Matka 18 (2009./2010.) br. 71

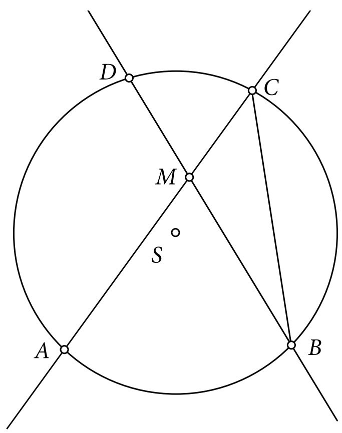
KUTOVI I KRUŽNICA

Vlado Stošić, Zagreb

Neke poučke kao što je poučak o obodnim kutovima kružnice ili pak poučak o obodnom i središnjem kutu kružnice - učenici uče na satima redovne nastave matematike u VII. razredu osnovne škole. Neki poučci imaju veliku primjenu, dok je primjena nekih poučaka rjeđa. Ipak, i takve poučke valja znati jer neke zadatke možemo riješiti jedino primjenom takvih poučaka.

Poučak 1. Kut s vrhom unutar kružnice jednak je polovini zbroja dvaju središnjih kutova, jednog koji je pridružen luku kružnice koji određuju kraci tog kuta, i drugog središnjeg kuta pridruženog luku kružnice koji određuju kraci njemu pridruženog vršnog kuta.

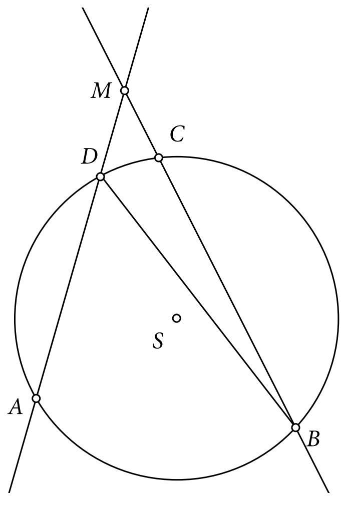
Dokaz. Neka je unutar kružnice točka M vrh kuta čiji kraci sijeku kružnicu u točkama A i B. Neka je točka C presjek pravca AM i promatrane kružnice, i neka je točka D presjek pravca BM i promatrane kružnice. Tada je kut $\angle CMD$ vršni kut promatranog kuta $\angle AMB$. Neka je točka S središte promatrane kružnice. Iz slike je očito da je kut $\angle AMB$ vanjski kut trokuta BCM, pa primjenom poučka o vanjskom kutu trokuta vrijedi jednakost $|\angle AMB| = |\angle ACB| + |\angle CBD|$. Obodni kut $\angle ACB$ jednak je polovini pridruženog središnjeg kuta $\angle ASB$, tj. $|\angle ACB| = \frac{1}{2}|\angle ASB|$, a obodni kut $\angle CBD$ jednak je polovini pridruženog središnjeg kuta $\angle CSD$, tj. $|\angle CBD| = \frac{1}{2}|\angle CSD|$. Ako dobivene vrijednosti za $\angle ACB$ i $\angle CBD$ zamijenimo u jednakost $|\angle AMB| = |\angle ACB + |\angle CBD|$, dobivamo jednakost $|\angle AMB| = \frac{1}{2}|\angle ASB| + \frac{1}{2}|\angle CSD|$, tj. $|\angle AMB| = \frac{1}{2}\left(|\angle ASB| + |\angle CSD|\right)$, a to je i trebalo dokazati.



Slika 1.

Poučak 2. Kut s vrhom izvan kružnice, pri čemu svaki krak kuta siječe kružnicu u dvije točke, jednak je polovini razlike dvaju središnjih kutova koji su pridruženi lukovima kružnice koji određuju kraci tog kuta s kružnicom.

Dokaz. Neka je izvan kružnice točka M vrh kuta čiji kraci sijeku kružnicu u točkama A i D, odnosno u točkama B i C (vidi sliku 2.). Neka je točka S središte promatrane kružnice. Iz slike je očito da je kut $\angle ADB$ vanjski kut trokuta BMD, pa prema poučku o vanjskom kutu trokuta vrijedi jednakost $|\angle ADB| + |\angle MBD| + |\angle AMB|$, tj. $|\angle AMB| = |\angle ADB| - |\angle MBD|$. Kut $\angle ADB$ jednak je polovini pridruženog središnjeg kuta $\angle ASB$, tj. $|\angle ADB| = \frac{1}{2}|\angle ASB|$, a kut $\angle MBD$ jednak je polovini pridruženog središnjeg kuta $\angle CSD$, tj. $|\angle MBD| = \frac{1}{2}|\angle CSD|$. Ako dobivene vrijednosti za $\angle ADB$ i $\angle MBD$ zamijenimo u jednakost $|\angle AMB| = |\angle ADB| - |\angle MBD|$, dobivamo jednakost $|\angle AMB| = \frac{1}{2}|\angle ASB| - \frac{1}{2}|\angle CSD|$, tj. $|\angle AMB| = \frac{1}{2}\left(|\angle ASB| - |\angle CSD|\right)$, a to je i trebalo dokazati.



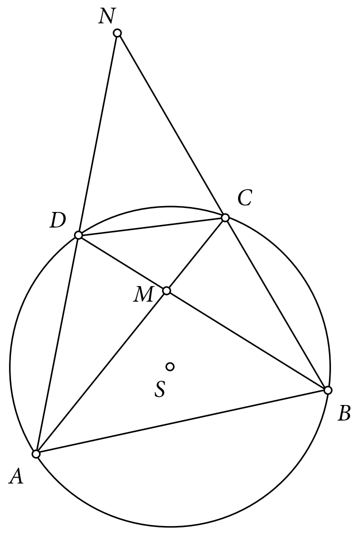
Slika 2.

Zadatak 1. Dan je konveksni četverokut $ABCD$ kojemu se može opisati kružnica. Dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ sijeku se u točki M, a pravci AD i BC sijeku se u točki N, tako da je $|\angle AMB| = 108°$, a $|\angle ANB| = 24°$. Kolike su veličine kutova ADB i CBD?

Rješenje. 1. način. Neka je točka S središte kružnice opisane četverokutu $ABCD$. Neka je $|\angle ADB| = x$ i $|\angle CBD| = y$. Primjenom 1. i 2. poučka vrijede ove dvije jednakosti: $|\angle AMB| = \frac{1}{2}|\angle ASB| + \frac{1}{2}|\angle CSD|$, odnosno $|\angle ANB| = \frac{1}{2}|\angle ASB| - \frac{1}{2}|\angle CSD|$.

Zbog toga što je $\frac{1}{2}|\angle ASB| = |\angle ADB| = x$ i zbog $\frac{1}{2}|\angle CSD| = |\angle CBD| = y$, nakon zamjene u navedene dvije jednakosti dobivamo ove dvije jednadžbe: $108 = x + y$, odnosno $24 = x - y$. Rješenje sustava jednadžbi $\begin{cases} x + y = 108 \\ x - y = 24 \end{cases}$ je $x = 66$, $y = 42$. Prema tome je $|\angle ADB| = 66°$, a $|\angle CBD| = 42°$.

2. način. Neka je $|\angle ADB| = x$ i $|\angle CBD| = y$. Tada je $|\angle ADB| = |\angle ACB| = x$, jer su to dva obodna kuta nad tetivom $\overline{AB}$. Kut $\angle AMB$ je vanjski kut trokuta BCM, pa prema poučku o vanjskom kutu trokuta vrijedi jednakost $|\angle AMB| = |\angle MCB| + |\angle CBM|$, ili $|\angle AMB| = |\angle ACB| + |\angle CBD|$, odnosno $108 = x + y$. Kut $\angle ADB$ je vanjski kut trokuta BDN, pa prema poučku o vanjskom kutu trokuta vrijedi jednakost $|\angle ADB| = |\angle DNB| + |\angle NBD|$, ili $|\angle ADB| = |\angle ANB| + |\angle CBD|$, odnosno $x = 24 + y$. Rješenje sustava jednadžbi $\begin{cases} x + y = 108 \\ x = 24 + y \end{cases}$ je $x = 66$, $y = 42$. Prema tome je $|\angle ADB| = 66°$, a $|\angle CBD| = 42°$.

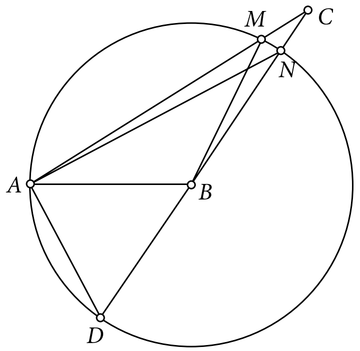


Slika 3.

Zadatak 2. Dan je trokut ABC kojemu je $|\angle BAC| = 32°$ i $|\angle ACB| = 24°$. Kružnica sa središtem u vrhu B polumjera $\overline{AB}$ siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki M, a stranicu $\overline{BC}$ u točki N. Kolika je veličina kuta MAN?

Rješenje. Neka je točka D presjek pravca CB i kružnice sa središtem u vrhu B polumjera $\overline{AB}$. Tada je kut $\angle ABD$ središnji kut kružnice pridružen tetivi $\overline{AD}$. Osim toga, kut $\angle ADB$ je vanjski kut trokuta ABC, pa prema poučku o vanjskom kutu trokuta vrijedi jednakost $|\angle ABD| = 32° + 24° = 56°$.

Primjenom 2. poučka vrijedi jednakost $|\angle ACB| = \frac{1}{2}|\angle ABD| - \frac{1}{2}|\angle MBN|$, ili dalje redom: $24 = 28 - \frac{1}{2}|\angle MBN|$, $\frac{1}{2}|\angle MBN| = 28 - 24$, tj. $\frac{1}{2}|\angle MBN| = 4°$. Budući da je kut $\angle MBN$ središnji kut kružnice sa središtem u vrhu B polumjera $\overline{AB}$ pridružen tetivi $\overline{MN}$, a njemu pridružen obodni kut nad istom tetivom je $\angle MAN$, nužno slijedi da je $\frac{1}{2}|\angle MBN| = |\angle MAN|$, a to znači da je $|\angle MAN| = 4°$.



Slika 4.

Zadatci

3. Dana je kružnica sa središtem u točki S. Iz točke A izvan kružnice nacrtan je polupravac AS koji siječe danu kružnicu u točki D i M, pri čemu je točka D bliže točki A. Na kružnici je odabrana točka B, tako da je $|BA| = |BS|$. Pravac AB siječe danu kružnicu u točki C. Točka N je presjek tetive $\overline{BM}$ i tetive $\overline{CD}$. Dokažite da je:

a) $|\angle CAM| = \frac{1}{3}|\angle CSM|$,

b) $|\angle CAM| + |\angle CNM| = |\angle CSM|$.

4. Dijagonale četverokuta $ABCD$ kojemu se može opisati kružnica sijeku se u točki M. Kolika je veličina kuta ACD ako je $|\angle ABC| = 72°$, $|\angle BCD| = 102°$ i $|\angle AMD| = 110°$?

5. Dan je konveksni četverokut $ABCD$ kojemu su $|\angle BAC| = 70°$, $|\angle BCA| = 35°$, $|\angle BDC| = 40°$ i $|\angle BDA| = 70°$. Koliki kut zatvaraju dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ četverokuta $ABCD$?

6. Na kružnici su redom istaknute točke A, B, C, D. Točka M je polovište luka $\widehat{AB}$, točka E je presjek tetive $\overline{CM}$ i tetive $\overline{AB}$, a točka K je presjek tetive $\overline{DM}$ i tetive $\overline{AB}$. Dokaži da točke K, E, C i D pripadaju toj kružnici.