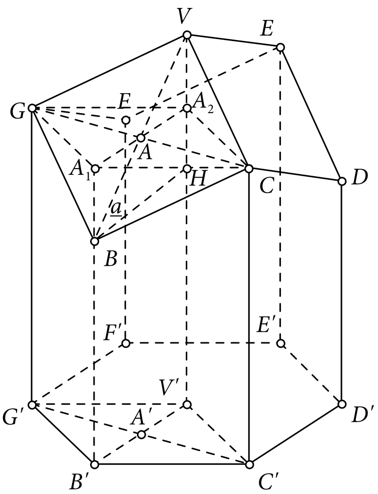
ELEMENTARNO RJEŠAVANJE NEKIH PROBLEMA O EKSTREMIMA (4)

Vladimir Devidé, Zagreb

Nastavak iz Matke 71.

Elementarno rješavanje nekih problema o ekstremima vrlo je prikladan materijal za uvježbavanje zajedničkog rada geometrijskog zora i rutinsko-algebarskih računa, spretnih konstrukcija i egzaktnih dedukcija, mašte i logike. Pri čitanju teksta koji slijedi čitateljima preporučujem samostalno rješavanje postavljenih zadataka i, tek naknadno, bez obzira na rezultat tog pokušaja, proučavanje u tekstu danog rješenja.

Zadatak 12. Ćelija pčelinjeg saća (sl. 21.) s jedne strane ima oblik otvorene pravilne šesterostrane prizme, dok je s druge strane zatvorena s tri međusobno sukladna romba jednako nagnuta prema osi prizme. Ćelija je, prema tome, omeđena sa šest sukladnih trapeza (*BB'C'C*, *CC'D'D*, *DD'E'E*, *EE'F'F*, *FF'G'G*, *GG'B'B*) i s tri sukladna romba (*BCVG*, *DEVC*, *FGVE*), pa je njezino oplošje jednako zbroju površina tih likova.



Slika 21.

Najekonomičnija će biti ćelija za čiju je izgradnju utrošeno najmanje materijala. To znači da će biti najbolje graditi takvo saće za koje će (za obuhvaćanje određenoga obujma ćelije i uz zadanu duljinu brida baze $|B'C'| = a$) oplošje ćelije O biti minimalno. Problem najekonomičnijeg oblika saća geometrijski se svodi na sljedeće:

Potrebno je odrediti kolika treba biti veličina kuta α nagiba ravnine romba prema horizontalnoj ravnini (baze) kako bi oplošje O te ćelije, uz zadani obujam i zadanu duljinu brida baze, bilo minimalno.

Rješenje: Pomičemo li vrh V ćelije duž osi prizme VV', a točke C, G i E ostaju nepomične, romb $BCVG$ zakretat će se oko svoje dijagonale $\overline{GC}$. Pri tome se obujam ćelije neće mijenjati, on će uvijek biti jednak umnošku površine baze i duljine brida $\overline{CC'}$ ($|CC'| = h$). Naime, koliko „donje polovine" rombova odsijecaju od obujma odgovarajuće pravilne šesterostrane prizme, toliko mu „gornje polovine" opet dodaju (npr. obujam „oduzete" piramide A_1CGB jednak je obujmu „dodane" piramide A_2GCV, itd.). Zadatak je, dakle, naći položaj točke V (odnosno vrijednost odgovarajućeg kuta α) za koji oplošje O ćelije poprima minimum, pri čemu su $|B'C'| = a$ i $|CC'| = h$ čvrste, određene vrijednosti.

Budući da su pobočke ćelije sukladni trapezi, bit će

$$O = 6 \cdot p_{BB'C'C} + 3 \cdot p_{BCVG}$$

pri čemu je $p_{BB'C'C}$ površina trapeza $BB'C'C$, a p_{BCVG} površina romba $BCVG$. Budući da svaki od triju rombova koji odozgo zatvaraju ćeliju možemo rastaviti na dva sukladna jednakokračna trokuta (npr. romb $BCVG$ na trokute BCV i BVG), bit će:

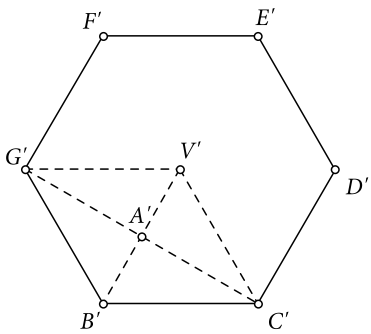
$$O = 6 \cdot p_{BB'C'C} + 6 \cdot p_{BCV}$$

Očito će oplošje O poprimiti minimum istodobno kad i njegova šestina, pa treba naći uvjet za koju će veličinu kuta α izraz $O_1 = p_{BB'C'C} + p_{BCV}$ poprimiti najmanju vrijednost. Pri tome vrijedi:

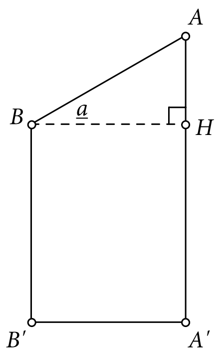
$$p_{BB'C'C} = \frac{1}{2}\left(|BB'| + |CC'|\right) \cdot |B'C'| \text{ i } p_{BCV} = |AB| \cdot |AC| .$$

Sa sl. 21. vidimo da je $|AC| = |A'C'|$, a sa sl. 22. (baza ćelije) da je $|A'C'| = \frac{\sqrt{3}}{2}|B'C'|$, odakle slijedi:

$$O_1 = |A'C'| \cdot \left[\frac{|BB'| + |CC'|}{\sqrt{3}} + |AB|\right] = |A'C'| \cdot \left(\frac{|BB'|}{\sqrt{3}} + |AB|\right) + |A'C'| \cdot \frac{|CC'|}{\sqrt{3}} .$$



Slika 22.



Slika 23.

Veličine $|CC'| = h$ i $|A'C'| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ su konstantne pa se traženje minimuma za O_1 svodi na traženje minimuma od $O_2 = \frac{|BB'|}{\sqrt{3}} + |AB|$.

Presiječemo li ćeliju ravninom koja sadrži $\overline{BB'}$ i $\overline{AA'}$, dobit ćemo sl. 23., odakle se vidi da je

$$O_2 = \frac{|AA'| - |AH|}{\sqrt{3}} + |AB| = |AB| - \frac{|AH|}{\sqrt{3}} + \frac{|AA'|}{\sqrt{3}} = |AB| - \frac{|AH|}{\sqrt{3}} + \frac{|CC'|}{\sqrt{3}} ,$$

pri čemu je $\frac{|CC'|}{\sqrt{3}} = \frac{h}{\sqrt{3}}$ konstanta. Zato konačno ostaje za odrediti veličinu kuta α za koji funkcija $O_3 = |AB| - \frac{|AH|}{\sqrt{3}}$ poprima minimum.

Odaberemo li jedinicu duljine tako da je $|A'B'| = |BH| = 1$ i označimo $|AH| = x$, bit će

$$O_3 = \sqrt{1+x^2} - \frac{x}{\sqrt{3}} = y \qquad (1)$$

Pitamo se za koji pozitivni realni broj x veličina y poprima najmanju vrijednost. Iz jednadžbe (1) slijedi da je

$$\sqrt{1+x^2} = y + \frac{x}{\sqrt{3}},$$

odakle nakon množenja s $\sqrt{3}$ i kvadriranja te sređivanja dobivamo

$$x^2 - xy\sqrt{3} + \frac{3}{2}(1-y^2) = 0.$$

Riješimo li tu jednadžbu po x, dobit ćemo:

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(y \pm \sqrt{3y^2 - 2}\right) \qquad (2)$$

Da bi x bio realan, mora biti $3y^2 - 2 \geq 0$, tj. $|y| \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$. No, zbog (1) y mora biti nenegativan (jer je uvijek $x < \sqrt{1+x^2}$, pa je pogotovo $\frac{x}{\sqrt{3}} < \sqrt{1+x^2}$). Zato je $y_{\min} = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Prema (2) toj vrijednosti odgovara $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, pa je $\operatorname{tg}\alpha = 0.707...$ a iz tablica dobivamo da je $\alpha \doteq \left(35\frac{1}{4}\right)^\circ$.

Time je zadatak riješen. (Mjerenjem kuta na ćeliji saća dobiven je rezultat koji se podudara s našim rješenjem.)

Napomena: Označimo li $|\angle GBC| = |\angle GVC| = \beta$ i $|\angle GBB'| = |\angle B'BC| = \gamma$, bit će zbog

$$|AH| = |BH| \operatorname{tg}\alpha = \frac{a\sqrt{2}}{4},\ |AB| = \sqrt{|BH|^2 + |BH|^2 \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{a\sqrt{6}}{4},$$

$$|AC| = \frac{a\sqrt{3}}{2},\ |BC| = \sqrt{|B'C'|^2 + |AH|^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{4},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{|AC|}{|AB|} = \sqrt{2},\ \sin\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\gamma = \frac{|AH|}{|BC|} = \frac{1}{3},$$

$$\operatorname{tg}\beta = -2\sqrt{2},\ \operatorname{tg}\gamma = -2\sqrt{2},\ \text{dakle}\ \beta = \gamma.$$

U vrhu *B* sastaju se, dakle, pravci *GB*, *CB*, *B'B* tako da su svi kutovi koje međusobno zatvaraju jednaki. No, odatle slijedi da su i kutovi što ih zatvaraju pobočke ćelije s rombom jednaki kutu između pobočaka, tj. 120°. Isto, dakako, vrijedi i za vrhove *D* i *F*, a prema tome i za vrh *V*. To znači da se duž svakog brida ćelije ravnine likova koji je omeđuju sijeku pod jednakim kutovima od 120°.

Rezultat tg $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, tj. $\alpha \doteq \left(35\frac{1}{4}\right)^\circ$, pokazat će se prirodnijim ako provedemo sljedeće jednostavno razmatranje:

Dopunimo ćeliju sukladnom, ali obrnuto položenom ćelijom tako da im se otvorene baze poklope i da se kraći pobočni bridovi gornje ($\overline{BB'}$, $\overline{DD'}$, $\overline{FF'}$) nastavljaju na dulje bridove donje i obratno (tj. tako da je donja zakrenuta za 60° prema gornjoj). Tada će i vertikalne pobočke (kod jedne ćelije to su trapezi) biti romboidi, a najpovoljniji oblik takve zatvorene „dvostruke ćelije" (tj. oblik minimalnog oplošja koje zatvara dani obujam) poklapat će se s odgovarajućim oblikom jedne ćelije (jer „dvostruka ćelija" uz dvostruko oplošje zatvara dvostruki obujam). No, za „dvostruku ćeliju" prirodno je očekivati da će biti najpovoljnijeg oblika (u navedenom smislu) ako bude što pravilnija, a takva će biti ako svi kutovi susjednih pobočaka i svi bridovi budu jednaki. Tome, očito, odgovara rombski dodekaedar (omeđen s 12 sukladnih rombova). Odgovarajuća ćelija poklapa se s rješenjem našeg problema (osim što pritom dobivamo ćeliju određenog omjera *h* : *a* koji na pčelinjem saću sigurno nije ispunjen jer je taj odnos na saću uvjetovan i drugim razlozima, a ne samo uvjetom ekonomičnosti).