ELEMENTARNO RJEŠAVANJE NEKIH PROBLEMA O EKSTREMIMA (2)

Nastavak iz Matke 69.

Vladimir Devidé, Zagreb

Elementarno rješavanje nekih problema o ekstremima vrlo je prikladan materijal za uvježbavanje zajedničkog rada geometrijskog zora i rutinsko-algebarskih računa, spretnih konstrukcija i egzaktnih dedukcija, mašte i logike. Pri čitanju teksta koji slijedi čitateljima preporučujem samostalno rješavanje postavljenih zadataka i, tek naknadno, bez obzira na rezultat tog pokušaja, proučavanje u tekstu danog rješenja.

Zadatak 5. Dokažite:

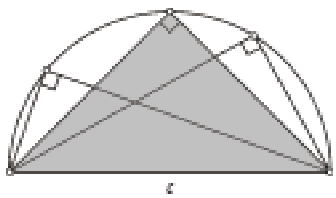
a) Od svih pravokutnih trokuta zadane duljine hipotenuze c najveću površinu ima jednakokračni pravokutni trokut.

b) Od svih pravokutnika upisanih danoj kružnici polumjera duljine r najveću površinu ima kvadrat.

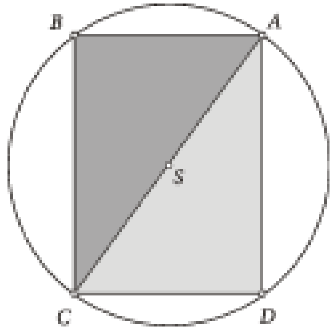
c) Od svih pravokutnika upisanih danoj elipsi s poluosima duljine a i b ($a > b$) najveću površinu ima onaj sa stranicama duljine $a\sqrt{2}$ i $b\sqrt{2}$.

Rješenje:

a) Prema Talesovu poučku, vrhovi svih pravokutnih trokuta zadane duljine hipotenuze c pripadaju polukružnici promjera duljine c (sl. 10.). Budući da je hipotenuza svim trokutima zajednička stranica, najveću će površinu imati onaj trokut koji ima najdulju visinu na tu stranicu. Najveću površinu imat će, dakle, onaj trokut kojemu je vrh u najvišoj točki polukružnice, a to je jednakokračni pravokutni trokut. Njegova je površina jednaka $p = \frac{1}{4}c^2$.



Slika 10.



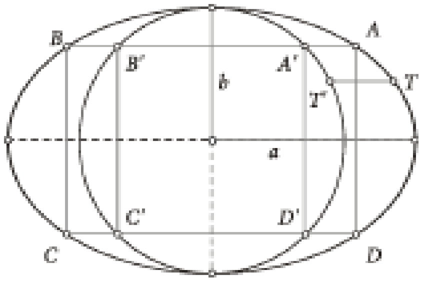
Slika 11.

b) Promotrimo li sl. 11., uočit ćemo da je površina p pravokutnika $ABCD$ dvostruko veća od površine pravokutnog trokuta ABC s hipotenuzom duljine

$2r$. Dakle, površina pravokutnika bit će najveća u slučaju kada trokut ABC ima najveću površinu. U a) smo vidjeli da će se to dogoditi u slučaju da je $|AB| = |BC|$, tj. ako je pravokutnik $ABCD$ kvadrat. Površina će mu biti $p = 2r^2$.

c) Stranice elipsi upisanog pravokutnika bit će usporedne s osima elipse (sl. 12.).

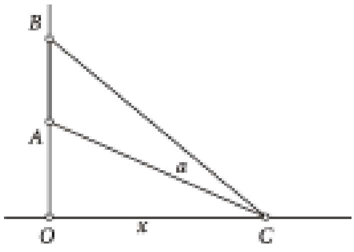
Smanjimo li udaljenost svake točke T elipse od male osi (duljine $2b$) u omjeru $b : a$, točka T preslikat će se u točku T', a cijela elipsa u kružnicu s polumjerom duljine b. Elipsi upisani pravokutnik $ABCD$ prijeći će u kružnici upisan pravokutnik $A'B'C'D'$ iste visine, a osnovice će biti smanjene u omjeru $b : a$.



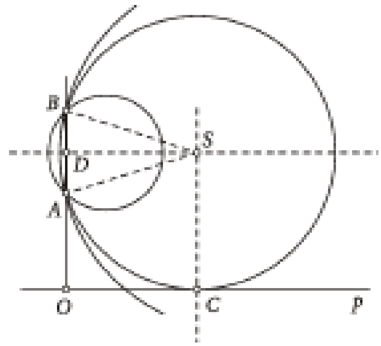
Slika 12.

Ako je površina pravokutnika $ABCD$ jednaka p, površina pravokutnika $A'B'C'D'$ bit će $p' = \frac{b}{a}p$. Budući da je faktor $\frac{b}{a}$ konstantan, površina p bit će najveća kada je najveća površina p'. No, prema b) znamo da tada mora biti $|A'B'| = |B'C'| = b\sqrt{2}$. Tada će za traženi elipsi upisani pravokutnik vrijediti $\frac{b}{a}|AB| = b\sqrt{2}$ ili $|AB| = a\sqrt{2}$, dok je $|BC| = |B'C'| = b\sqrt{2}$. Površina će tada biti $p = 2ab$.

Zadatak 6. Na zidu je obješena slika $\overline{AB}$ (sl. 13.). Iz koje se udaljenosti x od točke O slika vidi najbolje? (To će biti onaj položaj točke C za koji je vidni kut $\alpha = |\angle ACB|$ maksimalan.)



Slika 13.



Slika 14.

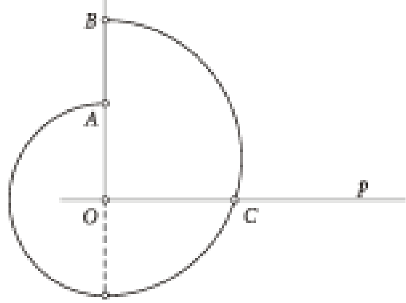
Rješenje: Kroz točke A i B položimo pramen kružnica (sl. 14.). Vidni kut pod kojim se $\overline{AB}$ vidi iz neke točke ravnine jednak je za sve točke koje pripadaju istoj od tih kružnica (obodni kut nad danim lukom!). Taj će kut biti to *veći* što je polumjer kružnice *manji*. Nas, međutim, zanimaju samo točke koje se nalaze na pravcu p. Rješenje će, dakle, biti ona točka C pravca p koja se ujedno nalazi na kružnici kroz točke A i B, a koja ima najmanji mogući polumjer. To je kružnica koja upravo dodiruje pravac p. Diralište C je tražena točka, a $x = |OC|$ tražena udaljenost.

Označimo li $|OA| = a$ i $|OB| = b$, tada je:

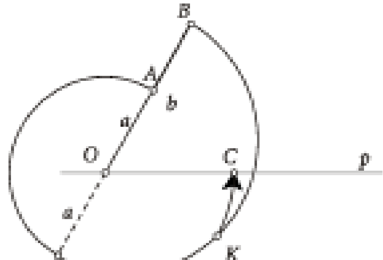
$$x = |OC| = |DS| =$$

$$\sqrt{|AS|^2 - |DA|^2} = \sqrt{|SC|^2 - |DA|^2} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}\,.$$

Do te relacije brže i jednostavnije dolazimo ako poznajemo svojstvo da je umnožak $|OM| \cdot |ON|$ za danu točku O i danu kružnicu k neovisan o tome kojim pravcem kroz točku O siječemo kružnicu k u točkama M i N. Odatle odmah slijedi da je $ab = x^2$. Tražena je udaljenost, dakle, geometrijska sredina udaljenosti gornjeg i donjeg ruba slike iznad razine oka gledatelja. Geometrijski, dakle, točku C dobivamo kao na sl. 15. ($|A'O| = |OA|$, BCA' je polukružnica).



Slika 15.



Slika 16.

Slična geometrijska konstrukcija točke C vrijedi i u općenitijem slučaju, kada kut AOC nije pravi (sl. 16.). Tada je, prema već spomenutom svojstvu, opet $ab = x^2$.

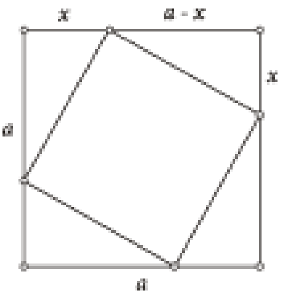
Zadatak 7. Dužinu zadane duljine d rastavite na dva dijela, duljine a i b, tako da umnožak $a \cdot b$ bude što veći.

Rješenje: Označimo li dio dužine čija je duljina a s x, preostali će dio b biti duljine $d - x$. Tada će umnožak $a \cdot b$ biti jednak $x(d - x) = xd - x^2 = \frac{1}{4}d^2 - \left(x - \frac{1}{2}d\right)^2$. To će, očito, biti najveće ako je drugi član (koji je kvadrat, pa ne može biti negativan) jednak nuli, tj. ako je $x = \frac{1}{2}d$.

Rješenje zadatka je dano s $a = b = \frac{1}{2}d$. To geometrijski znači da od svih pravokutnika zadanog opsega $2d = 2(a + b)$ najveću površinu ima kvadrat.

Zadatak 8. Zadanom kvadratu sa stranicom duljine a upišite kvadrat što manje površine.

Rješenje: Označimo s x udaljenost vrhova traženog kvadrata od najbližih vrhova zadanog kvadrata (sl. 17.).



Slika 17.

Tada će površina upisanog kvadrata biti jednaka:

$$p = a^2 - 4 \cdot \frac{1}{2}x(a - x) = a^2 - 2ax + 2x^2 = \frac{a^2}{2} + 2\left(\frac{a}{2} - x\right)^2.$$

Površina p bit će najmanja ako drugi član (koji ne može biti negativan) bude jednak nuli, tj. ako je $x = \frac{a}{2}$. Površina upisanog kvadrata u tom će slučaju biti jednaka polovini površine zadanog kvadrata, a u svim ostalim slučajevima bit će veća.