math.e

Hrvatski matematički elektronički časopis

De Finettijev teorem

Kristina Ana Škreb
kristina.skreb@gmail.com

Miljenko Huzak
Matematički odsjek PMF-a
Sveučilište u Zagrabu
huzak@math.hr

1 Uvod

Statistički model i slučajni uzorak osnovni su pojmovi matematičke statistike. Za slučaj beskonačn populacije slučajni uzorak se najčešće definira kao niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajni veličina u odnosu na svaku vjerojatnost iz pretpostavljenog statističkog modela. Budući da j slučajni uzorak model za niz opažanja određene veličine kao funkcije nekog slučajnog eksperimenta postavlja se pitanje nije li pretpostavka o nezavisnosti i jednakoj distribuiranosti opažanih pokus prejaka. Ako jest, koja pretpostavka je slabija od te, a da i dalje povlači poželjne rezultat inferencijalne statistike? Pokazuje se da je to pretpostavka *izmjenjivosti*.

Koncept izmjenjivosti prvi je uveo Bruno De Finetti[3] i upravo nam De Finettijev reprezentacijsk teorem objašnjava matematičku vezu između nezavisnosti i izmjenjivosti. Pokazuje se da j izmjenjivost ekvivalentuvjetnoj nezavisnosti i jednakoj distribuiranosti, pri čemu se uvjetuje odnosu na neki slučajni element. Teorem kaže da je taj element granična vrijednost parcijalni empirijskih distribucija koja interpretaciju nalazi u bayesovskom pristupu statistici. Dakle, teorem, nekom smislu, povezuje frekvencionistički i bayesovski pristup.

U ovome radu nećemo dokazivati De Finettijev teorem. Pokušat ćemo na primjeru niz Bernoullijuevih slučajnih varijabli ilustrirati njegov sadržaj i kako se njime povezuju bayesovski klasični pristup statistici. Dokaz teorema i nešto detaljnija diskusija posljedica De Finettijevo teorem može se naći u diplomskom radu [4] i u knjizi [3].

2 Izmjenjivost

Definicija. *Za slučajne varijable* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *kažemo da su izmjenjive ako svaka permutacij od* $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *ima istu zajedničku distribuciju kao i bilo koja druga permutacija. Odnosno*

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n) \stackrel{\mathcal{D}}{=} \left(X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \ldots, X_{\pi(n)}\right) \quad \forall \pi \in S(n),$$

gdje je $S(n)$ *skup svih permutacija skupa* $\{1, 2, \ldots, n\}$.
Niz $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ *slučajnih varijabli je izmjenjiv ako mu je svaki konačan podskup izmjenjiv.*

Definiciju izmjenjivosti uveli smo da bismo na najslabiji mogući način izrekli pretpostavku simetričnosti slučajnih varijabli. Time samo želimo reći da nam je poredak slučajnih varijab nebitan, odnosno da se budući uzorci ponašaju kao prijašnji uzorci, a ne postavljamo nikakve uvjet na nezavisnost ili postojanje limesa relativnih frekvencija.

Iz definicije vidimo da je izmjenjivost općenitiji pojam od nezavisnosti i jednake distribuiranosti. T znači da je svaki niz $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli izmjenjiv, a obrat ne vrijedi (vidjeti Primjer 1.1 u [4]).

Pokaže se da je i svaki niz $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ uvjetno nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijab izmjenjiv. Upravo je to jedan od dvaju općenitih oblika izmjenjivosti. Jedini drugi oblik izmjenjivos je uzorkovanje bez ponavljanja, npr. izvlačenje kuglica iz kutije bez ponavljanja, ali on se odnos samo na slučaj konačnog niza izmjenjivih slučajnih varijabli (vidjeti 3.2.1 u [4], stranice 29. d 31.).

3 De Finettijev teorem

De Finettijev teorem primijenjen na Bernoullijeve slučajne varijable kaže nam da je izmjenjiv ni Bernoullijevih slučanjih varijabli uvjetno niz nezavnisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli, to uz danu varijablu koja predstavlja vrijednost vjerojatnosti uspjeha.

De Finettijev teorem za Bernoullijeve slučajne varijable. *Niz $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ Bernoullijevih slučajni varijabli je izmjenjiv ako i samo ako postoji slučajna varijabla Θ koja poprima vrijednosti u $[0,1$ takva da su, uvjetno na $\Theta = \theta$, $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ nezavisne i jednako distribuirane Bernoullijeve slučajn varijable s parametrom θ. Nadalje, ako je niz izmjenjiv, onda je distribucija od Θ jedinstvena $\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}$ konvergira g.s. prema Θ.*

Primjer. *Neka su* $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ *Bernoullijeve slučajne varijable. Pretpostavimo da vrijedi*

$$\mathbb{P}(k \text{ uspjeha u } n \text{ pokusa}) = \frac{1}{n+1}, \text{ za } k = 0, 1, \ldots, n \text{ i } n = 1, 2, \ldots$$

Ovdje se prirodno pojavljuju dva pitanja. Prvo, postoji li takav niz slučajnih varijabli[4] *i, drugo, je takav niz slučajnih varijabli izmjenjiv. Da je takav niz Bernoullijevih slučajnih varijabli izmjenji slijedi direktno iz definicije izmjenjivosti. Dakle, preostaje opravdati postojanje takvoga niza. U t svrhu dovoljno je dokazati konzistentnost zadanih vjerojatnosti pa će postojanje niza slijedi primjenom Kolmogorovljeva teorema (npr. Teorem 9.7 u [2]). Drugim riječima, moramo jo pokazati (vidi uvjete suglasnosti Kolmogorova na stranici 281. u [2]) da za proizvoljan* $n \in \mathbb{N}$ *proizvoljnu* n*-torku* $(x_1, \ldots, x_n)$ *elemenata iz* $\{0, 1\}$ *vrijedi*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n = \mathbb{P}X_1 &= x_1, \ldots, X_n = x_n, X_{n+1} = 0 \\ &+ \mathbb{P}X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n, X_{n+1} = 1. \end{aligned}$$

Stavimo $k = \sum_{i=1}^{n} x_i$*. Tada je lijeva strana gornje relacije jednaka* $\frac{1}{(n+1)\binom{n}{k}}$*, a desna strana j jednaka*

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+2)\binom{n+1}{k}} + \frac{1}{(n+2)\binom{n+1}{k+1}} &= \frac{\frac{n-k+1}{n+1}}{(n+2)\binom{n}{k}} + \frac{\frac{k+1}{n+1}}{(n+2)\binom{n}{k}} \\ &= \frac{1}{(n+1)\binom{n}{k}}. \end{aligned}$$

Time smo dokazali konzistenciju, pa znači da smo vjerojatnosti dobro zadali.
Budući da je zadani niz $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ *Bernoullijevih slučajnih varijabli izmjenjiv, iz De Finettijev teorema znamo da niz parcijalnih relativnih frekvencija uspjeha* $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \ \ n \in \mathbb{N}$ *konvergira g.s. prema nekoj slučajnoj varijabli* Θ*. Iz toga slijedi da* $\overline{X}_n$ *konvergira i po distribuci prema* Θ*. Neka je* $F_n(t) = \mathbb{P}\overline{X}_n \leqslant t$ *funkcija distribucije od* $\overline{X}_n$*. Vrijedi da je*

$$F_n(t) = \mathbb{P}\text{najviše } nt \text{ uspjeha u } n \text{ pokusa} = \frac{\lfloor nt \rfloor + 1}{n+1},$$

iz čega se vidi da je $\lim_{n\to\infty} F_n(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor nt \rfloor + 1}{n+1} = t$*, i to za sve* $0 \leqslant t \leqslant 1$*. Dakle,* $F(t) = t$ $0 \leqslant t \leqslant 1$*, je funkcija distribucije od* $\Theta = \lim_{n\to\infty} \overline{X}_n$*. Zaključujemo da su (opet prema D Finettijevu teoremu)* X_i*, uvjetno uz dano* $\Theta = \theta$*, nezavisne i jednako distribuirane Bernoullijev slučajne varijable s parametrom* θ *i da* Θ *ima uniformnu distribuciju* $U(0, 1)$*.*

Pretpostavimo sad da smo zabilježili k^* *uspjeha u prvih* n^* *pokusa, a zanima nas vjerojatnost uspjeha u sljedećih* n *pokusa. Označimo s* A *događaj da se u prvih* n^* *pokusa dogodilo* k^* *uspjeha a s* B *događaj da se u sljedećih* n *pokusa dogodilo* k *uspjeha. Tada vrijedi*

$$\mathbb{P}B|A = \frac{\mathbb{P}B \cap A}{\mathbb{P}A} = \frac{\frac{\binom{n^*}{k^*}\binom{n}{k}}{\binom{n^*+n}{k^*+k}} \frac{1}{n^*+n+1}}{\frac{1}{n^*+1}} = \frac{\binom{n^*}{k^*}\binom{n}{k}}{\binom{n^*+n}{k^*+k}} \frac{n^*+1}{n^*+n+1}. \qquad (1)$$

Naprimjer, ako uzmemo da su se u prvih 5 *pokusa dogodila* 2 *uspjeha, tada je vjerojatnost uspjeha u sljedećih* n *pokusa jednaka*

$$\frac{60\binom{n}{k}}{\binom{n+5}{k+2}} \frac{1}{n+6}. \qquad (2)$$

Lako se vidi da su budući ishodi i dalje izmjenjivi uz dane prošle ishode. Zbog toga, na isti način ka što smo dobili da je početna distribucija od Θ jednaka $U(0, 1)$, možemo izračunati i uvjetn distribuciju od Θ uz dani ishod prvih n^* pokusa koristeći se relacijom (1).

Alternativno, uvjetnu distribuciju od Θ možemo dobiti koristeći se sljedećim rezultatom.

Teorem. *Neka je $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ niz izmjenjivih Bernoullijevih slučajnih varijabli. Neka j $\Theta = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}$, i neka je μ_Θ distribucija od Θ. Uvjetno na zabilježenih k^* uspjeha u prvi n^* pokusa funkcija distribucije od Θ je jednaka*

$$F^*(t) = \frac{\int_{[0,t]} \theta^{k^*} (1-\theta)^{n^*-k^*} \, d\mu_\Theta(\theta)}{\int \psi^{k^*} (1-\psi)^{n^*-k^*} \, d\mu_\Theta(\psi)}.$$

Nastavak primjera. *Nakon zabilježenih k^* uspjeha u prvih n^* pokusa, koristeći se prethodnir teoremom (uz $\Theta \sim U(0,1)$) možemo izračunati uvjetnu distribuciju od Θ. Naprimjer, za $n^* = 5$ $k^* = 2$ je*

$$F^*(\theta) = \frac{\int_{[0,\theta]} \psi^2(1-\psi)^3 d\mu_\Theta(\psi)}{\int \phi^2(1-\phi)^3 d\mu_\Theta(\phi)} = \frac{\frac{\Gamma(7)}{\Gamma(3)\Gamma(4)} \int_{[0,\theta]} \psi^2(1-\psi)^3 d\psi}{\underbrace{\int_0^1 \frac{\Gamma(7)}{\Gamma(3)\Gamma(4)} \phi^2(1-\phi)^3 d\phi}_{=1 \text{ (funkcija gustoće od } Beta(3,4))}}$$

$$= 60 \int_{[0,\theta]} \psi^2(1-\psi)^3 d\psi, \text{ za } \theta \in \langle 0,1 \rangle,$$

iz čega slijedi da je uvjetna gustoća jednaka

$$f^*(\theta) = (F^*)'(\theta) = 60\theta^2(1-\theta)^3, \text{ za } \theta \in \langle 0,1 \rangle,$$

u odnosu na Lebesgueovu mjeru. Mod te distribucije je jednak $2/5$ što je relativna frekvencij uspjeha u prvih 5 pokusa. Možemo izračunati i očekivanu vjerojatnost uspjeha u šestom pokusu ak nam je poznato da su se u prvih 5 pokusa dogodila 2 uspjeha. Ona iznosi

$$\mathbb{E}^*(\Theta) = \int \theta 60\theta^2(1-\theta)^3 d\theta = 60\frac{\Gamma(4)\Gamma(4)}{\Gamma(8)} \underbrace{\int \frac{\Gamma(8)}{\Gamma(4)\Gamma(4)} \theta^3(1-\theta)^3 d\theta}_{=1 \text{ (funkcija gustoće od } Beta(4,4))} = \frac{3}{7},$$

što je jednako vjerojatnosti iz (2) za $n = 1$ i $k = 1$. Općenito, nakon opažanja k^* uspjeha u n pokusa dobijemo da je uvjetna funkcija distribucije od Θ jednaka

$$F^*(\theta) = \frac{\int_{[0,\theta]} \psi^{k^*}(1-\psi)^{n^*-k^*} d\psi}{\int_0^1 \phi^{k^*}(1-\phi)^{n^*-k^*} d\phi} = \frac{\frac{\Gamma(n^*+k^*+2)}{\Gamma(k^*+1)\Gamma(n^*+1)} \int_{[0,\theta]} \psi^{k^*}(1-\psi)^{n^*-k^*} d\psi}{\underbrace{\int_0^1 \frac{\Gamma(n^*+k^*+2)}{\Gamma(k^*+1)\Gamma(n^*+1)} \phi^{k^*}(1-\phi)^{n^*-k^*} d\phi}_{=1 \text{ (funkcija gustoće od } Beta(k^*+1, n^*-k^*+1))}}$$

$$= \frac{(n^*+1)!}{k^*!(n^*-k^*)!} \int_{[0,\theta]} \psi^{k^*}(1-\psi)^{n^*-k^*} d\psi, \text{za } \theta \in \langle 0,1 \rangle,$$

a uvjetna gustoća

$$f^*(\theta) = \frac{(n^*+1)!}{k^*!(n^*-k^*)!} \theta^{k^*}(1-\theta)^{n^*-k^*}, \text{za } \theta \in \langle 0,1 \rangle,$$

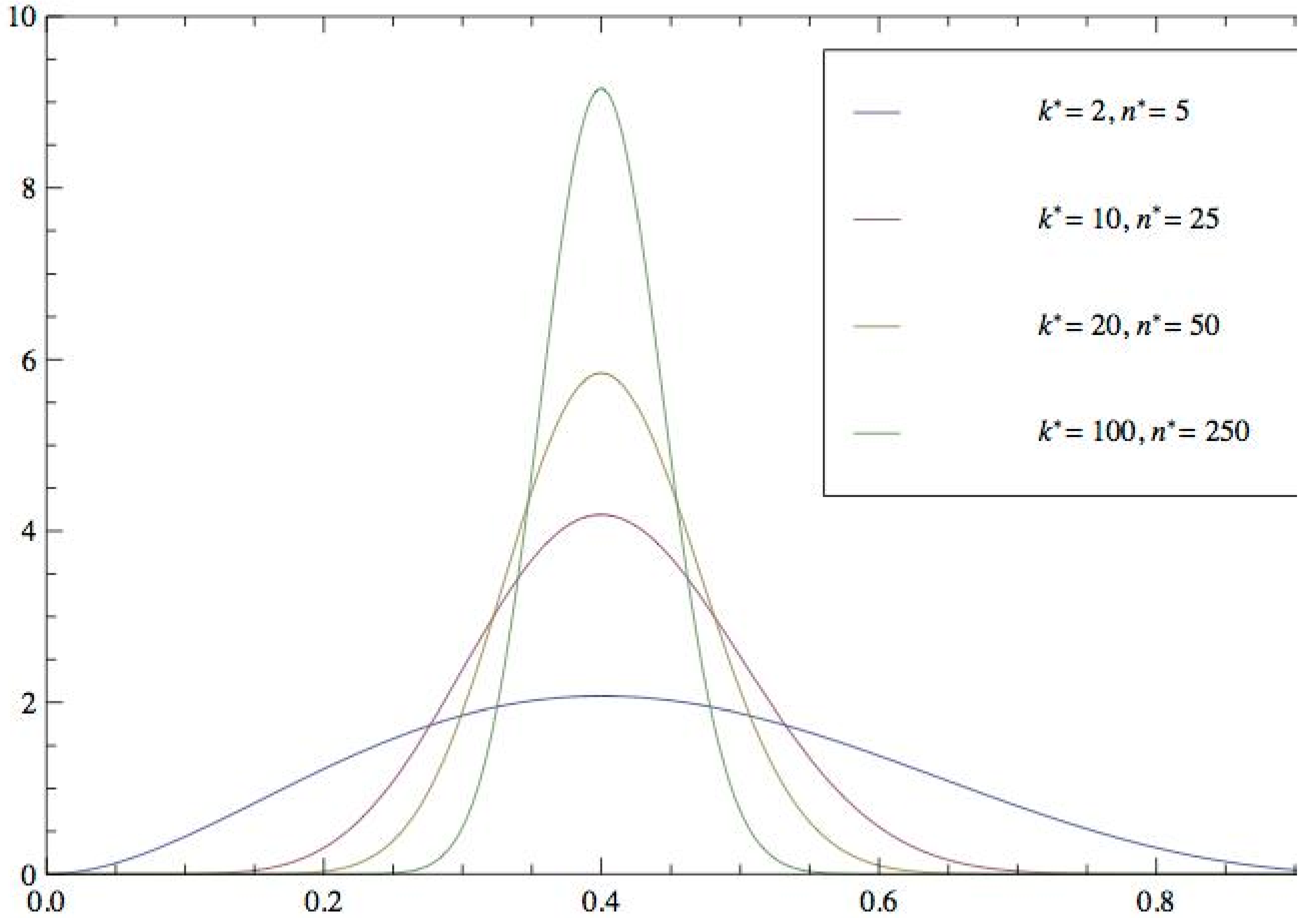
što znači da Θ ima uvjetno $Beta(k^*+1, n^*-k^*+1)$ distribuciju. Uz dane podatke očekivan vjerojatnost uspjeha u sljedećem pokusu jednaka je uvjetnom očekivanju od Θ, tj. $\frac{k^*+1}{n^*+2}$ što j približno jednako $\frac{k^*}{n^*}$ za velike n^*. Primijetite da je mod uvjetne distribucije F^* od Θ upravo jedna $\frac{k^*}{n^*}$.

Ovaj primjer objašnjava nam zašto su opažene frekvencije važne za računanje vjerojatnosti ak pretpostavljamo da su nam podaci izmjenjivi. Ujedno nam ilustrira vezu bayesovskog pristup procjeni parametra Bernoullijeva modela s frekvencionističkim.

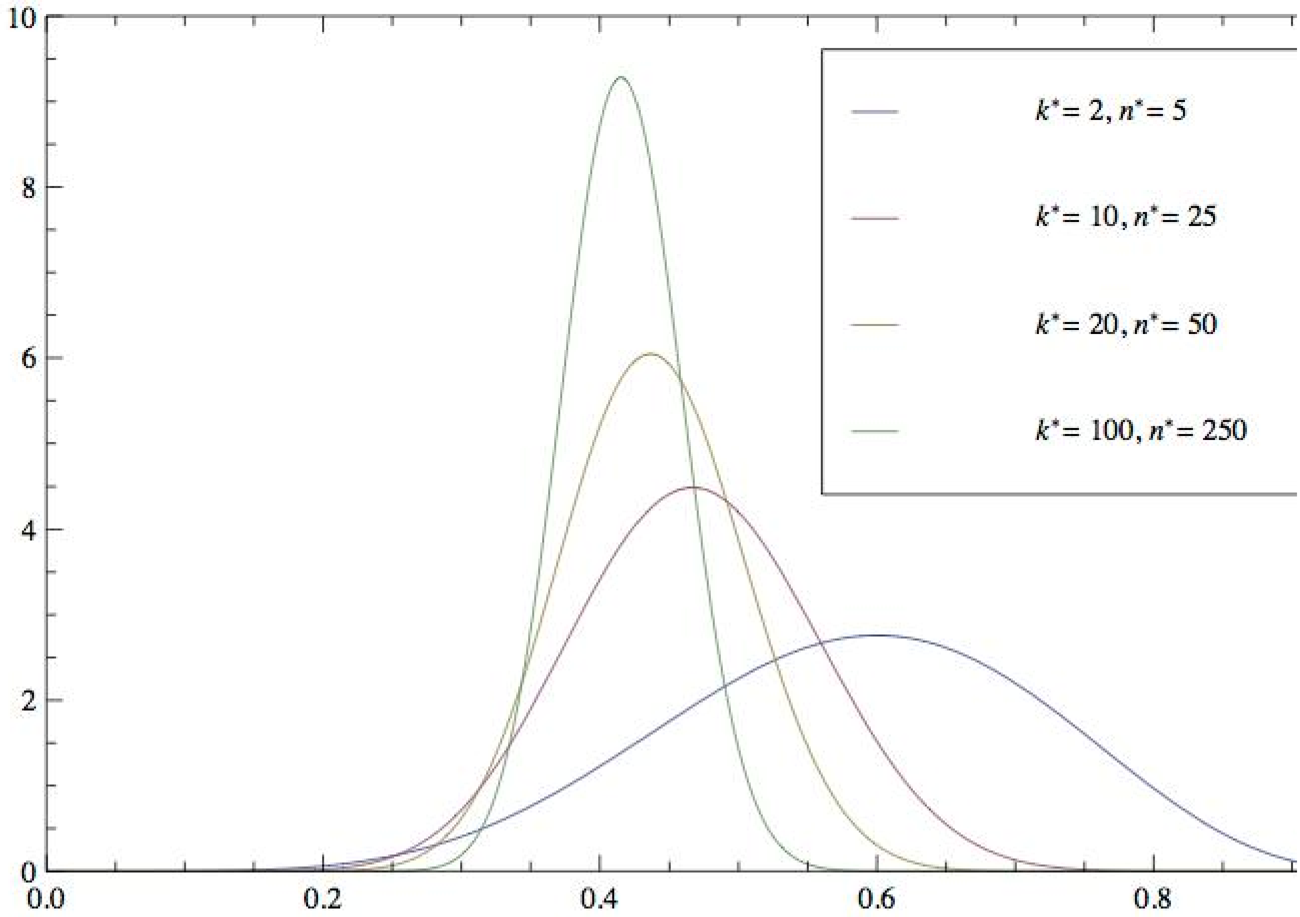
Neka distribucija μ_Θ ima gustoću f u odnosu na neku mjeru na $[0,1]$. Tada će uvjetna gustoća o Θ uz opaženih k^* uspjeha u n^* pokusa biti oblika

$$\text{neka konstanta} \cdot \theta^{k^*}(1-\theta)^{n^*-k^*} f(\theta). \tag{3}$$

Ova gustoća veća je za vrijednosti od θ blizu $\frac{k^*}{n^*}$ nego što je f. Isto tako, što je n^* veći, to uvjetn gustoća ima izraženiji šiljak u blizini $\frac{k^*}{n^*}$. Na slikama 1 i 2 nalaze se grafovi uvjetnih gustoća od Θ z razne k^*, n^* i f koje ilustriraju upravo navedene činjenice. Ovaj argument na neki način opravdav činjenicu da Θ često procjenjujemo s $\frac{k^*}{n^*}$. To je opravdano jedino kad vjerujemo da su podac izmjenjivi. Ne tvrdimo da postoji "fiksna vrijednost θ" takva da su ishodi pokusa nezavisne i jednak distribuirne slučajne varijable s parametrom θ . Samo pokušavamo procijeniti (ili predvidjeti) lime relativnih frekvencija.



Grafovi funkcija gustoća $Beta(k^*+1, n^*-k^*+1)$-distribucija za razne k^* i n^* takve da je $k^*/n^* = 2/5 = 0.4$. Te gustoće su ujedno oblika (3) za f gustoću uniformne $U(0,1)$-razdiobe.



Grafovi funkcija gustoća oblika (3) za razne k^* i n^* takve da je $k^*/n^* = 2/5 = 0.4$ i $f(\theta) = 30 \cdot \theta^4(1-\theta)$.

Zanimljivo je da se De Finettijev teorem može poopćiti i na bilo koji niz izmjenjivih slučajni varijabli. Znači da je proizvoljan niz slučajnih varijabli izmjenjiv ako i samo ako je to niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli, uvjetno na neku slučajnu veličinu. Štoviše, pokazuje se d ova tvrdnja vrijedi i za posebnu vrstu slučajnih elemenata, koji su poopćenje slučajnih varijabli.

Taj opći De Finettijev reprezentacijski teorem govori nam sljedeće:

De Finettijev teorem. *Neka je $(S, \mathcal{A}, \mu)$ vjerojatnosni prostor i $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ Borelov prostor. Neka s $X_n : S \to \mathcal{X}$, $n \in \mathbb{N}$, izmjerive funkcije. Tada je niz $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ slučajnih elemenata izmjenjiv ako samo ako postoji slučajna vjerojatnosna mjera $\mathbf{P}$ na $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ takva da su, uvjetno na $\mathbf{P} = F$ $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ nezavisni i jednako distribuirani s distribucijom P. Nadalje, ako je niz izmjenjiv, tada j distribucija od $\mathbf{P}$ jedinstvena i $\mathbf{P}_n(B)$ konvergira prema $\mathbf{P}(B)$ g.s. za svaki $B \in \mathcal{B}$.*

Razlika u odnosu na Bernoullijev slučaj je ta što za proizvoljan niz $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ izmjenjivih slučajni elemenata koji poprimaju vrijednosti u Borelovu prostoru postoji neka slučajna vjerojatnosna mjer $\mathbf{P}$, a ne slučajna varijabla, u odnosu na koju su X_i uvjetno nezavisni i jednako distribuirani. T slučajnu vjerojatnosnu mjeru $\mathbf{P}$ dobijemo kao limes empirijskih distribucija $\mathbf{P}_n$ od $X_1, \ldots, X_n$ Podsjetimo se, empirijska distribucija od $X_1, \ldots, X_n$ je slučajna vjerojatnosna mjera definiran izrazom[5]$\mathbf{P}_n(B) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_B(X_i)$ za svaki Borelov skup B.

Jedino nam preostaje vidjeti što je zapravo slučajna vjerojatnosna mjera. U Bernoullijevu slučaj vidimo da je to neka slučajna varijabla s vrijednostima u intervalu $[0, 1]$. Za slučajne elemente ko mogu poprimiti samo konačno mnogo vrijednosti slučajne vjerojatnosne mjere su ekvivalentn slučajnim vektorima. Za proizvoljne slučajne elemente slučajne vjerojatnosne mjere su nešt složenije, ali se također definiraju kao jedna vrsta izmjerivih preslikavanja.

Bibliografija

[1] D. V. Lindley, Bruno de Finetti, u: *Leading Personalities in Statistical Sciences*, urednici N. L. Johnson, and S. Kotz, Wiley, 1997., 94.-95.

[2] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, drugo izdanje, Školska knjiga, Zagreb, 1992.

[3] M. J. Schervish, *Theory of statistics*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[4] K. A. Škreb, *De Finettijev teorem*, diplomski rad, PMF-Matematički odsjek u Zagrebu, Zagreb 2010.

---

[1]Kristina Ana Škreb, mag. math., kristina.skreb@gmail.com
[2]Dr. sc. Miljenko Huzak, docent, PMF-Matematički odsjek, Zagreb, huzak@math.hr
[3]Bruno De Finetti, rođen 13. lipnja 1906. u Innsbrucku, umro 20. srpnja 1985. u Rimu (vidjeti [1]).
[4]U smislu da postoji vjerojatnosni prostor i da je na njemu definiran niz slučajnih varijabli sa zadanim svojstvom.
[5]Funkcija $x \mapsto \mathbf{1}_A(x)$ je karakteristična funkcija skupa A. Definira se kao funkcija $\mathbf{1}_A : \mathbb{R} \mapsto \{0,1\}$ takva da je $\mathbf{1}_A(x) =$ ako i samo ako je $x \in A$.

ISSN 1334-6083