

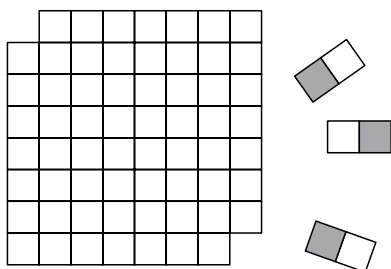
BOJENJE KARTI ILITI POUČAK O ČETIRI BOJE

Petar Mladinić, Zagreb

Moj djed volio je igrati šah. Uvijek mi je znao zadati neki zanimljiv zadatak povezan sa šahom. Tako mi je postavio sljedeći problem.

Problem. *Može li se šahovska ploča kojoj nedostaju dva dijagonalna polja pokriti pločicama domina?*

Sjećam se da sam odmah pogodio odgovor, a poslije sam dugo pokušavao (ali nikako nisam znao) obrazložiti zašto se to ne može učiniti! Sada znam:



Razmotrimo li „okrnjenu” ploču tako da odredimo broj bijelih i crnih polja, zaključit ćemo da ih nema jednaki broj. Naime, potpuna ploča ima 32 crna i 32 bijela polja. Okrnjena ploča ima ili 2 bijela ili 2 crna polja manje!

Za pokrivanje okrnjene ploče treba 31 domino pločica. Svaka domino pločica pokriva 1 bijelo i 1 crno polje. Okrnjena ploča nema 31 bijelo i 31 crno polje. Dakle, okrnjena šahovska ploča ne može se pokriti pločicama domina.



Vidimo da nam je bojenje pomoglo riješiti ovaj zadatak, pa se pozabavimo njime. Počnimo bojiti! Što? Zemljopisne karte!

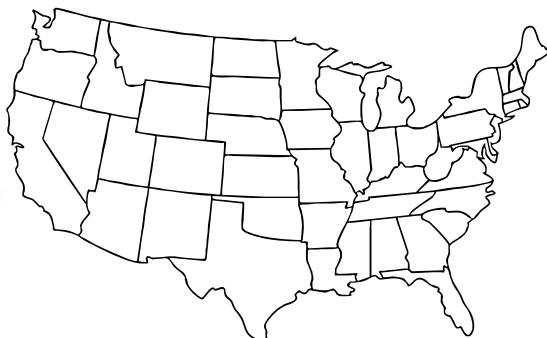
Pred vama je geografska karta dijela Europe (v. sl.).



Kartu treba obojiti tako da susjedne države budu različitih boja. Pokušajte to učiniti sa što manje boja. Koliko najmanje boja trebate za to?

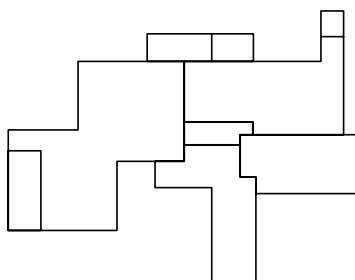
Lako možete utvrditi da je potrebno imati 4 različite boje!

Na ovoj karti nije bilo previše država, ali što ako ih je više? Kako obojiti županijsku kartu Hrvatske, a kako kartu SAD-a?

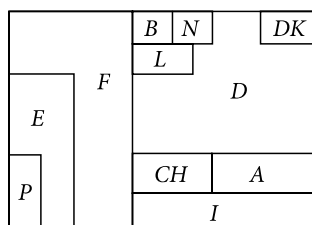
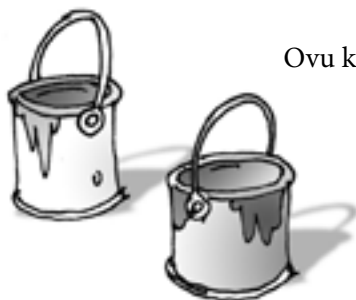


Je li vam uspjelo? Je li vam karta SAD-a dala ideju da se karte mogu prikazati i drukčije? Ako treba bojiti, onda je jedino važno da država ima iste susjede, a oblik joj možemo promijeniti.

Pa, promijenimo malo, za naše potrebe, kartu Europe.



Ovu kartu možemo, uporabom iste ideje, još malo preurediti (v. sl.).



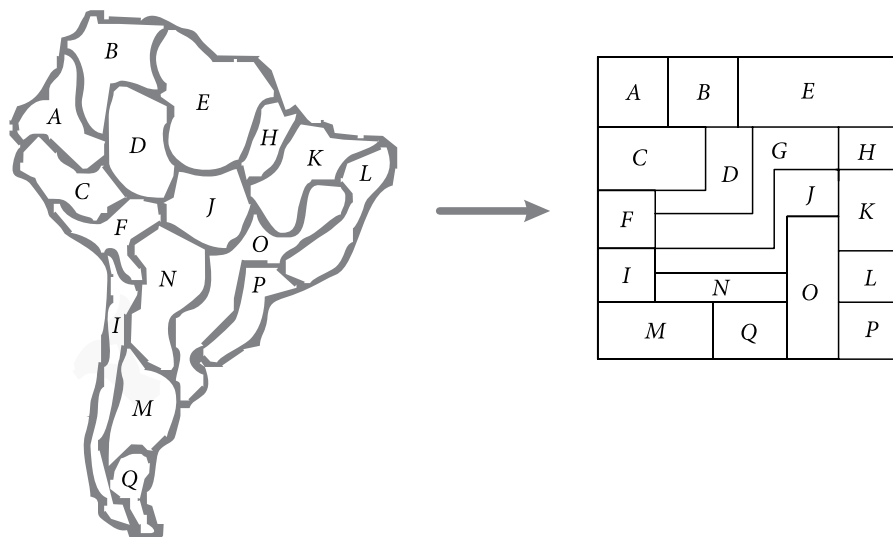
Je li se ovim promjenama promijenio i broj potrebnih boja?



Zadatak 1. Županijsku kartu Hrvatske preuredite na ovaj način!

Prije nego nastavimo, riješite i sljedeći zadatak.

Zadatak 2. Na slici su geografska karta Južne Amerike s „izmišljenim” državama i preuređena karta. Vide li se na preuređenoj karti isti susjedski odnosi država kao na geografskoj karti? Ako se ne vide, možete li to popraviti?



Vidimo da geografske karte možemo preurediti tako da oblik države bude neki mnogokut, a da pri tome ne promijenimo najmanji broj boja potrebnih za bojenje karte.

Razmotrimo koliki je taj najmanji broj potrebnih boja kojima je moguće obojiti bilo koju geografsku kartu. Jasno je da je najveći broj boja jednak broju država na karti. No, postoji li i koliki je najmanji broj boja?

„Osjećamo” da to nije neki veliki broj. Rješavanje zadataka učvršćuje nas u uvjerenju da je taj broj jednak 4.

Kako bismo, na neki način, shvatili što se događa u procesu bojenja karata, razmotrimo nekoliko posebnih karata.

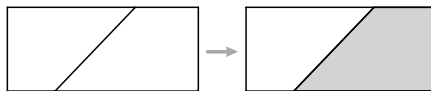
Neka je naša karta pravokutnik. Pravokutnik ćemo pravcima (ili dužinama od ruba do ruba) „dijeliti” na područja. Dobivat ćemo karte sa sve većim brojem područja/država (v. sl.).



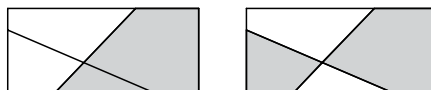
Koliko nam sad treba boja? Počnimo brojiti boje!



U prvom dijeljenju trebamo dvije boje (v. sl.). Dakle, sa svake strane dužine imamo jednu boju.



U drugom „dijeljenju” poštujemo uočeno pravilo bojenja i samo ga u novim područjima dosljedno primijenimo (v. sl.).



I opet nam trebaju samo dvije boje!

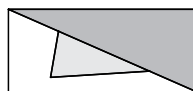
Nastavite ovaj proces bojenja. Riješite sljedeći zadatak.

Zadatak 3. Obojite sljedeće karte (v. sl.).

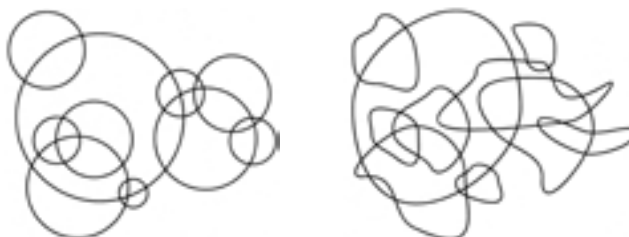


Koliki nam broj boja najmanje treba za obojiti ove karte?

Ovaj postupak dijeljenja i bojenja možemo nastaviti. Odgovor je uvijek isti: trebaju nam točno dvije boje! Dakle, neke karte koje izgledaju dosta komplicirano možemo obojiti sa samo dvije boje. Međutim, pogledajte ovu jednostavnu kartu sa samo tri područja. Nju nije moguće obojiti sa samo dvije boje!



Pogledajmo još neke posebne karte (v. sl.).

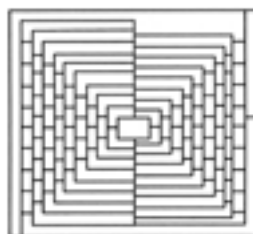


Obojite ih! Ovdje treba obojiti i vanjsko područje. Koliko najmanje treba boja?



Rješavajući sljedeći zadatak uvjerit ćete se da najmanji broj boja raste, tj. veći je od 2.

Zadatak 4. Obojite sljedeće karte (v. sl.). S koliko najmanje različitih boja to možete učiniti?



U povijesti matematike spominje se da je 1840. godine **August Ferdinand Möbius** (1790. - 1868.) prvi postavio problem bojenja karata.

Problem bojenja karata postavio je i student **Francis Guthrie** svojem profesoru **Augustu de Morganu** (1806. - 1871.). O tome je De Morgan pisao 1852. godine u pismu **Williamu Rowanu Hamiltonu** (1805. - 1865.).

Veliki broj konkretnih bojenja karata upućivao je na to da su za bojenje karata potrebne 4 boje. No, to je bilo teško dokazati!

Godine 1879. engleski pravnik i matematički amater **Alfred Kempe** objavio je rad u kojem je tvrdio da se svaka ravninska karta može obojiti s 4 boje.

Godine 1890. **Percy John Heawood** ukazao je na netočnost u Kempeovom dokazu.

Napori mnogih matematičara u dokazivanju *hipoteze četiriju boja* urodili su plodom tek 1976. godine. Te su godine **Kenneth Appel** i **Wolfgang Haken** riješili problem četiriju boja. Njihov je rad napisan na više od 100 stranica, s dodatkom od 700 stranica. Svaki od njih radio je oko 40 sati tjedno četiri godine istražujući problem, i uz 1000 sati rada pomoću računala. Njihov dokaz sadrži 10 000 dijagrama i računalni isprint koji je visok 1.2 metra.

Oni su prvi učinkovito uporabili računalo u dokazu jednog matematičkog poučka. Pomoću računala su provjeravali ogroman broj svih mogućih slučajeva karata i njihovih bojenja. Svojim su radom otvorili i veliku raspravu o uporabi tehnologije u matematici.

Napomena: Objavit ćemo imena onih Matkača koji nam pošalju svoja rješenja zadataka iz ovog članka i nagraditi ih (Uredništvo).

