MATEMAGIČAR

UVIJEK ISTI KRAJ

Franka Miriam Brückler, Zagreb

Sobzirom na ljetnu vrućinu i sparinu, Dagobert se ovaj put odlučio za brzo izvediv trik, uz minimalnu količinu pokreta.

Kome nije vruće?

Javi se Željka: *Vruće? Pa meni je taman, ja bih čak da je malo toplije...*

Dobro, onda si ti idealna da danas sa mnom izvedeš trik. Ako ti nije vruće, valjda ti neće biti naporno malo zbrajanja. Ja ću okrenuti leđa ploči, a ti piši po njoj tako da svi vide.

Izađe Željka do ploče, a preznojeni Dagobert okrenu leđa i njoj i ploči.

Napiši bilo koji prirodan broj. Može biti velik.

Željka napiše: 32 585 794 201.

Jesi li? Sad prebroji koliko ima parnih znamenaka, a koliko neparnih. Zapiši ta dva broja ispod ovoga, ali jedan do drugog. Nula je paran broj.

Dakle, Željka sad napiše: 5 6, jer u 32 585 794 201 ima 5 parnih i 6 neparnih znamenaka.

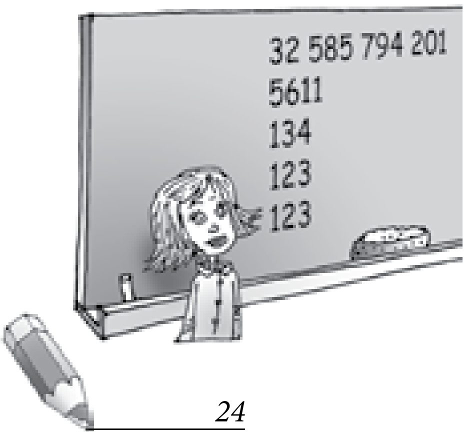
Zbroji ta dva broja koja si napisala, a zbroj napiši uz njih.

Sad je, dakle, na ploči:

32 585 794 201
5 6 11

Sada tri broja koja si napisala shvati skupa kao jedan broj i ponovi postupak: napiši koliko ima parnih znamenaka, koliko neparnih, i koliki je zbroj tih dvaju brojeva kao novi broj. Onda to ponovi sve dok dvaput zaredom ne dobiješ isti broj.

Budući da u broju 5611 ima 1 parna i 3 neparne znamenke, sljedeći broj koji Željka piše je 134. U 134 je 1 parna i 2 neparne znamenke, pa je sljedeći broj 123. U 123 je 1 parna i 2 neparne znamenke, pa sad dobijemo 123, tj. ponovio se zadnji rezultat. Dakle, u trenutku kad je ispisala



... Željka kaže da joj se ponovio rezultat, a Dagobert će:

Hmmm... zadnji broj koji si dobila je... 123!

I naravno, svi su iznenađeni! Nažalost, ne i rashlađeni.

U čemu je „štos”? Kao prvo, postupak će prije ili kasnije uvijek dati 123. Kad jednom dobiješ 123, onda imaš jednu parnu i dvije neparne znamenke, a 1 + 2 = 3, pa će se 123 ponavljati. Zanimljivo je dakle pitanje zašto uvijek dođemo do 123.

Ako broj na početku ima 3 znamenke; on može imati 0, 1, 2 ili 3 parne znamenke, a ostale su neparne. Stoga iz njega gornjim postupkom možemo dobiti samo brojeve 033, 123, 213, 303. U sva četiri slučaja imamo po 1 parnu i 2 neparne znamenke, tj. sljedeći broj je 123. Zaključujemo: onoga trenutka kad opisanim postupkom dobijemo troznamenkasti broj, u tom ili sljedećem koraku dobijemo 123 koji se počne ponavljati. Dakle, trebamo se uvjeriti da prethodnim postupkom prije ili kasnije dobijemo troznamenkasti broj.

S druge strane, ako početni broj ima bar 4 znamenke, sljedeći broj sigurno ima manje znamenaka nego on, tj. u svakom nam se koraku smanjuje broj znamenaka pa ćemo prije ili kasnije doći do troznamenkastog broja, a on – kako smo gore vidjeli – u tom ili sljedećem koraku daje 123.

Za one koji ne vjeruju da za brojeve s bar 4 znamenke svaki sljedeći broj ima manje znamenaka, slijedi dokaz za brojeve koji imaju do 99 znamenki. Ako broj koji trenutno gledamo ima m znamenaka, od kojih je p parno i n neparno, znači da iz njega konstruiramo broj pnm (jer je $p + n = m$). Ako je m manji od 10, onda su p, n i m jednoznamenkasti, pa je broj pnm troznamenkast. Dakle, iz svakog broja s manje od 10 znamenaka u sljedećem koraku dobivamo troznamenkasti broj. Primjerice, ako trenutni broj ima $m = 7$ znamenaka, brojevi parnih i neparnih znamenaka su jednoznamenkasti, tj. p, n i m imaju po 1 znamenku, dakle pnm ih ima 3.

Ako je m između 10 i 19, onda ne mogu oba p i n biti dvoznamenkasti, tj. bar jedan je jednoznamenkast, pa broj pnm ima 4 ili 5 znamenaka, dakle broj znamenaka se smanjio. Primjerice, za broj s $m = 12$ znamenaka može se dogoditi da je i parnih i neparnih znamenaka manje od 10 (recimo, 5 parnih i 7 neparnih), u slučaju čega oba p i n imaju po 1 znamenku, a m ih ima dvije, pa pnm ima ukupno 4 znamenke, ili pak jedne vrste znamenaka (recimo parnih) ima 10, 11 ili 12, a druge vrste onda 2, 1 ili 0, pa m i jedan od brojeva p i n imaju dvije znamenke, a treći broj u pnm ima jednu, tj. sveukupno broj pnm ima $2 + 2 + 1 = 5$ znamenaka.

Za brojeve s brojem znamenaka m od 20 do 99, brojevi p i n mogu biti (oba) dvoznamenkasti ili je jedan dvoznamenkast, a drugi jednoznamenkast, dok je m dvoznamenkast, pa broj pnm ima 5 ili 6 znamenaka, što je opet sigurno manje od m. Za brojeve s više od 99 znamenaka potpuni dokaz mogao bi se dobiti tehnikom koja se zove matematička indukcija.

Za one čitatelje koji znaju što znači broj zapisati u nekoj bazi koja nije baza 10, kao zanimljivost za kraj spomenimo i da postupak završava s 123 ako se opisani postupak provodi brojevima pisanim i zbrajanim u bilo kojoj bazi osim baza 2, 3 i 4.

Literatura:

Cut the Knot: Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles,
http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Arithmetic/ParityCounting.shtml