ELEMENTARNO RJEŠAVANJE NEKIH PROBLEMA O EKSTREMIMA (3)

Vladimir Devidé, Zagreb

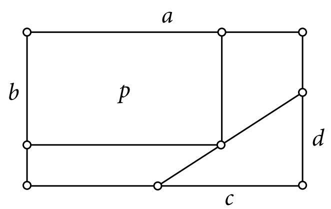
Nastavak iz Matke 70.

Elementarno rješavanje nekih problema o ekstremima vrlo je prikladan materijal za uvježbavanje zajedničkog rada geometrijskog zora i rutinsko-algebarskih računa, spretnih konstrukcija i egzaktnih dedukcija, mašte i logike. Pri čitanju teksta koji slijedi čitateljima preporučujem samostalno rješavanje postavljenih zadataka i, tek naknadno, bez obzira na rezultat tog pokušaja, proučavanje u tekstu danog rješenja.

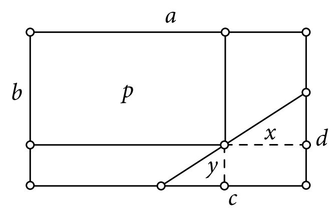
Zadatak 9. Od pravokutne ploče sa stranicama duljine a i b odlomljen je dio oblika pravokutnog trokuta s katetama duljine c i d (sl. 18.). Iz preostalog dijela treba izrezati novu pravokutnu ploču tako da njezina površina p bude što je moguće veća. Zadatak riješite posebno ako je:

a) $a = 6$, $b = 3$, $c = 2$, $d = 1$;

b) $a = 3$, $b = 6$, $c = 2$, $d = 1$.



Slika 18.



Slika 19.

Rješenje: Uz oznake kao na slici 19. vrijedi da je $p = (b - y)\,(a - x)$. Budući da je $y : d = (c - x) : c$, slijedi da je $y = d - \frac{d}{c}x$. Uvrštavanjem dobivamo da je $p = \left(b - d + \frac{d}{c}x\right)(a - x)$, odnosno

$$p = ab - ad + \frac{1}{4cd}(ad + cd - bc)^2 - \frac{d}{c}\left[x - \frac{1}{2d}(ad + cd - bc)\right]^2,$$

što je lako provjeriti. Posljednji član u uglatoj zagradi ne može biti negativan, pa je cijela desna strana najveća u slučaju kad je taj član jednak nuli, tj. ako je $x = \frac{1}{2d}(ad + cd - bc)$. Nakon provedenog računanja dobivamo da je najveća moguća površina $p = \frac{1}{4cd}(ad + cd - bc)^2$.

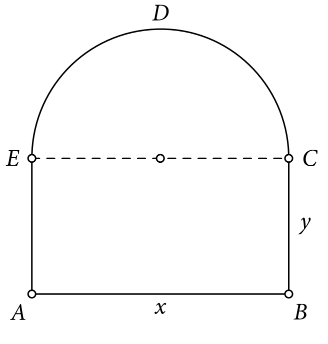
Međutim, taj će rezultat biti rješenje zadatka samo uz uvjet da je $0 \le x = \frac{1}{2}\left(a + c - \frac{bc}{d}\right) \le c$, tj. nakon množenja s $\frac{2}{c}$, uz uvjet da je $0 \le \frac{a}{c} + 1 - \frac{b}{d} \le 2$. Taj uvjet možemo napisati i u obliku $\frac{b}{d} - 1 \le \frac{a}{c} \le \frac{b}{d} + 1$. No, ako taj uvjet nije ispunjen, za rješenje zadatka bit će „mjerodavan" *rubni* ekstrem jer će površina p u području $0 \le x \le c$ ili neprestano opadati ili neprestano rasti. Zato će površina biti najveća ili za $x = 0$ ili za $x = c$, ovisno o tome je li $a(b - d)$ veće ili manje od $b(a - c)$, tj. je li ad manje ili veće od bc. (Uočite da slučaj $ad = bc$ sada nije moguć jer bi u tom slučaju bio ispunjen uvjet $0 \le x \le c$.)

Posebno imamo sljedeće rezultate:

a) $x = \frac{1}{2 \cdot 1}(6 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2) = 1\,(< c = 2)$, $p_{max} = \frac{25}{2}$.

b) Ovdje je $\frac{3}{2} = \frac{a}{c} < \frac{b}{d} - 1 = 5$, pa zbog $3 = ad < bc = 12$ nastupa rubni maksimum za $x = 0$, pri čemu je $p_{max} = 15$.

Zadatak 10. Treba izgraditi kanal poprečnog presjeka prikazanog na slici 20. Zadana je površina p presjeka kanala. Kakav treba biti oblik kanala, tj. koliki treba biti promjer $2R = x$ polukruga CDE, a kolika visina y pravokutnika $ABCE$ da bi troškovi gradnje (koji su proporcionalni s opsegom presjeka kanala) bili što manji?



Slika 20.

Rješenje: Opseg presjeka kanala je $s = x + 2y + \frac{1}{2}x\pi$. Budući da je $p = xy + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2\pi$ zadano, slijedi da je $y = \frac{1}{x}\left(p - \frac{x^2\pi}{8}\right)$, pa vrijedi:

$$s = x + \frac{2}{x}\left(p - \frac{x^2\pi}{8}\right) + \frac{1}{2}x\pi = \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)x + \frac{2p}{x}. \qquad \textbf{(1)}$$

Prema tome, opseg s je funkcija oblika $s = ax + \frac{b}{x}$, gdje su a i b pozitivni konstantni brojevi. Izraz za s možemo pisati u obliku

$$s = \frac{ax^2 + b}{x} = \frac{\left(x\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 + 2x\sqrt{ab}}{x}, \text{ tj.}$$

$$s = \frac{\left(x\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2}{x} + 2\sqrt{ab}\,. \qquad \textbf{(2)}$$

Budući da vrijednost broja x u našem slučaju mora biti pozitivna, prvi član posljednjeg izraza bit će uvijek pozitivan (ili u krajnjem slučaju jednak nuli), dok je drugi konstantan. Prema tome, opseg s će biti najmanji ako je $\left(x\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = 0$, tj. ako je $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$. Za tu je vrijednost $s_{\min} = 2\sqrt{ab}$.

Posebno, ako je (prema (1)) $a = 1 + \frac{\pi}{4}$ i $b = 2p$, opseg s bit će najmanji za $x = 2\sqrt{\frac{2p}{4+\pi}}$. Laki račun daje da je u tom slučaju $y = \sqrt{\frac{2p}{4+\pi}} = \frac{x}{2}$, pa je tada minimalni opseg jednak $s_{\min} = \sqrt{2(4+\pi)p}$.