1,N1
   20 A(I,M1+1)=ALOG(DELTA(I)*V/GRAN(1,1+(I-1)*(M1+1)))
      CALL GAUS (N1,M1+1,A,TOCKA,IP, & 100)
      GO TO 30
      RETURN1
   30 DO 40 I=1,M1
   40 TOCKA (I)=EXP(TOCKA(I))
      WRITE (6,50)
   50 FORMAT ('KOORDINATE MINIM.TOCKE SU: ')
      DO 60 I=1,M1
   60 WRITE (6,70)I,TOCKA(I)
   70 FORMAT ('VARIJABLA T(',I2,') = ',F15.5)
      RETURN
      END
C     GLAVNI PROGRAM TEGEOM TESTIRA POZOGR,DUALNA,UVJETI,
C     GAUS I MINTOC
      DIMENSION GRAN (100,100),C(100),DELTA(100),A(100,100)
     * IP (100),TOCKA(100)
      CALL POZOGR (3,4,1,GRAN)
      CALL UVJETI (3,4,GRAN,A)
      CALL GAUS (4,5,DELTA,IP, & 600)
      M=3
      N=4
      DO 10 I=1,N
   10 C(I)=GRAN(1,I+(I-1)*M)
      CALL DUALN (N,C,DELTA,V, & 600)
      CALL MINTOC (N,M,DELTA,V.TOCKA,GRAN, & 600)
  600 STOP
      END.
```

L I T E R A T U R A

1. *Daffin R., Piterson E., Zener K.; Geometričeskoe programmirovanie "MIR" Moskva, 1972.*

2. *Dolenc B., Lončar I., Zbirka zadataka i riješenih primjera iz FORTRANA, Fakultet organizacije i informatike, Varaždin, 1975.*

3. *Stefanini B., FORTRAN udžbenik programiranja, Tehnička knjiga, Zagreb, 1973.*