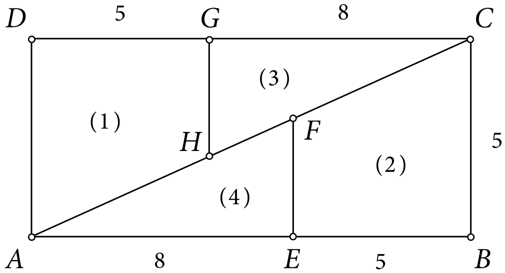
Matka 18 (2009./2010.) br. 72

AKO LAŽE ZAKLJUČAK, NE LAŽE RAČUN

Petar Mladinić, Zagreb

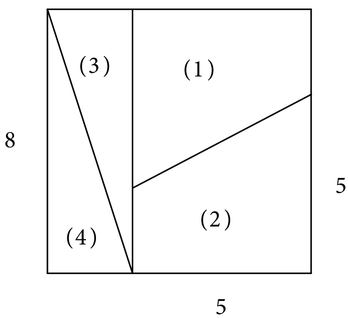
Često se susrećemo s problemima u kojima zaključak proturječi činjenicama. Parafrazirat ćemo staru izreku: „Ako laže zaključak, ne laže račun!”. To će nam biti nit vodilja u raščlambi zaključka i traženju gdje nastaje pogreška u problemu površine pravokutnika i kvadrata koji su sastavljeni od istih dijelova, a imaju različite površine.

Zadan je pravokutnik $ABCD$ dimenzija 13 cm × 5 cm. Podijeli se dijagonalom $\overline{AC}$ i okomicama u točkama E i G koje su 8 cm od vrha A i vrha C. Sjecišta tih okomica s dijagonalom $\overline{AC}$ su točke F i H (v. sl.).



Ovaj pravokutnik ima površinu jednaku $13 \cdot 5 = 65$ cm^2.

Četiri dijela pravokutnika preslagivanjem daju kvadrat površine $8 \cdot 8 = 64$ cm^2 (v. sl.).



Gdje je nestao 1 cm^2? Očito je zaključak lažan! Ali, gdje nastaje to lažno zaključivanje? Gdje se krije „prijevara”? Vidimo li to na slici?

U ovom je primjeru to lako odrediti! Izračunajmo koliko je $|AD| + |EF|$ u pravokutniku, a koliko u kvadratu (jer to je stranica kvadrata).

Iz sličnosti trokuta AEF i ABC pravokutnika $ABCD$ slijedi da je

$$8 : 13 = |EF| : 5,$$

odnosno

$$|EF| = \frac{40}{13}.$$

Budući da je $|AD| = 5$ cm, onda je

$$|AD| + |EF| = 5 + \frac{40}{13} = 8.08.$$

Dakle, $|AD| + |EF| \neq |DE|$ jer je $|DE| = 8$ cm.

Račun ne laže!

Ovaj je paradoks prvi put objavljen u Njemačkoj 1868. godine. Nakon toga došao je u ruke velikom piscu i matematičaru **Lewisu Carollu** koji ga je poopćio. Caroll je ispitao što se to mijenja preslagivanjem 4 dijela pravokutnika iz kojih nastaje kvadrat za 1 cm^2 manje površine.

Caroll je istražio ovaj problem pretpostavivši da je širina pravokutnika jednaka $n - a$, duljina $2n - a$, te duljina stranice kvadrata n.

Točke E i G na stranicama pravokutnika $ABCD$ za n su udaljene od vrhova A i C. (Pogledamo li sliku već spomenutog pravokutnika na početku ovog članka, vidjet ćemo da je to slučaj za koji je $n = 8$ i $a = 3$.)

Ako pravokutnik i preslagivanjem dobiveni kvadrat imaju površine koje se razlikuju za 1 cm^2, onda vrijedi

$$(n - a)(2n - a) - a^2 = 1,$$

odnosno

$$n^2 - 3an + a^2 - 1 = 0.$$

U problemima ovog tipa zanimljive su cjelobrojne dimenzije pravokutnika i kvadrata. Caroll je zaključio da za

$$n_{1,2} = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 4\left(a^2 - 1\right)}}{2},$$

odnosno

$$n_{1,2}=\frac{3a\pm\sqrt{5a^2+4}}{2}$$

diskriminanta $d = 5a^2 + 4$ mora biti potpuni kvadrat da bi pravokutnik i kvadrat bili cjelobrojnih dimenzija, a njihove se površine razlikovale za 1 cm².

Ako se pogledaju dimenzije mnogokuta za prvih 10 vrijednosti broja a, uočit će se da postoje samo tri slučaja koji ispunjavaju uvjete.

a	$d = 5a^2 + 4$	d je potpuni kvadrat broja	n
1	9	3	3
2	24	ne	
3	49	7	8
4	84	ne	
5	129	ne	
6	202	ne	
7	249	ne	
8	324	18	21
9	409	ne	
10	504	ne	

Sljedeća vrijednost za koju je d potpuni kvadrat broja je $a = 55$ i $n = 144$.

Koliki li je zbroj $|AD| + |EF|$ za ova 4 slučaja?

Lako se vidi da je taj zbroj redom: 2.2, 8.08, 21.03 i 144.004.

Dakle, što su pravokutnik i kvadrat većih dimenzija, to je teže uočiti da se dijelovi pravokutnika preklapaju u posloženom kvadratu, tj. da odgovarajući dijelovi pravokutnika i kvadrata nisu međusobno sukladni. Ilustracije radi, pravokutnik duljine 233 m i širine 89 m daje trapeze koji se u posloženom kvadratu preklapaju samo 3 mm.