Matka 18 (2009./2010.) br. 69

ČETIRI TOČKE KRUŽNICE

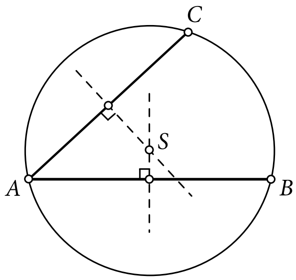
Vlado Stošić, Zagreb

Rješenje mnogih geometrijskih zadataka počinje crtanjem kružnice koja nam pomaže odrediti vezu između zadanih i nepoznatih dijelova promatranog lika. Za uspješno rješavanje zadataka iz naslova važno je poznavanje i primjena odgovarajućih poučaka.

Poučak 1. Kroz bilo koje tri točke ravnine, koje ne pripadaju jednom pravcu, možemo nacrtati jednu kružnicu.

Dokaz. Neka točke A, B, C ne leže na jednome pravcu. Konstruirajmo simetrale dužina $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$. Simetrale tih dviju dužina sijeku se u nekoj točki S. Naravno da te dvije simetrale ne mogu biti usporedne. Naime, ako bi te dvije simetrale bile usporedne, onda bi dužine $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ bile usporedne, a one to nisu jer se sijeku u jednoj točki. To znači da kružnica sa središtem u točki S polumjera $|SA| = |SB| = |SC| = r$ prolazi točkama A, B, C i ona je samo jedna.

Ovaj poučak možemo i ovako formulirati:
Svakom se trokutu može opisati kružnica.

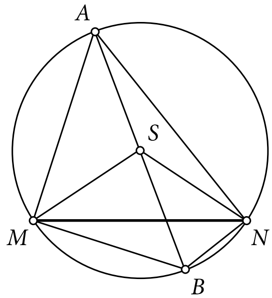


Poučak 2. Zbroj veličina dvaju obodnih kutova kružnice, kojima su vrhovi s raznih strana iste pridružene tetive, jednak je 180°.

Dokaz. Neka je u kružnici sa središtem u točki S dužina $\overline{MN}$ tetiva. Ako je tetiva $\overline{MN}$ promjer kružnice, onda su, prema Talesovom poučku, obodni kutovi veličine 90°, pa je dokaz očit. Ako tetiva $\overline{MN}$ nije promjer kružnice, a vrhovi dvaju obodnih kutova leže s raznih strana tetive $\overline{MN}$, onda su jedan vrh obodnog kuta i središte S kružnice s iste strane tetive $\overline{MN}$, a drugi vrh i središte S s raznih su strana tetive $\overline{MN}$.

Neka je točka B vrh obodnog kuta, i neka je tako odabrana da su točka B i središte S s raznih strana tetive $\overline{MN}$. Neka je točka A presjek pravca BS i kružnice sa središtem u točki S. Tada vrijedi jednakost $|\angle MBN|=|\angle MBA|+|\angle NBA|$, a zbog $|\angle MBA|=\frac{1}{2}|\angle MSA|$ i $|\angle NBA|=\frac{1}{2}|\angle NSA|$ vrijedi jednakost $|\angle MBN|=\frac{1}{2}|\angle MSA|+\frac{1}{2}|\angle NSA|$ ili $|\angle MBN|=\frac{1}{2}\left(|\angle MSA|+|\angle NSA|\right)$.

Dalje, budući da je $|\angle MSA|=180°-|\angle MSB|$ i $|\angle NSA|=180°-|\angle NSB|$, vrijedi jednakost $|\angle MBN|=\frac{1}{2}\left(180°-|\angle MSB|+180°-|\angle NSB|\right)$ ili $|\angle MBN|=\frac{1}{2}\left(360°-\left(|\angle MSB|+|\angle NSB|\right)\right)$, a zbog $|\angle MSB|+|\angle NSB|=|\angle MSN|$ vrijedi jednakost $|\angle MBN|=\frac{1}{2}\left(360°-|\angle MSN|\right)$ ili $|\angle MBN|=180°-|\angle MAN|$ jer je $\frac{1}{2}|\angle MSN|=|\angle MAN|$. Zadnja jednakost je točna za svaku točku na luku $\widehat{MN}$ kružnice na kojemu nije točka B. Zato vrijedi jednakost



$|\angle MBN|=180°-|\angle MAN|$, tj. $|\angle MBN|+|\angle MAN|=180°$, a to je i trebalo dokazati.

Poučak 3. Ako je za četiri točke ravnine A, B, C, D ispunjen jedan od ovih dvaju uvjeta:

a) točke C i D nalaze se s iste strane pravca AB, pri čemu je

$$|\angle ADB|=|\angle ACB|,$$

b) točke C i D nalaze se s raznih strana pravca AB, pri čemu je

$$|\angle ACB|+|\angle ADB|=180°,$$

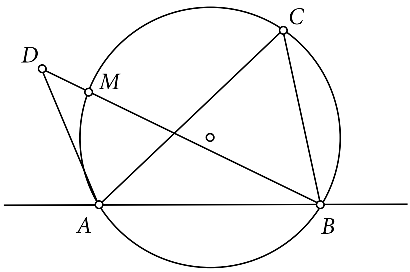
onda točke A, B, C, D pripadaju jednoj kružnici.

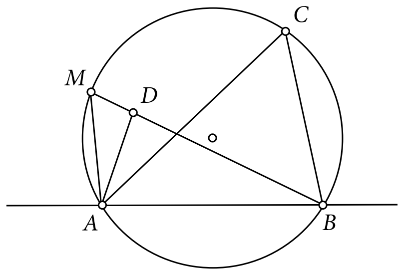
Dokaz. a) Nacrtajmo kružnicu opisanu trokutu ABC. Za dokaz ovog poučka valja pokazati da četvrta točka D nije ni unutar, ni izvan kružnice opisane trokutu ABC.

Pretpostavimo da je točka D izvan kružnice opisane trokutu ABC. Neka je točka M presjek pravca BD i kružnice opisane trokutu ABC. Tada je $|\angle ADB|=|\angle ACB|$ prema uvjetu navedenog poučka, a $|\angle AMB|=|\angle ACB|$ prema poučku o obodnim kutovima.

Zbog jednakosti desnih strana ovih dviju jednakosti nužno slijedi i jednakost njihovih lijevih strana, tj. $|\angle AMB| = |\angle ADB|$, što nije moguće. Naime, $\angle AMB$ je vanjski kut trokuta AMD, pa prema poučku o vanjskom kutu trokuta slijedi da je $|\angle AMB| = |\angle ADM| + |\angle MAD|$, pa je $|\angle AMB| > |\angle ADM|$, tj. $|\angle AMB| > |\angle ADB|$, a to je suprotno dokazanom da je $|\angle AMB| = |\angle ADB|$.

To znači da naša pretpostavka da se točka D nalazi izvan kružnice opisane trokutu ABC nije točna, pa zaključujemo da točka D nije izvan kružnice opisane trokutu ABC.





Pretpostavimo da je točka D unutar kružnice opisane trokutu ABC. Neka je točka M presjek pravca BD i kružnice opisane trokutu ABC. Tada je $|\angle ADB| = |\angle ACB|$ prema uvjetu navedenog poučka, a $|\angle AMB| = |\angle ACB|$ prema poučku o obodnim kutovima. Zbog jednakosti desnih strana ovih dviju jednakosti slijedi i jednakost njihovih lijevih strana, tj. $|\angle ADB| = |\angle AMB|$, što nije moguće. Naime, $\angle ADB$ je vanjski kut trokuta ADM, pa prema poučku o vanjskom kutu trokuta slijedi da je $|\angle ADB| = |\angle AMD| + |\angle MAD|$, pa je $|\angle ADB| > |\angle AMD|$, tj. $|\angle ADB| > |\angle AMB|$, a to je u suprotnosti s dokazanim da je $|\angle ADB| = |\angle AMB|$.

To znači da naša pretpostavka da je točka D unutar kružnica opisane trokutu ABC nije točna, pa zaključujemo da točka D nije unutar kružnice opisane trokutu ABC.

Budući da točka D nije ni izvan, ni unutar kružnice opisane trokutu ABC, nužno slijedi da je točka D na kružnici opisanoj trokutu ABC, a to znači da točke A, B, C, D pripadaju jednoj kružnici.

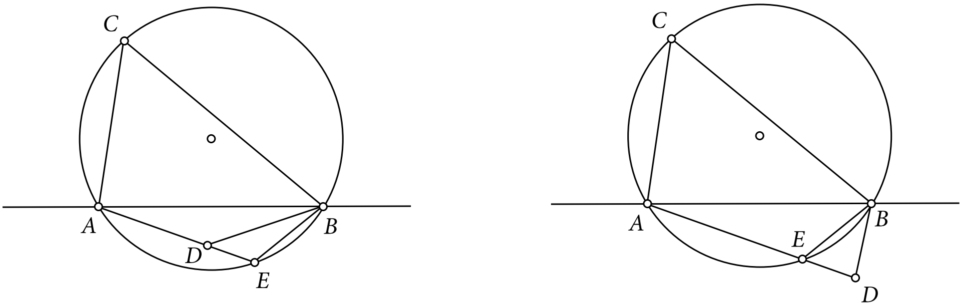
Dokaz. b) Trokutu ABC opišemo kružnicu. Za dokaz ovog poučka valja pokazati da četvrta točka D nije ni unutar, ni izvan kružnice opisane trokutu ABC.

Pretpostavimo da je točka D unutar kružnice opisane trokutu ABC. Neka je točka E presjek pravca AD i kružnice opisane trokutu ABC.

Tada je $|\angle ACB| + |\angle ADB| = 180°$ prema uvjetu ovog poučka, a $|\angle ACB| + |\angle AEB| = 180°$ prema Poučku 2. ovog članka.

Kako su desne strane ovih dviju jednakosti jednake, nužno slijedi jednakost njihovih lijevih strana, tj. $|\angle ACB|+|\angle ADB|=|\angle ACB|+|\angle AEB|$, a to znači da je $|\angle ADB| = |\angle AEB|$, što nije moguće. Naime, kut $\angle ADB$ je vanjski kut trokuta *BDE*, pa prema poučku o vanjskom kutu trokuta vrijedi jednakost $|\angle ADB| = |\angle DEB| + |\angle EBD|$, a to znači da je $|\angle ADB| > |\angle DEB|$, tj. $|\angle ADB| > |\angle AEB|$, a to je u suprotnosti s dokazanim da je $|\angle ADB| = |\angle AEB|$. To znači da naša pretpostavka da je točka *D* unutar kružnice opisane trokutu *ABC* nije točna, pa zaključujemo da točka *D* nije unutar kružnice opisane trokutu *ABC*.

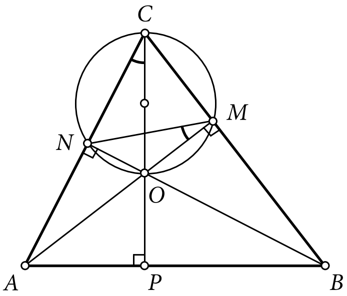
Pretpostavimo da točka *D* leži izvan kružnice opisane trokutu *ABC*. Neka je točka *E* presjek pravca *AD* i kružnice opisane trokutu *ABC*. Tada je $|\angle ACB|+|\angle ADB|=180°$ prema uvjetu ovog poučka, a $|\angle ACB|+|\angle AEB|=180°$ prema Poučku 2. ovog članka. Zbog jednakosti desnih strana ovih dviju jednakosti slijedi jednakost i njihovih lijevih strana, tj. $|\angle ACB|+|\angle ADB|=|\angle ACB|+|\angle AEB|$, a to znači da je $|\angle ADB| = |\angle AEB|$, što nije moguće. Naime, kut $\angle AEB$ je vanjski kut trokuta *BED*, pa prema poučku o vanjskom kutu trokuta vrijedi jednakost $|\angle AEB|=|\angle EDB|+|\angle EBD|$, a to znači da je $|\angle AEB| > |\angle EDB|$, tj. $|\angle AEB| > |\angle ADB|$, a to je u suprotnosti s dokazanim da je $|\angle AEB| = |\angle ADB|$. To znači da naša pretpostavka da je točka *D* izvan kružnice opisane trokutu *ABC* nije točna, pa zaključujemo da točka *D* nije izvan kružnice opisane trokutu *ABC*.



Kako točka *D* nije ni unutar, ni izvan kružnice opisane trokutu *ABC*, nužno slijedi da je točka *D* na kružnici opisanoj trokutu *ABC*, a to znači da točke *A*, *B*, *C*, *D* pripadaju jednoj kružnici.

Zadatak 1. U šiljastokutnom trokutu *ABC* nacrtane su sve tri visine: $\overline{AM}$, $\overline{BN}$, $\overline{CP}$. Dokažite da je $|\angle ACP|=|\angle AMN|$.

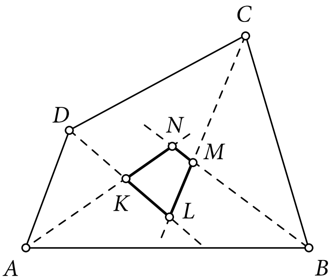
Rješenje. Neka je točka *O* ortocentar trokuta *ABC*. Očito je $|\angle AMC|=|\angle BNC|=90°$, jer su točke *M* i *N* nožišta visina $\overline{AM}$ i $\overline{BN}$



trokuta ABC, iz čega slijedi da je $|\angle AMC|+|\angle BNC|=180°$. To znači da točke C, N, O, M leže na jednoj kružnici. Zato je $|\angle NCO|=|\angle OMN|$, jer su to obodni kutovi nad tetivom $\overline{NO}$, a zbog $|\angle NCO|=|\angle ACP|$ i $|\angle OMN|=|\angle AMN|$ dobivamo da je $|\angle ACP|=|\angle AMN|$, a to je i trebalo dokazati.

Zadatak 2. Simetrale unutarnjih kutova konveksnog četverokuta $ABCD$ sijeku se redom u točkama K, L, M, N. Dokaži da se oko četverokuta $KLMN$ može opisati kružnica.

Rješenje. Neka je $|\angle BAD| = \alpha$, $|\angle ABC| = \beta$, $|\angle BCD| = \gamma$, $|\angle ADC| = \delta$. Tada vrijedi jednakost $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$, ili $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}+\frac{\delta}{2}=180°$.



U trokutu ABN vrijedi jednakost $|\angle ANB|=180°-\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)$, a u trokutu CDL vrijedi jednakost $|\angle CLD|=180°-\left(\frac{\gamma}{2}+\frac{\delta}{2}\right)$.

Zbrojimo li ove dvije jednakosti, dobit ćemo

$$|\angle ANB|+|\angle CLD|=360°-\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}+\frac{\delta}{2}\right),$$

ili $|\angle ANB|+|\angle CLD|=360°-180°$, tj. $|\angle ANB|+|\angle CLD|=180°$.

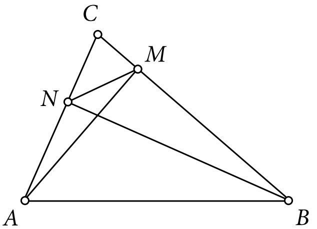
Zbog $|\angle ANB|=|\angle KNM|$ i zbog $|\angle CLD|=|\angle MLK|=|\angle KLM|$ vrijedi jednakost $|\angle KNM|+|\angle KLM|=180°$, pa prema Poučku 3b ovog članka točke K, L, M, N pripadaju jednoj kružnici, tj. četverokutu $KLMN$ možemo opisati kružnicu.

Zadatak 3. Dan je šiljastokuti trokut ABC. Ako su $\overline{AM}$ i $\overline{BN}$ dvije visine trokuta ABC, onda je $\Delta MNC \sim \Delta ABC$. Dokažite.

Rješenje. 1. način. Kako su $\overline{AM}$ i $\overline{BN}$ visine trokuta ABC, slijedi da je $|\angle AMB|=|\angle BNA|=90°$. Zato se prema Poučku 3a ovog članka četverokutu $ABMN$ može opisati kružnica s promjerom $\overline{AB}$. Lako se pokaže da je $|\angle ABM|+|\angle ANM|=180°$, ili $|\angle ABM|=180°-|\angle ANM|$. Naime, $|\angle AMN|=|\angle ABN|=\beta_1$ jer su to obodni kutovi nad tetivom $\overline{AN}$, a $|\angle MAN|=|\angle MBN|=\beta_2$ jer su to obodni kutovi nad tetivom $\overline{MN}$.

Zato u trokutu AMN vrijedi jednakost $|\angle ANM| + \beta_1 + \beta_2 = 180°$, a zbog $\beta_1 + \beta_2 = \beta = |\angle ABM|$ slijedi da je $|\angle ANM| + \beta = 180°$, ili $|\angle ANM| + |\angle ABM| = 180°$, tj. $|\angle ABM| = 180° - |\angle ANM|$.

Osim toga je $|\angle MNC| = 180° - |\angle ANM|$, a zbog $|\angle ABM| = 180° - |\angle ANM|$ vrijedi jednakost $|\angle MNC| = |\angle ABM|$. Kako je $|\angle NCM| = |\angle ACB|$, jer je to zajednički kut trokuta NCM i ABC, zaključujemo da trokuti NCM i ABC imaju dva para jednakih kutova, a to znači da su oni slični, tj. $\Delta MNC \sim \Delta ABC$.



2. način. Trokuti AMC i BNC su slični, tj. $\Delta AMC \sim \Delta BNC$ jer je kut $\angle ACB$ zajednički, a $|\angle AMC| = |\angle BNC| = 90°$. Iz dokazane sličnosti trokuta vrijedi razmjer $\frac{|CM|}{|AC|} = \frac{|CN|}{|BC|}$, ili $\frac{|CM|}{|CN|} = \frac{|AC|}{|BC|}$. To znači da trokuti MNC i ABC imaju dva para proporcionalnih stranica, a kut između tih dvaju parova stranica je jednak, iz čega slijedi da je $\Delta MNC \sim \Delta ABC$.

Zadatci

4. Iz bilo koje točke M na kateti $\overline{BC}$ pravokutnog trokuta ABC nacrtana je okomica MN na hipotenuzu $\overline{AB}$. Dokažite da je $|\angle MAN| = |\angle MCN|$.

5. Iz bilo koje točke P unutar šiljastog kuta α s vrhom u točki A nacrtane su okomice PM i PN na krakove kuta α. Iz vrha A nacrtana je okomica AK na dužinu $\overline{MN}$. Dokažite da je $|\angle MAK| = |\angle PAN|$.

6. Dan je trokut ABC kojemu je kut $|\angle ACB| = 60°$. Simetrala kuta $\angle BAC$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki D, a simetrala kuta $\angle ABC$ siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki E. Presjek simetrala AD i BE je točka S. Dokažite da je $|SD| = |SE|$.

7. Nad hipotenuzom pravokutnog trokuta s vanjske je strane nacrtan kvadrat. Dokažite da simetrala pravog kuta pravokutnog trokuta dijeli kvadrat na dva dijela jednakih površina.

8. U šiljastokutnom trokutu ABC nacrtane su visine $\overline{AE}$ i $\overline{BD}$ na stranicu $\overline{BC}$ odnosno $\overline{AC}$. Iz vrha A nartana je okomica AN, a iz vrha B okomica BM na pravac DE. Dokažite da je $|DN| = |EM|$.