STARE I NOVE MOZGALICE

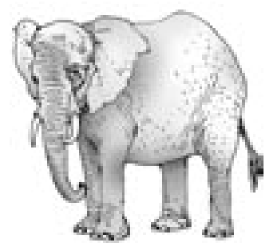
Petar Mladinić, Zagreb

Nastavak iz Matke 69.

Razrezivanje kvadrata (2)

c) Arhimedov *loculus* ili *syntemachion*

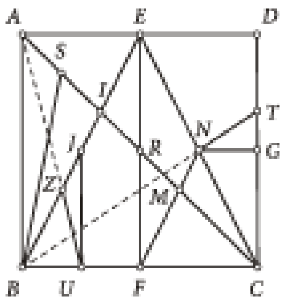
U knjizi **Émilea Fourreya** *Curiosités Géométriques* (*Geometrijske zanimljivosti*), koja je objavljena 1907. godine u Parizu, našao sam tekst o *Arhimedovu loculusu* ili *syntemachionu*. Moju je pozornost također privukao članak *In Archimedes' Puzzle, a New Eureka Moment*, koji je 14. prosinca 2003. godine u časopisu *New York Times* objavila novinarka **Gina Kalota**. Taj je članak pobudio veliko zanimanje u svijetu. U njemu se opisuju tadašnja istraživanja jednog starog matematičkog rukopisa koje je proveo niz američkih povjesničara matematike. Pogleda li se bolje navedeni članak, uočava se da su američki istraživači otkrili ono što su europski dokučili prije više od stotinu godina, tj. otkrili su *Arhimedov syntemachion*.

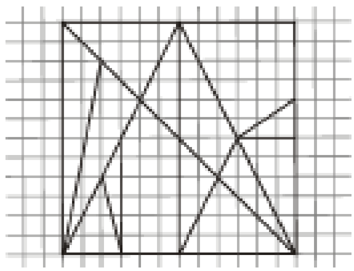


Najstariji pisani tekst o *Arhimedovu loculusu* je iz 4. stoljeća. Rimski pjesnik **Auson** (310. – 395.) prvi ga je opisao u svojoj knjizi *Liber XVII Cento nuptalis*. On u svojemu rukopisu ima od 14 dijelova *loculusa* složenu sliku slona (v. sl.).

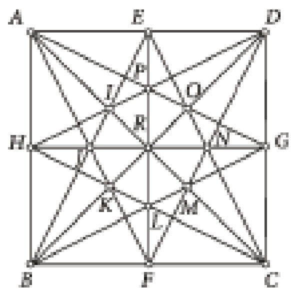
Tek u kasnijim arapskim tekstovima nalaze se konstrukcije *loculusa* i površine njegovih dijelova. Površine dijelova određene su u odnosu na površinu kvadrata.

Što je *Arhimedov loculus*? To je skup od 14 likova/mnogokuta koji nastaju rezanjem kvadrata (v. sl.)





Lako se uočava da se, uz neke nadopune, *Arhimedov loculus* može izrezati iz sljedeće mreže:



Odredimo površine nekih dijelova *loculusa* i njihove omjere s površinom kvadrata. (Ostale površine i omjere izračunajte za vježbu!)

Površine ćemo izračunati pomoću *Pickove formule*. Austro-ugarski matematičar **Georg Pick** je 1899. godine objavio članak u kojemu je dao formulu za određivanje površine mnogokuta čiji su vrhovi u čvorovima kvadratne koordinatne mreže. Formula je vrlo jednostavna i pomoću nje se vrlo lako izračunava površina mnogokuta.

Potrebno je prebrojiti čvorove na rubu mnogokuta (na stranicama i vrhovima), kao i unutarnje čvorove. Formula ima oblik

$$p = u + \frac{1}{2} r - 1,$$

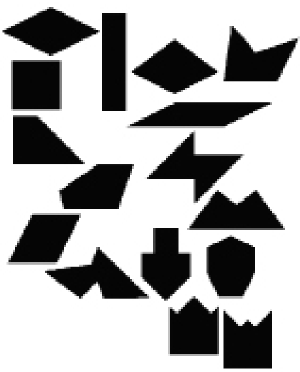
pri čemu je *u* broj čvorova unutar, a *r* broj čvorova na rubu mnogokuta.

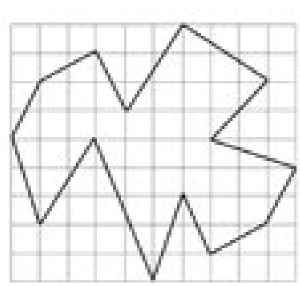
Promotrimo (na slici u kvadratnoj mreži) trokut *NGT*. On ima 6 čvorova na rubu i 1 unutarnji čvor. Dakle, njegova je površina jednaka $p = 1 + \frac{1}{2} \cdot 6 - 1 = 3$. Omjer površine trokuta *NGT* i površine kvadrata *ABCD* jednak je $\frac{p(NGT)}{p(ABCD)} = \frac{3}{144} = \frac{1}{48}$.

Odredimo i površinu trokuta *MNC*. Taj trokut ima 8 rubnih i 3 unutarnja čvora, pa je njegova površina jednaka $p = 3 + \frac{1}{2} \cdot 8 - 1 = 6$, a omjer površine trokuta *MNC* i površine kvadrata *ABCD* jednak je $\frac{1}{24}$. Dakle, trokut *MNC* je 24. dio cijelog kvadrata.

Izračunate li sve površine i omjere, dobit ćete da dva mnogokuta imaju omjer 1 : 48, četiri omjer 1 : 24, jedan omjer 1 : 16, pet omjer 1 : 12, jedan omjer 7 : 48 i jedan omjer 1 : 6.

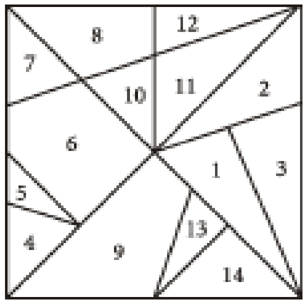
Arhimedov loculus može poslužiti za sljedeće dvije mozgalice. Složite/ popločajte na slici prikazane zadane mnogokute i plesače:





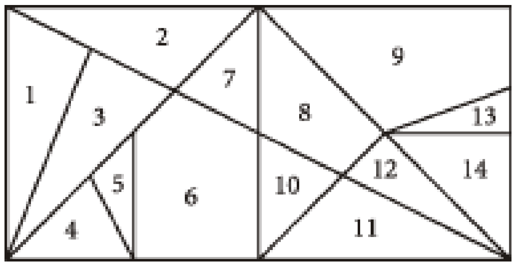
d) Novi *loculusi*

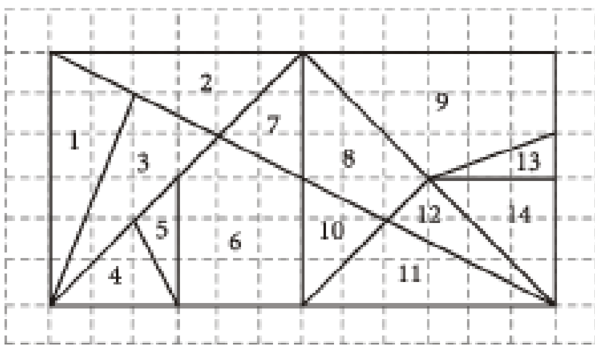
Arhimedov loculus je rastav kvadrata na 14 dijelova. No, kvadrat se na 14 dijelova može rastaviti i na drugi način, kao što je prikazano na slici:



Odredite površine ovih mnogokuta i njihove omjere s površinom kvadrata. Koji mnogokuti imaju međusobno jednake površine? Možete li popločati neke od starih likova, tj. riješiti neke prije zadane mozgalice?

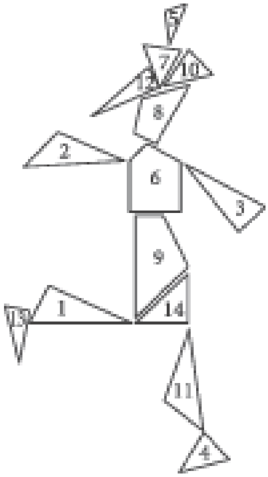
Spojimo li dva sukladna kvadrata, dobit ćemo pravokutnik. Načinimo li razdiobu kao u *Arhimedovu loculusu*, dobit ćemo 14 novih pločica (vidi slike).





Odredite površine ovih mnogokuta i njihove omjere s površinom pravokutnika. Koji mnogokuti imaju međusobno jednake površine?

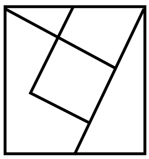
Složite li pločice kao što je prikazano na slici, dobit ćete plesača:



Nove podjele na 14 dijelova i slaganje različitih zadanih likova daju veliki broj novih i zanimljivih mozgalica.

e) *Loculusi* Sama Loyda i Henryja Dudeneya

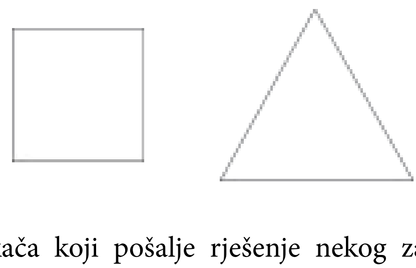
Na kraju ovoga prikaza razrezivanja kvadrata i zadavanja mozgalica spomenimo i dva velikana zabavne matematike. **Sam Loyd** (1841. - 1911.) jedan je od njih. O njemu smo više pisali u Matki broj 12. On je kvadrat razrezao na 5 dijelova, kao na slici:

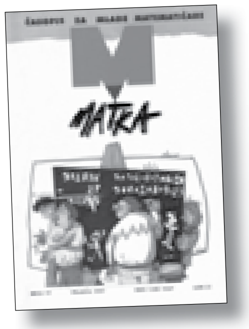


Pomoću tih 5 dijelova treba popločati/složiti sljedeće likove (v. sl.).

Drugi velikan je **Henry Dudeney** (1857. – 1930.). O njemu smo više pisali u Matki broj 19. On je kvadrat razrezao na 4 dijela. Prvi je zadao i riješio sljedeći problem:

Kvadrat treba podijeliti na 4 dijela i od tih dijelova složiti jednakostranični trokut.





Nagradit ćemo svakog Matkača koji pošalje rješenje nekog zadatka, problema ili mozgalice zadane u ovome članku, a njegova rješenja ćemo objaviti. Posebno ćemo nagraditi Matkače koji nam pošalju najviše rješenja!