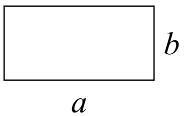
Matka 18 (2009./2010.) br. 69

OPSEG I POVRŠINA SU „JEDNAKI”

Željko Brčić, Vinkovci

Kvadrat sa stranicom duljine 4 cm ima opseg 16 cm, a površinu 16 cm^2. Zbog različitih mjernih jedinica pogrešno bi bilo reći da su im opseg i površina jednaki (kao što primjerice 16 sekundi nije jednako 16 kilograma), no za potrebe ovoga članka zanemarit ćemo mjerne jedinice i promatrati samo brojčane vrijednosti opsega i površine. Lako se vidi da je kvadrat sa stranicom 4 jedini kvadrat s takvim svojstvom. Naime, iz $p = o$ imamo $a^2 = 4a$, pa dijeljenjem pozitivnim brojem a dobijemo $a = 4$, i to je jedino rješenje početne jednadžbe.

Pitanje je: postoji li pravokutnik kojemu su opseg i površina „jednaki”?



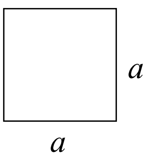
Uvjet $p = o$ dat će nam jednadžbu: $ab = 2a + 2b$. Ovakva jednadžba, s dvije nepoznanice, općenito ima beskonačno mnogo rješenja, no ako se ograničimo na cjelobrojna rješenja (ili u našem slučaju samo na prirodne brojeve), broj rješenja je – konačan.

Najprije izrazimo jednu od nepoznanica, recimo b:

$$ab - 2b = 2a,\ b \cdot (a - 2) = 2a,\ b = \frac{2a}{a-2}$$

Transformirajmo dobiveni izraz na sljedeći način:

$$b = \frac{2a-4+4}{a-2} = \frac{2\cdot(a-2)+4}{a-2} = \frac{2\cdot(a-2)}{a-2} + \frac{4}{a-2} = 2 + \frac{4}{a-2}.$$



Očito će b biti cijeli broj samo ako je izraz $a - 2$ djeljitelj broja 4, dakle: 4, 2, 1, –1, –2 ili –4, odnosno ako je a = 6, 4, 3, 1, 0 ili –2. Tada je b = 3, 4, 6, –2, 0 ili 1.

Uzmemo li u obzir da duljine stranica moraju biti pozitivni brojevi, prvo rješenje je $a = 6$ i $b = 3$, drugo $a = b = 4$, te treće $a = 3$ i $b = 6$. No, prvi i treći par predstavljaju isti pravokutnik (sa zamijenjenim rasporedom stranica), dok je drugo rješenje pravokutnik sa sve četiri jednake stranice, dakle - ranije spomenuti kvadrat sa stranicom duljine 4.

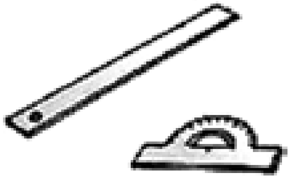
Pokazano je da, uz kvadrat sa stranicom duljine 4, postoji još samo jedan pravokutnik s cjelobrojnim duljinama stranica, čiji opseg i površina imaju iste iznose. To je pravokutnik sa stranicama dugim 6 i 3. Provjerimo:

$$p = 6 \cdot 3 = 18 \qquad o = 2 \cdot (6 + 3) = 2 \cdot 9 = 18.$$

Zapitajmo se još: postoji li i pravokutni trokut s cjelobrojnim duljinama stranica kojemu su iznosi opsega i površine jednaki? Ako postoji, koliko ima takvih trokuta i koliko su im duge stranice?

Iz jednakosti $p = o$ slijedi $\frac{a \cdot b}{2} = a + b + c.$

Izrazimo hipotenuzu pomoću Pitagorinog poučka i napravimo nekoliko transformacija dobivene jednadžbe:



$$\frac{ab}{2} = a + b + \sqrt{a^2 + b^2} \quad /\cdot 2$$

$$ab - 2a - 2b = 2\sqrt{a^2 + b^2} \quad /^2$$

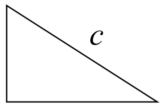
$$a^2b^2 - 4a^2b - 4ab^2 + 4a^2 + 8ab + 4b^2 = 4a^2 + 4b^2$$

$$a^2b^2 - 4a^2b - 4ab^2 + 8ab = 0 \quad /: ab$$

$$ab - 4a - 4b + 8 = 0$$

$$b \cdot (a - 4) = 4a - 8$$

$$b = \frac{4a - 8}{a - 4} = \frac{4a - 16 + 8}{a - 4} = \frac{4(a - 4) + 8}{a - 4} = 4 + \frac{8}{a - 4}\ .$$



Sličnim razmatranjem kao i ranije, dobit ćemo jedno rješenje $a = 12$ i $b = 5$, te drugo rješenje $a = 8$ i $b = 6$.

U prvom je slučaju $c = 13$, pa je $o = 12 + 5 + 13 = 30$ i $p = 12 \cdot 5 : 2 = 30$.

U drugom je slučaju $c = 10$, pa je $o = 8 + 6 + 10 = 24$ i $p = 8 \cdot 6 : 2 = 24$.

Primijetimo da u ovom slučaju nismo dobili rješenje koje ima jednaku vrijednost za a i b, odnosno ne postoji jednakokračni pravokutni trokut s cjelobrojnim stranicama kojemu su opseg i površina jednaki. To je sasvim očekivano jer uopće ne postoji jednakokračni pravokutni trokut kojemu su sve tri stranice cjelobrojne. Naime, za stranice takvog trokuta vrijedi formula $c = a\sqrt{2}$, pa duljina barem jedne stranice mora biti iracionalan broj.

Može se pokazati da će opseg i površina jednakokračnog pravokutnog trokuta biti „jednaki" ako je duljina kateta $a = 4 + 2\sqrt{2}$. Tada će hipotenuza biti $c = 4\sqrt{2} + 4$, a opseg i površina iznose $12 + 8\sqrt{2}$.