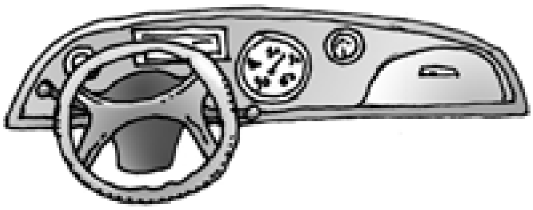
Matka 18 (2009./2010.) br. 69

ELEMENTARNO RJEŠAVANJE NEKIH PROBLEMA O EKSTREMIMA (1)

Vladimir Devidé, Zagreb

Osim problema određivanja tangente na neku krivulju (i tome odgovarajućeg kinematičkog problema određivanja brzine), te problema kvadrature (određivanja površine) nekog krivuljom omeđenog lika, problemi o ekstremima bili su jedan od najvažnijih poticaja za istraživanja koja su dovela do izgradnje infinitezimalnog računa. Takve probleme nisu nametala samo matematička i fizikalna ispitivanja, nego i tehnička praksa.

Infinitezimalni račun omogućio je razradu jedinstvene i vrlo općenite metode rješavanja problema o ekstremima. No, iako je elementarno rješavanje takvih problema često dugotrajnije i mučnije, iako ono za svaki slučaj zahtijeva drukčiju, upravo tom slučaju prilagođenu metodu, ipak elementarno rješenje nekog takvog problema u velikom broju slučajeva, upravo zbog jednostavnosti sredstava kojima se služi, ima određenu vrijednost. Time što traži elementarno tretiranje zadatka, ono se, s druge strane, može i najbolje prilagoditi prirodi problema i neposrednije riješiti, a sam postupak rješavanja često čini rezultat razumljivijim i prirodnijim nego u slučaju kad do njega dolazimo općenitijim metodama infinitezimalnog računa.



Takvo elementarno rješavanje nekih problema o ekstremima na taj je način vrlo prikladan materijal za uvježbavanje zajedničkog rada geometrijskog zora i rutinsko-algebarskih računa, spretnih konstrukcija i egzaktnih dedukcija, mašte i logike. Pri čitanju teksta koji slijedi čitateljima preporučujem samostalno rješavanje postavljenih zadataka i, tek naknadno, bez obzira na rezultat tog pokušaja, proučavanje u tekstu danog rješenja.

Zadatak 1. U svakom polju pravokutne tablice upisan je neki prirodan broj. U svakom pojedinom retku potražimo najveći broj, a neka m bude najmanji od tako dobivenih brojeva. U svakome stupcu također potražimo najmanji broj, a neka n bude najveći od tih brojeva. Ako su m i n različiti brojevi, koji je od njih veći?

Rješenje: Uočimo u tablici neke „predstavnike" M i N nađenih brojeva m i n. (Oni ne moraju biti uvijek jednoznačno određeni, jer među brojevima tablice može biti i jednakih.)

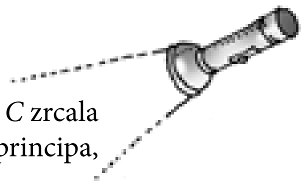
Razmotrit ćemo posebno tri mogućnosti:

1° M i N su u *istom retku* tablice. Budući da je m najveći od brojeva toga retka, bit će (uz uvjet da je $m \neq n$) $m > n$.

2° M i N su u *istom stupcu* tablice. Budući da je n najmanji od brojeva toga stupca, i sada će biti (uz uvjet da je $m \neq n$) $m > n$.

3° M i N su u *različitim retcima i stupcima* tablice. Tada postoji predstavnik P broja p koji je u istom retku s M i istom stupcu s N. Analogno kao u **1°** i **2°** slijedi da je sada $m \geq p$ i $p \geq n$, pa je, uz uvjet da je $m \neq n$, i sada $m > n$.

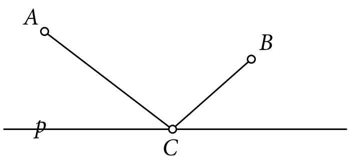
Znači, u svakom je slučaju $m > n$.



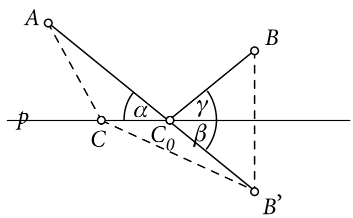
Zadatak 2. Zraka svjetlosti polazi iz točke A, reflektira se u točki C zrcala p i dolazi u točku B (sl. 1.). Izvedite zakon refleksije iz Fermatova principa, prema kojemu svjetlost prolazi onaj put kojim najbrže stiže do cilja.

Rješenje: Ako vrijeme potrebno svjetlosti za prijeći put $|AC| + |CB|$ treba biti što kraće, onda duljina puta $|AC| + |CB|$ (s obzirom da je brzina širenja svjetlosti konstantna) treba biti što kraća.

Konstruirajmo (sl. 2.) točki B simetričnu točku B' s obzirom na pravac p. Tada je trokut $CB'B$ jednakokračan s osnovicom $\overline{BB'}$, pa je $|AC| + |CB| = |AC| + |CB'|$.



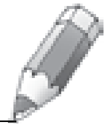
Slika 1.



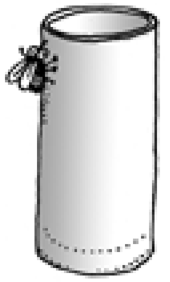
Slika 2.

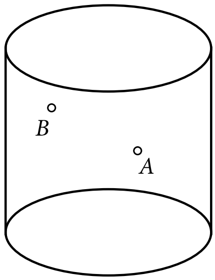
Duljina izlomljene dužine ACB' bit će, očito, najmanja ako sve tri točke A, C i B' pripadaju istome pravcu, dakle ako se točka C podudara sa sjecištem C_0 pravca AB i pravca p. U tom je slučaju kut α između $\overline{AC_0}$ i p jednak kutu β između $\overline{C_0B'}$ i p, a ovaj je jednak kutu γ između p i $\overline{C_0B}$. Iz Fermatova principa, dakle, proizlazi da se svjetlost reflektira tako da je kut α, pod kojim zraka *upada* na zrcalo, jednak kutu γ pod kojim se zraka *reflektira* od zrcala.

Zadatak 3. Na vanjskoj strani čaše oblika (gore otvorenog) valjka u točki A nalazi se muha, a na unutrašnjoj točki B nalazi se kapljica mlijeka. Kojim putem treba proći muha da bi što prije došla do mlijeka (sl. 3.)?

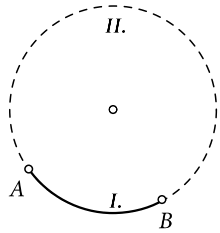


Rješenje: Gledano u smjeru osi čaše, točke A i B dijele njezin poprečni presjek na dva dijela (sl. 4.). Kraći od njih označimo s I., a dulji s II. (a ako su slučajno oba iste duljine, svejedno je koji označimo s I., a koji s II.).



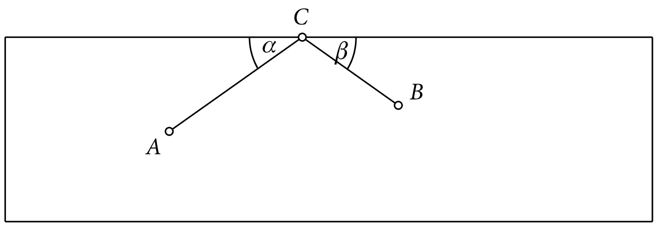


Slika 3.

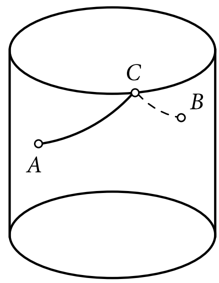


Slika 4.

Zamislimo plašt čašom određenog valjka razrezan duž neke izvodnice u području II. i razvijen u pravokutnik (sl. 5.). Vidimo da se zadatak svodi na prethodni. Na razvijenom gornjem rubu čaše moramo naći točku C tako da bude $\alpha = \beta$, a odgovarajuća konstrukcija opisana je u zadatku 2. Muha će se, dakle, na čaši gibati duž dvaju lukova cilindrične spirale (sl. 6.) i u točki C prijeći rub čaše.



Slika 5.

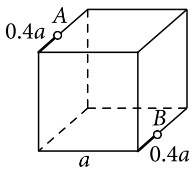


Slika 6.

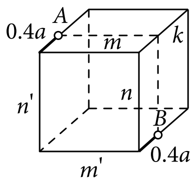
Napomena: Da smo plašt valjka razrezali duž neke izvodnice u području I. umjesto u području II., dobili bismo drugi „relativni minimum" duljine puta muhe, ali bi on bio veći od prije dobivenoga. Lako se, naime, vidi da su u tom slučaju (tj. uz iste udaljenosti točaka A i B od gornjeg ruba razvijenog pravokutnika, ali uz veću međusobnu udaljenost njihovih ortogonalnih projekcija na taj rub) odgovarajući kutovi $\alpha' = \beta'$ manji od prijašnjih $\alpha = \beta$, zbog čega je ukupna duljina puta u tom slučaju veća.

Zadatak 4. Odredite najkraću spojnicu točaka A i B koje pripadaju bridovima kocke (duljine a), kao što je prikazano na sl. 7.

Rješenje: Ako bismo točke A i B spojili preko brida k (sl. 8.), najkraći bi put očito bio dug $2a$ (isprekidana linija na sl. 8.).

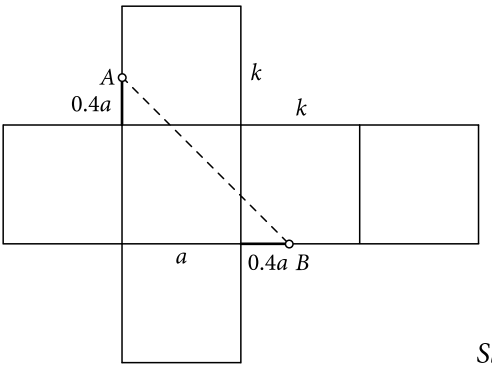


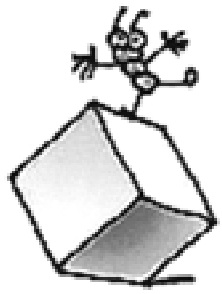
Slika 7.



Slika 8.

Međutim, postoje i druge mogućnosti povezivanje točaka A i B, primjerice preko bridova m i n. Razvijemo li plašt kocke tako da ga ne režemo duž bridova m i n, dobit ćemo sliku 9.





Slika 9.

Vidimo da je tada (dakle ako prelazimio bridove m i n) najkraći put od A do B označen isprekidanom linijom. Duljina tog puta je:

$$d = \sqrt{2} \cdot 1.4a < \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\, a = 2a \text{ (jer je } \sqrt{2} > 1.4\text{)}.$$

Rješenje zadatka je, dakle, taj drugi put. Dakako, postoji još jedno (tome simetrično) rješenje iste duljine koje dobivamo na analogni način, prijelaskom drugih dvaju bridova (m' i n') iste pobočke.

Postoje i druge mogućnosti povezivanja točaka A i B, npr. preko bridova m i m'. Nacrtamo li tom slučaju odgovarajuću mrežu kocke, tada će duljina puta biti $\sqrt{1^2 + 1.8^2}a = \sqrt{4.24}a > 2a$. Dakle, taj put ne dolazi u obzir, a isto vrijedi i za put preko bridova n i n'.