

POSTOJE LI PLOHE S JEDNOM STRANOM?

Danica Bonačić Krešić, Split

Pojam plohe je svakodnevan i svima dosta jasan. Primjeri plohe su ravnina, sfera, mnogokut, krug, plašt valjka, list papira...

Ploha može biti *omeđena* ili *neomeđena*. Primjerice, sfera je omeđena, a ravnina neomeđena.

Ploha s *rubom* ili *granicom* je, primjerice, plašt valjka. Njegov su rub dvije kružnice. Ravnina je ploha bez ruba/granice.



Uzmimo u ruke istrgnuti list papira iz bilježnice, te boje iz pribora za likovni. Svaku stranu lista papira/plohe obojimo jednom bojom. I granicu tog lista papira obojimo jednom bojom. Koliko trebate boja za strane? Koliko takva ploha ima granica?

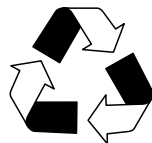
Naravno da je pitanje „smiješno” lagano i da znademo odgovor bez bojenja.

Postoje li plohe s jednom stranom? Kakvo je to pitanje? Pa tisućama se godina znade da plohe imaju dvije strane. Primjerice, horizontalna ravnina ima gornju i donju stranu.

No, razmatrajući plohe u ovom članku, postavljat ćemo ta ista pitanja. Bez bojenja se neće moći odgovoriti!

Riječ-dvije o logu

Pogledate li ponekad vrećicu u kojoj nosite kupljene stvari? Na njima se može uočiti ovakva oznaka/logo:



Što taj logo predstavlja? Što on znači? Pogledate li ga bolje, vidjet ćete da otisnuti tekst uz logo „govori” da je ta vrećica od recikliranog materijala.

Ovaj simbol recikliranih materijala nacrtao je 1970. godine **Gary Anderson**, student Sveučilišta Južna Kalifornija u Los Angelesu. Anderson je sa svojim logom pobijedio na natječaju koji je raspisala tvrtka *Countainer Corporation of America*.

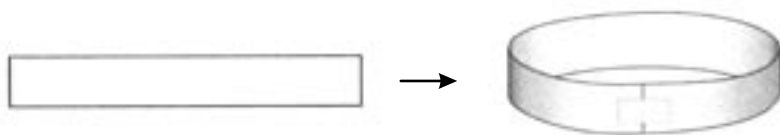


Riječ-dvije o ideji za logo

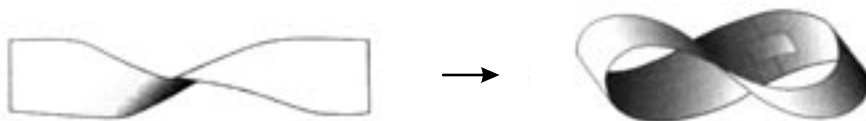
Anderson je ideju za logo dobio poznavajući *Möbiusovu vrpču*.

Vrpču su 1858. godine, nezavisno jedan od drugoga, otkrila dva matematičara. To su bili njemački matematičar **August Ferdinand Möbius** (1790. - 1868.) i češki matematičar **Johann Benedict Listing** (1808. - 1882.). Obojica su bili Gaussovi studenti u Göttingenu.

Ideja Möbiusove i Listingove vrpce vrlo je jednostavna. Uzme li se pravokutna vrpca i zalijepe li se nasuprotne stranice, dobit će se ploha koja se može obojiti s dvije boje i koja ima dvije granice/ruba (v. sl.).



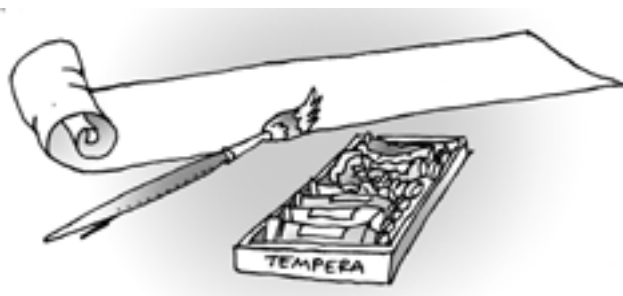
Ako se prije lijepljenja jedna stranica zarotira za 180° (jedan *poluokret*), dobiva se drukčija ploha (v. sl.).



Ova se ploha zove *Möbiusova vrpca s jednim poluokretom*. Ploha ima samo jednu stranu, tj. može se obojiti samo jednom bojom i ima samo jedan rub.

Ne vjerujete?! Onda kist u ruke i obojite jednu Möbiusovu vrpču!

Dakle, 1858. godine otkrivena je prva ploha koja ima samo jednu stranu. Dakle, pitanje iz naslova članka i nije baš besmisleno kako je na prvi pogled izgledalo!



Igre, mozgalice i zadatci

Razmotrimo jednu jednostavnu mozgalicu.

Zadatak 1. Uzmimo u ruke papirnatu Möbiusovu vrpca s jednim poluokretom i razrežimo je duž:

- polovine širine vrpce (v. sl.),
- trećine širine vrpce,
- četvrtine širine vrpce.



Što dobivamo ovakvim rezanjem vrpce? Pokušajmo nastaviti rezati još jedanput! Što tada dobivamo?

Rješenje:

Oboji li se vrpca koja se dobije prvim rezanjem u zadatku a), vidjet će se da vrpca ima dvije strane, tj. da trebaju dvije boje i da su dvije granice/ruba.

Rezanjem vrpce po trećini širine dobivaju se dvije međusobno isprepletene vrpce jednake širine. Manja je vrpca Möbiusova s jednom stranom, a veća vrpca ima dvije strane.

Rezanjem po četvrtini širine dobivaju se dvije međusobno isprepletene vrpce nejednake širine. Manja i šira vrpca je vrpca s jednom stranom, a veća i uža ima dvije strane.

Ovaj se postupak rezanja i bojenja vrpca može nastaviti pa će se dobiti niz novih, zanimljivih i neočekivanih rezultata.

Na sličan način riješite sljedeći zadatak.

Zadatak 2. Uzmite u ruke papirnatu Möbiusovu vrpca s:

- dva poluokreta,
- tri poluokreta.

Razrežite te vrpce duž polovine i trećine njihove širine. Što se dobiva? Koliko treba boja za bojenje? Koliko granica imaju vrpce?



Sad ćete lako moći dopuniti sljedeću tablicu.



| broj poluokreta | rezanje duž | rezultat |
|-----------------|-------------|--|
| 1 | polovine | 1 vrpca dvostruko dulja |
| 2 | polovine | 2 vrpce, jednake duljine, isprepletene |
| 1 | trećine | |
| 2 | trećine | |
| 1 | četvrtine | |
| 3 | polovine | |
| 3 | polovine | |
| 3 | polovine | |
| 4 | polovine | |

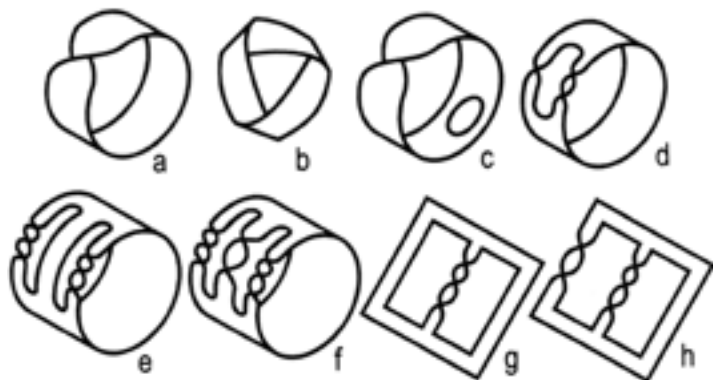
Uočavamo da je, prije rezanja, važno svojstvo ovih vrpca broj njezinih poluokreta. Pogledajmo sljedeće vrpce.



Na slici su tri različite Möbiusove vrpce. Vidi se da je prva vrpca poslužila kao predložak za Andersonov logo. Koliko poluokreta ima svaka od njih? S koliko se boja može obojiti svaka od njih? Koliko granica ima svaka vrpca?

Rasprava o bojenju vrpce zapravo je rasprava o tome koliko određena ploha ima strana. Dakle, istraživali smo je li određena vrpca/ploha jednostrana ili dvostrana.

Zadatak 3. Načinite papirnate verzije sljedećih ploha (v. sl.). Koliko svaka ploha ima strana?



Istražite što se događa s ovim plohamu kad ih se reže.

I pri kraju, evo nekoliko novih igrica, mozgalica i zadataka.

Zadatak 4. Obojite i razrežite duž oznake sljedeće plohe (v. sl.).



Druga ploha ima gornji i donji spoj zarotiran na isti način, a treća ploha ima gornji i donji spoj drukčije zarotiran. Sve su ove plohe nastale lijepljenjem krajeva sljedećeg predloška (v. sl.).



Na kraju, načinite i istražite sljedeće plohe (v. sl.) koje nastaju iz danog predloška!



Möbiusova vrpca već stoljeće i pol izaziva ogromnu pozornost. I to ne samo matematičara! Vrlo su je uspješno u svojem radu rabili mnogi umjetnici (slikari, kipari), arhitekti, fizičari, kemičari, inženjeri, književnici, filmski redatelji, enigmatičari, ...

No, to je jedna sasvim nova priča. O tome ćemo pisati nekom drugom zgodom!

Napomena: Objavit ćemo imena onih Matkača koji nam pošalju svoja rješenja zadataka iz ovog članka i nagraditi ih (Uredništvo).

