POVEZIVANJE GEOMETRIJSKIH ZADATAKA SA ZBROJEVIMA

Alena Dika i Nikola Skočić, Rijeka

U matematičkim zadatcima vrlo često spominjemo zbroj prvih n prirodnih brojeva i Gaussovu dosjetku.

Podsjetimo se, prema Gaussu vrijedi ova formula za zbroj prvih n prirodnih brojeva:

$$n + (n - 1) + (n - 2) + (n - 3) + \ldots + 3 + 2 + 1 = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Mnogi matematički (aritmetički) izrazi mogu se interpretirati i geometrijski. Podsjetimo se kako linearnu funkciju $y = ax + b$ možemo prikazati u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini pomoću skupa točaka (uređenih parova) koje će na kraju povezane činiti pravac u ravnini. Pravac je, naime, geometrijska interpretacija linearne jednadžbe $y = ax + b$.

Kao što smo već rekli, mnogi matematički modeli mogu imati svoju geometrijsku interpretaciju. U ovom članku pokazat ćemo da postoji geometrijska interpretacija zbroja prvih n prirodnih brojeva, tj. povezat ćemo taj zbroj s geometrijskim zadatkom.

Veza geometrije i algebre danas je uobičajena i dio je obaveznog osnovnoškolskog gradiva, ali se rijetko naglašava i na nju skreće pozornost. U biti ona je senzacionalna i kada malo bolje razmislite, nije li prelijepo brojevima dodijeliti neki crtež, geometrijski oblik, vezu sa stvarnošću.

Zadatak 1. Koliko dužina postoji na dužini na kojoj smo nacrtali $n + 1$ točaka?

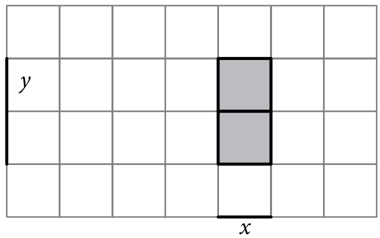
Rješenje: Dužinu $\overline{ZY}$ određuju dvije točke Z i Y. Početnu točku dužine $\overline{ZY}$, točku Z možemo birati na $n + 1$ načina, a krajnju točku Y na n načina, što nam daje ukupno $n \cdot (n + 1)$ načina ili dužina.

Budući da je dužina $\overline{ZY}$ sukladna dužini $\overline{YZ}$, znači da smo svaku dužinu računali dva puta, pa je potrebno dobiveni broj podijeliti s 2, tj. ukupan broj dužina je $\dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Učinimo sada jedan korak unatrag i uočimo da smo 1. zadatak povezali sa zbrojem prvih n prirodnih brojeva.

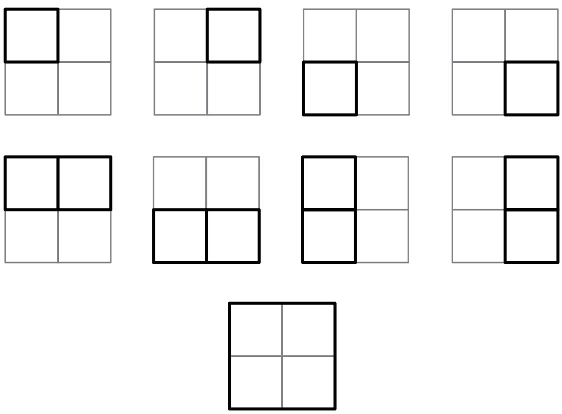
Zadatak 2. Koliko pravokutnika određuje pravokutna mreža $m \times n$?

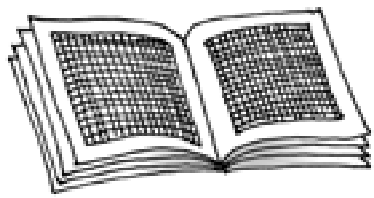
Rješenje: Koliko pravokutnika postoji u ovakvoj pravokutnoj mreži? Na slici smo nacrtali jedan od mogućih pravokutnika koji se nalaze u ovoj pravokutnoj mreži. Oni mogu biti različite duljine i širine. Neki će biti veći, neki manji, neki širi, a neki uži.



Bilo koji pravokutnik ovako nacrtane pravokutne mreže je pravokutnik određen različito odabranim dužinama x i y.

Na slici je primjer svih mogućih pravokutnika u kvadratnoj mreži 2×2.

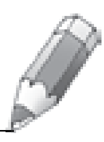




Promotrimo pravokutnu mrežu 7×4:

U pravokutnoj mreži 4×7, na svakoj okomitoj liniji postoji po $\frac{5 \cdot 4}{2} = \frac{20}{2} = 10$ dužina (pogledaj članak *Bogatstvo jednog zadatka*).

Na svakoj vodoravnoj liniji postoji po $\frac{8 \cdot 7}{2} = \frac{56}{2} = 28$ dužina. Ukupno, svaki okomiti segment u kombinaciji sa svakim vodoravnim segmentom daje $\frac{7 \cdot 8}{2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 28 \cdot 10 = 280$ pravokutnika.



Promotrimo pravokutnu mrežu $m \times n$:

Koliko je pravokutnika određeno u bilo kojoj pravokutnoj mreži dimenzija $m \times n$?

Na svakoj okomitoj liniji možemo odabrati po $\frac{m \cdot (m+1)}{2}$ dužina, a na svakoj vodoravnoj liniji možemo odabrati po $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ dužina (pogledaj članak *Bogatstvo jednog zadatka*).

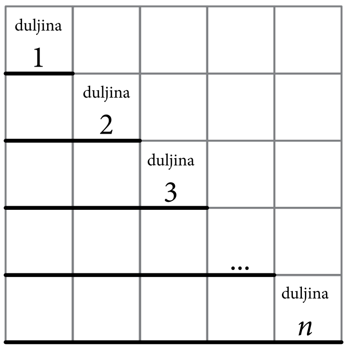
Svaki okomiti segment u kombinaciji sa svakim vodoravnim segmentom određuje $\frac{m \cdot (m+1)}{2} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ pravokutnika.

Općenito: *U pravokutnoj mreži $m \times n$ možemo postoji* $\frac{m \cdot (m+1)}{2} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ *pravokutnika.*

Opet pogledajmo korak unatrag i uočimo da smo aritmetički izraz $\frac{m \cdot (m+1)}{2} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ povezali s ukupnim brojem pravokutnika u pravokutnoj mreži $m \times n$.

Zadatak 3. Koliko pravokutnika određuje kvadratnatna mreža $n \times n$?

Rješenje: Na svakoj vodoravnoj linji imamo n dužina duljine 1, $(n - 1)$ dužinu duljine 2, $(n - 2)$ dužine duljine 3, ..., 2 dužine duljine $n - 1$ te 1 dužinu duljine n.



Debljom linijom na kvadratnoj mreži označili smo što podrazumjevamo dužinom duljine 1, dužinom duljine 2, ... dužinom duljine n. Dakle, u toj je mreži ukupno:

$$n + (n - 1) + \ldots + 3 + 2 + 1 = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \text{ dužina.}$$

Na svakoj vertikalnoj liniji postoji također

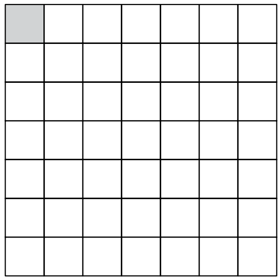
$$n + (n-1) + ... + 3 + 2 + 1 = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \text{ dužina.}$$

Ukupan broj pravokutnika u kvadratnoj mreži $n \times n$ je

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$$

Kako povezati zbroj kvadrata prvih *n* prirodnih brojeva s geometrijskim zadatkom

1

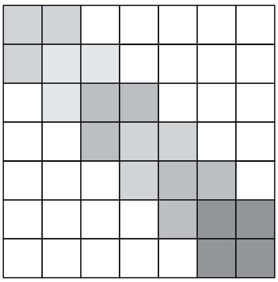


Zadatak 4. Koliko kvadrata određuje kvadratna mreža $n \times n$?

Rješenje: Zamislimo kvadratnu mrežu 7×7.

Lako je zaključiti da kvadrat veličine 1×1 može biti na bilo kojoj od $7 \cdot 7 = 49$ pozicija.

Za kvadrat veličine 2×2 je situacija nešto drugačija.



Zamislimo da je gornji lijevi kut kvadratne mreže ujedino i gornji lijevi kut prvog zamišljenog kvadrata veličine 2×2 . Vrh toga kuta možemo premjestiti na svaku od $7 - 1 = 6$ pozicija udesno (neke od tih pozicija označene su na slici, primijetimo da se kvadrati poklapaju) i na 6 pozicija dolje dobivajući kvadrate veličine 2×2. Zato je broj mogućih kvadrata veličine 2×2 jednak $6 \cdot 6 = 36$.

Nastavljajući istom postupkom dobivamo broj kvadrata veličina 3×3, 4×4 itd.

ZA KVADRATNU MREŽU 7 × 7

VELIČINA KVADRATA	BROJ KVADRATA
1×1	$7 \cdot 7 = 49$
2×2	$6 \cdot 6 = 36$
3×3	$5 \cdot 5 = 25$
4×4	$4 \cdot 4 = 16$
5×5	$3 \cdot 3 = 9$
6×6	$2 \cdot 2 = 4$
7×7	$1 \cdot 1 = 1$
UKUPNO:	**140**

Ako postupak primijenimo na kvadratnu mrežu $n \times n$, dobit ćemo:

ZA KVADRATNU MREŽU $n \times n$

VELIČINA KVADRATA	BROJ KVADRATA
1×1	$n \cdot n$
2×2	$(n-1) \cdot (n-1)$
3×3	$(n-2) \cdot (n-2)$
4×4	$(n-3) \cdot (n-3)$
...	...
$(n-1) \times (n-1)$	$2 \cdot 2 = 4$
$n \times n$	$1 \cdot 1 = 1$
UKUPNO:	**?**

Zbrojimo li sve zapisane kvadrate iz druge tablice imamo ukupno

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2$$

kvadrata u kvadratnoj mreži $n \times n$.

Poznato je da za zbroj kvadrata prvih n prirodnih brojeva vrijedi

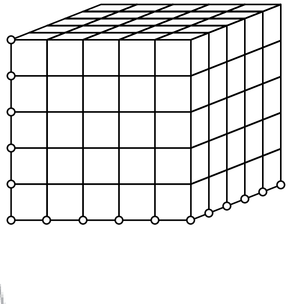
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}.$$

Konačno, ukupan broj kvadrata u kvadratnoj mreži je

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}.$$

Na ovaj način geometrijski smo interpretirali zbroj kvadrata prvih n prirodnih brojeva. Možemo reći da je zbroj kvadrata prvih n prirodnih brojeva jednak ukupnom broju kvadrata u kvadratnoj mreži $n \times n$.

Ako provjerimo za $n = 7$, imamo $\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 15}{6} = 7 \cdot 4 \cdot 5 = 140.$



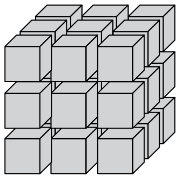
Razmatranja možemo proširiti promatrajući treću dimenziju i možemo postaviti ovakav zadatak:

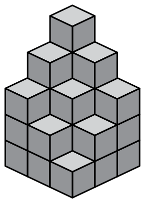
Zadatak 5. Koliko kocaka određuje kockasta mreža $5 \times 5 \times 5$?

Rješenje: Analogno prethodnom zadatku složimo tablicu.

ZA MREŽU $5 \times 5 \times 5$

VELIČINA KOCKE	BROJ KOCAKA
$1 \times 1 \times 1$	$5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$
$2 \times 2 \times 2$	$4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$
$3 \times 3 \times 3$	$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$
$4 \times 4 \times 4$	$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
$5 \times 5 \times 5$	$1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$
UKUPNO:	**225**





Uopćimo li to za mrežu $n \times n \times n$, dobivamo da je ukupan broj kocaka koje određuje mreža $n \times n \times n$ ustvari zbroj kubova prvih n prirodnih brojeva.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3$$

Kako za zbroj kubova prvih n prirodnih brojeva vrijedi

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$$

slijedi zaključak: ukupno u kockastoj mreži imamo

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$$

kocaka.

Na ovaj način geometrijski smo interpretirali zbroj kubova prvih n prirodnih brojeva. Možemo zaključiti da je zbroj kubova prvih n prirodnih brojeva jednak broju kocaka u kockastoj mreži $n \times n \times n$.

Provjerimo za $n = 5$:

$$\frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} = \frac{5^2 \cdot 6^2}{4} = \frac{25 \cdot 36}{4} = 25 \cdot 9 = 225$$

Nešto složeniji zadatak bio bi:

Zadatak 6. Koliko kvadrata određuje pravokutna mreža $m \times n$?

Pretpostavimo da je $m < n$, tj. da je $n = m + s$ (u suprotnom promatramo pravokutnu mrežu $n \times m$) i promatrajmo kvadrate veličina 1×1, 2×2, ..., $m \times m$.

ZA PRAVOKUTNU MREŽU 7 × 9

VELIČINA KVADRATA	BROJ KVADRATA
1×1	$7 \cdot 9 = 63$
2×2	$6 \cdot 8 = 48$
3×3	$5 \cdot 7 = 35$
4×4	$4 \cdot 6 = 24$
5×5	$3 \cdot 5 = 15$
6×6	$2 \cdot 4 = 8$
7×7	$1 \cdot 3 = 3$
UKUPNO:	**196**

ZA PRAVOKUTNU MREŽU $n \times m$

VELIČINA KVADRATA	BROJ KVADRATA
1×1	$m \cdot n$
2×2	$(m-1) \cdot (n-1)$
3×3	$(m-2) \cdot (n-2)$
4×4	$(m-3) \cdot (n-3)$
5×5	$(m-4) \cdot (n-4)$
...	...
$m \times m$	$1 \cdot (n-m+1)$
UKUPNO:	$\boldsymbol{S}$

$$\boldsymbol{S} = mn + (m-1)(n-1) + (m-2)(n-2) + (m-3)(n-3) + \ldots$$

$$+ (m-m+1) \cdot (n-m+1) = mn - m - n + 1 + mn - 2m - 2n + 4 + \ldots$$

$$+ mn - (m-1)m - (m-1)n + (m-1)^2$$

$$= m \cdot mn - \frac{m \cdot (m-1)}{2} (m+n) + 1 + 4 + 9 + 16 + \ldots + (m-1)^2, \text{ tj.}$$

BROJ KVADRATA U PRAVOKUTNOJ MREŽI $m \times n$

$$S = m^2 n - \frac{m \cdot (m-1)}{2} \cdot (m+n) + \frac{(m-1) \cdot m \cdot (2m-1)}{6}$$

Provjerimo li za mrežu dimenzija 7×9 ($m = 7$, $n = 9$), dobit ćemo

$$S = 7^2 \cdot 9 - \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot (7+9) + \frac{6 \cdot 7 \cdot 13}{6} = 49 \cdot 9 - 21 \cdot 16 + 91 = 441 - 336 + 91 = 196$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$$

Zadatak: *Dokažite da ima k^3 pravokutnika u pravokutnoj mreži $m \times n$ ako je $k < n < m$ najveća moguća duljina ili širina pravokutnika koje prebrajamo?*

Linkovi:

http://www.math.utah.edu/~palais/sums.html

http://www.math.rutgers.edu/~erowland/sumsofpowers.html

http://mcraefamily.com/mathhelp/CountingRectangles.htm

http://www.mav.vic.ed