math.e

Hrvatski matematički elektronički časopis

Izborni paradoksi

Mila Botić
Matematički odsjek PMF-a
Sveučilište u Zagrabu

Vedran Krčadinac
Matematički odsjek PMF-a
Sveučilište u Zagrabu
krcko@math.hr

Sažetak

Objašnjavamo matematički model za izborni proces. Iskazujemo teoreme nemogućnosti, prema kojima određeni „demokratski” zahtjevi na metodu određivanja pobjednika izbora dovode do postojanja „diktatora”.

1 Uvod

Teorija društvenog izbora (eng. *social choice theory*) je disciplina društvenih znanosti na granic između ekonomije, politologije i filozofije. Bavi se načinom donošenja kolektivnih odluka na temelj preferencija pojedinaca. Početkom moderne teorije društvenog izbora smatra se knjiga *Social choic and individual values* [1] američkog ekonomista Kennetha J. Arrowa, dobitnika Nobelove nagrade z ekonomiju 1972. godine. Među ranijim autorima koji su pisali o sličnoj tematici su matematičar Jean-Charles de Borda (1733. - 1799.), Nicolas Caritat de Condorcet (1743. - 1794.), Pierre-Simo Laplace (1749. - 1827.) i Charles Lutwidge Dodgson (1832. - 1898.), poznatiji kao Lewis Carroll autor „Alise u zemlji čudesa”. Teorija se i danas razvija, o čemu svjedoče znanstveni časopisi *Socia Choice and Welfare* (ISSN 0176-1714) i *Public Choice* (ISSN 0048-5829) iz srodne discipline, teorij javnog izbora.

U modernim znanstvenim radovima iz ekonomije u velikoj se mjeri koristi precizan matematičk jezik. Cilj ovog članka je prezentirati neke matematičke aspekte teorije društvenog izbora Objašnjavamo osnovne definicije i ideje koje stoje iza njih te iskaze takozvanih teorem nemogućnosti, koji se mogu opisati kao izborni paradoksi. Riječ je o zahtjevima na metod određivanja pobjednika izbora koji djeluju pravedno i razumno te ćemo ih stoga zvati „aksiomim demokracije”. Međutim, iz zahtjeva slijedi postojanje „diktatora”, tj. birača čiji glas jednoznačn određuje ishod izbora neovisno o glasovima ostalih birača. Dokaze teorema u ovom člank preskačemo i upućujemo zainteresirane čitatelje na literaturu u kojoj se nalaze. Na kraju svak cjeline navodimo zadatke koji služe boljem razumijevanju izloženih pojmova. Rješenja zadatak dajemo na kraju članka.

2 Kako rangirati kandidate?

Na izborima biramo između konačnog skupa kandidata, stranaka ili opcija. Na predsjedničkir izborima biramo jednog kandidata, na parlamentarnim izborima biramo listu kandidata, a n referendumu odlučujemo između nekoliko opcija. Sva tri slučaja tretirat ćemo ravnopravnc

Elemente skupa K koji su predmet izbora zvat ćemo *kandidatima*, a broj elemenata u K označava ćemo s k.

Na većini izbora u Republici Hrvatskoj birači se trebaju izjasniti za točno jednog kandidata. Teorij društvenog izbora proučava općenitije izborne sustave, u kojima se uzima u obzir redoslijed u kojer birači rangiraju kandidate, a ne samo njihov prvi izbor. Jedan takav izborni sustav je takozvar *instant runoff voting* ili *alternative vote* [11]. Koristi se na nekim izborima u Australiji, Kanad SAD-u, Velikoj Britaniji i drugdje. Prvo ćemo objasniti što se točno podrazumijeva pod rangiranjer kandidata.

Svaki od birača uspostavlja uređaj na skupu kandidata koji odgovara njegovim preferencijama Bitan je samo redoslijed kandidata u tom uređaju, a ne stupanj potpore pojedinim kandidatima Naprimjer, ako se uređaj uspostavlja dodjeljivanjem bodova, birač uspostavlja identične uređaj time što kandidatima x, y, z redom dodijeli bodove 10, 20, 30 ili 5, 10, 100.

Formalno, uređaj ρ je binarna relacija na skupu kandidata K, tj. podskup Kartezijeva produkt $\rho \subseteq K \times K$. Za parove kandidata koji su u relaciji pišemo $x \,\rho\, y$ umjesto $(x, y) \in \rho$. U sljedećo definiciji navedeni su zahtjevi koji se postavljaju na razne vrste relacija uređaja.

Definicija 1. *Za relaciju $\rho \subseteq K \times K$ kažemo da je:*

- *refleksivna, ako za svaki $x \in K$ vrijedi $x \,\rho\, x$;*
- *irefleksivna, ako za svaki $x \in K$ ne vrijedi $x \,\rho\, x$ (što zapisujemo kao $x \not\rho\, x$);*
- *antisimetrična, ako iz $x \,\rho\, y$ i $y \,\rho\, x$ slijedi $x = y$;*
- *tranzitivna, ako iz $x \,\rho\, y$ i $y \,\rho\, z$ slijedi $x \,\rho\, z$;*
- *potpuna, ako za sve $x, y \in K$ vrijedi $x \,\rho\, y$ ili $y \,\rho\, x$ ili $x = y$.*

Relacija „manje ili jednako” $\leq$ na skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ ili nekom njegovom podskupu j refleksivna, antisimetrična, tranzitivna i potpuna. Relacija „strogo manje” $<$ ima ista svojstva, osir što je irefleksivna umjesto refleksivna. Takve relacije nazivamo relacijama *totalnog uređaja* i *linearnog uređaja*.

Općenitije su relacije *parcijalnog uređaja*, koje ispunjavaju zahtjeve refleksivnosti, antisimetričnos i tranzitivnosti, ali ne moraju biti potpune. Primjeri su djeljivost na skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ inkluzija $\subseteq$ (relacija „biti podskup”) na nekoj familiji skupova. I ovdje refleksivnost možem zamijeniti s irefleksivnosti, prijelazom na strogu inkluziju skupova $\subset$.

U parcijalno uređenom skupu mogu postojati neusporedivi elementi, tj. različiti elementi $x, y \in K$ takvi da je $x \not\rho\, y$ i $y \not\rho\, x$. Naprimjer, prirodni brojevi 2 i 3 su neusporedivi s obzirom na relacij djeljivosti, a skupovi $\{1, 2\}$ i $\{2, 3\}$ su neusporedivi obzirom na inkluziju. Neusporedivost kandidat na izborima znači da su jednako rangirani. Zato parcijalni uređaj na K treba imati dodatn svojstvo: neusporedivost mora biti tranzitivna. Takve relacije nazivamo *strogim slabim uređajima*.

Definicija 2. *Za relaciju $\rho \subseteq K \times K$ kažemo da je strogi slabi uređaj na K ako je irefleksivna antisimetrična, tranzitivna i ako je neusporedivost obzirom na tu relaciju tranzitivna.*

U teoriji društvenog izbora preferencije birača zadaju se relacijama strogog slabog uređaja. U njim možemo identificirati međusobno neusporedive kandidate kao ekvivalentne i dobiti totalni uređaj n klasama ekvivalencije. Ponekad se radi jednostavnosti ne dopušta jednako rangiranje kandidata tj. zahtijeva se totalni uređaj na K. Tako postupamo i u ovom članku: pretpostavljamo da sval birač zadaje irefleksivnu, antisimetričnu, tranzitivnu i potpunu relaciju na K. Skup svih takvi relacija označavamo s $\mathcal{T}$, a pojedine relacije iz $\mathcal{T}$ označavamo s $\prec$ (da bismo ih razlikovali o standardnog uređaja $<$ na skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$).

Ako vrijedi $x \prec y$, smatramo da je kandidat x bolje rangiran od kandidata y. Naravno, moguć je obrnuti dogovor, baš kao što relaciju „manje” $<$ na $\mathbb{R}$ možemo zamijeniti relacijom „veće” $>$. T relacije imaju ista svojstva: obje su irefleksivne, antisimetrične, tranzitivne i potpune.

Totalne uređaje možemo identificirati s permutacijama skupa K, tj. bijekcijama s $\{1,\dots,k\}$ na K Iz toga slijedi da totalnih uređaja na K ima točno $k!$. Inverzna funkcija neke permutacije j bijekcija $u : K \to \{1,\dots,k\}$ koju tumačimo kao funkciju korisnosti (eng. *utility function*) vrijednost $u(x)$ je mjesto na kojem je rangiran kandidat x. Općenitije, bilo koja funkcij $u : K \to \mathbb{R}$ definira jedan strogi slabi uređaj na K s $x \prec y \iff u(x) < u(y)$. Totalne uređaj dobivamo od injektivnih funkcija $u : K \to \mathbb{R}$.

Zadaci

2.1 Dokažite da iz irefleksivnosti i tranzitivnosti binarne relacije slijedi njezina antisimetričnost Prema tome, uvjet antisimetričnosti možemo izostaviti iz definicije 2.

2.2 Nađite primjer relacije parcijalnog uređaja u kojoj neusporedivost nije tranzitivna.

2.3 Neka je $\prec$ tranzitivna relacija. Dokažite da je tada tranzitivnost neusporedivosti ekvivalentn sljedećem zahtjevu: ako vrijedi $x \prec y$, onda za svaki z vrijedi $x \prec z$ ili $z \prec y$.

2.4 Dokažite da za svaki strogi slabi uređaj $\prec$ na skupu K postoji funkcija $u : K \to \mathbb{R}$ takva d vrijedi $x \prec y \iff u(x) < u(y)$.

2.5 Koliko ima relacija strogog slabog uređaja na k-članom skupu?

3 Kako odrediti pobjednika?

Pretpostavimo da na izbore izlazi n birača; identificiramo ih s prirodnim brojevima $1, 2, \dots, n$. Svak birač zadaje relaciju totalnog uređaja na skupu kandidata K kojom izražava svoje preferencije Tako dobivamo uređenu n-torku $(\prec_1, \dots, \prec_n) \in \mathcal{T}^n$ koju nazivamo *profilom* ili {n-torkor individualnih preferencija}. Glavni zadatak teorije društvenog izbora je na temelju profila odredi pobjednika izbora, odnosno *društvenu preferenciju*: totalni uređaj $\prec$ koji predstavlja preferencij društva kao cjeline. Nicolas de Condorcet je 1785. godine demonstrirao jedan izborni paradoks pokazao da zadatak nije jednostavan.

Pretpostavimo da na izborima glasaju samo tri birača 1, 2, 3 i da se izjašnjavaju o tri kandidata x y, z. Neka su preferencije prvog birača $x \prec_1 y \prec_1 z$, drugog birača $y \prec_2 z \prec_2 x$, a trećeg birač $z \prec_3 x \prec_3 y$. Kandidat x ne bi trebao pobijediti na izborima jer većina birača preferira kandidata z vrijedi $z \prec_2 x$ i $z \prec_3 x$. Kandidat z također ne bi trebao pobijediti jer prvi i drugi birač preferiraj kandidata y. Niti y ne bi trebao pobijediti, zbog $x \prec_1 y$ i $x \prec_3 y$. Ovaj profil individualni preferencija je paradoksalan jer ne dopušta takozvanog *Condorcetova pobjednika*. To je kandida koji bi u drugom krugu glasanja pobijedio svakog od preostalih kandidata, ako bi birači glasa konzistentno s preferencijama izraženim u prvom krugu.

Definicija 3. *Neka je $(\prec_1, \dots, \prec_n) \in \mathcal{T}^n$ profil individualnih preferencija na K. Za kandidat $x \in K$ kažemo da je Condorcetov pobjednik zadanog profila, ako za svaki $y \in K$, $y \neq x$ vrijedi d je broj birača koji preferiraju x veći od broja birača koji preferiraju y:*

$$\operatorname{card}\{i \mid x \prec_i y\} > \operatorname{card}\{j \mid y \prec_j x\}.$$

Condorcetov paradoks pokazuje da za neke profile ne postoji Condorcetov pobjednik.

U ambicioznijoj verziji izbornog problema treba odrediti društvenu preferenciju za sve parov kandidata, a ne samo pobjednika. Godine 1770. Jean-Charles de Borda predložio je metodu z određivanje uređaja $\prec$ na temelju profila $(\prec_1, \dots, \prec_n)$. Kandidati dobivaju bodove ovisno o mjest na kojem su rangirani u individualnim preferencijama $\prec_i$. Bodovi se sumiraju i na osnovi toga s uspostavlja društvena preferencija $\prec$. Postoji više varijanti Bordine metode. Borda ju je predložio z izbor članova francuske Akademije znanosti i ondje se koristila od 1784. do 1800. [10]. Danas s sličan sistem koristi za izbor zastupnika nacionalnih manjina u slovenskom parlamentu te za izbc pjesme Eurovizije. Obično bolje rangirani kandidati dobivaju više bodova, no mi ćemo pretpostavi suprotno.

Točnije, neka su $u_i : K \to \{1, \dots, k\}$ funkcije korisnosti koje odgovaraju individualnir preferencijama $\prec_i$, za $i = 1, \dots, n$. Definiramo funkciju $u : K \to \mathbb{R}$, $u(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x)$ Društvena preferencija $\prec$ je strogi slabi uređaj dobiven od te funkcije, tj. definiran $x \prec y \iff u(x) < u(y)$. Nije isključeno da se vrijednosti funkcije u podudaraju za različit kandidate, a tada su ti kandidati neusporedivi s obzirom na relaciju $\prec$. Ako želimo totalni uređa na K, možemo se dogovoriti da se u tom slučaju gleda preferencija unaprijed zadanog birača[1] ili d se izjednačeni kandidati rangiraju na neki drugi način.

Općenito, teorija društvenog izbora proučava funkcije $f : \mathcal{T}^n \to K$ i $F : \mathcal{T}^n \to \mathcal{T}$. Funkcije domenom i kodomenom kao f zovemo *funkcijama društvenog izbora*. One svakom profil $(\prec_1, \dots, \prec_n)$ pridružuju pobjednika izbora $\{f(\prec_1, \dots, \prec_n) \in K\}$. Arrow [1] je proučavao funkcij s domenom i kodomenom kao F, koje profilu $(\prec_1, \dots, \prec_n)$ pridružuju društvenu preferencij $F(\prec_1, \dots, \prec_n) \in \mathcal{T}$. Zvao ih je *funkcijama društvenog blagostanja* (eng. *social welfare function*) a koristi se i naziv *ustav* (*constitution*).

Bordina metoda definira funkciju društvenog blagostanja F_B, odnosno funkciju društvenog izbor f_B (za pobjednika uzimamo kandidata x za kojeg je $u(x)$ minimalno). Postoje mnogi drugi primjer takvih funkcija. Najjednostavniji primjer je projekcija na koordinatu $d \in \{1, \dots, n\}$:

$$F_d(\prec_1, \dots, \prec_n) = \prec_d,$$

odnosno $f_d(\prec_1, \dots, \prec_n) = x$ ako je x najbolje rangirani kandidat u $\prec_d$. To znači da preferencij birača d potpuno određuju rezultat izbora, a preferencije ostalih birača uopće ne utječu na rezultat Takvog birača nazivamo *diktatorom*.

Diktatorske funkcije F_d i f_d su krajnje nedemokratične i cijeli izborni proces dovode do apsurda Zato se u teoriji društvenog izbora postavljaju zahtjevi koje trebaju zadovoljavati funkcij društvenog blagostanja i funkcije društvenog izbora. Takve zahtjeve zvat ćemo *aksiomim demokracije*.

Zadaci

3.1 Dokažite da je Condorcetov pobjednik jedinstven, ako postoji.

3.2 Neka je zadana funkcija društvenog blagostanja $F : \mathcal{T}^n \to \mathcal{T}$. Tada na prirodan način možem definirati funkciju društvenog izbora $f : \mathcal{T}^n \to K$, tako da $f(\prec_1, \dots, \prec_n)$ bude najbolje rangirar kandidat u uređaju $F(\prec_1, \dots, \prec_n)$. Možemo li na taj način dobiti svaku funkciju društvenog izbor $f : \mathcal{T}^n \to K$?

4 Aksiomi demokracije

Prvi od zahtjeva na funkciju društvenog izbora f jest da svaki od kandidata može pobijediti, tj. d je f surjekcija.

Aksiom. *($\mathbf{a_1}$) Za svaki $x \in K$ postoji profil $(\prec_1, \dots, \prec_n) \in \mathcal{T}^n$ takav da je $f(\prec_1, \dots, \prec_n) = x$.*

Malo jači zahtjev je takozvani *Paretov uvjet*.

Aksiom. ($\mathbf{a}_1'$) *Ako je $x \in K$ najbolje rangirani kandidat u svakoj od individualnih preferencij $\prec_1, \ldots, \prec_n$, onda je $f(\prec_1, \ldots, \prec_n) = x$.*

Vilfredo Pareto (1848. - 1923.) bio je talijanski ekonomist, sociolog i filozof. Zaslužan je za širenj matematičke notacije i matematičkih tehnika u radovima iz ekonomije. Očito iz Paretova uvjet slijedi surjektivnost, a uz neke dodatne zahtjeve aksiomi (a_1) i (a_1') su ekvivalentni (vidi zadata 4.1). Surjektivnost možemo zahtijevati i od funkcije društvenog blagostanja F.

Aksiom. ($\mathbf{A_1}$) *Za svaki totalni uređaj $\prec$ na K postoji profil $(\prec_1, \ldots, \prec_n) \in \mathcal{T}^n$ takav da j $F(\prec_1, \ldots, \prec_n) = \prec$.*

Arrow u knjizi [1] postavlja malo blaži zahtjev: u društvenoj preferenciji svaki par kandidata mož biti rangiran u bilo kojem redoslijedu.

Aksiom. ($\mathbf{A}_1'$) *Za svaka dva kandidata $x, y \in K$ postoji profil $(\prec_1, \ldots, \prec_n) \in \mathcal{T}^n$ takav da z društvenu preferenciju $\prec = F(\prec_1, \ldots, \prec_n)$ vrijedi $x \prec y$.*

Arrow ovaj zahtjev zove *uvjetom suvereniteta građana*. Možemo ga malo ojačati u skladu Paretovim uvjetom:

Aksiom. ($\mathbf{A}_1''$) *Ako u svakoj od individualnih preferencija vrijedi $x \prec_i y$, $i = 1, \ldots, n$, onda društvenoj preferenciji $\prec = F(\prec_1, \ldots, \prec_n)$ također vrijedi $x \prec y$.*

Druga vrsta zahtjeva na funkcije društvenog izbora i blagostanja je *monotonost*. Pojednostavljenc monotonost znači da se položaj kandidata ne bi trebao pogoršati ako ga birači rangiraju bolje neg prije. Neka je $x \in K$ kandidat i $\prec, \prec' \in \mathcal{T}$ dva totalna uređaja na K. Kažemo da je x bolj rangiran u $\prec'$ nego u $\prec$ ako vrijedi:

(1) ako za kandidata y vrijedi $x \prec y$, onda vrijedi $x \prec' y$;

(2) za sve kandidate y, z različite od x vrijedi $y \prec z$ ako i samo ako vrijedi $y \prec' z$.

To znači da je x u $\prec'$ na istom ili boljem položaju nego u $\prec$, a redoslijed ostalih kandidata je ist Kažemo da je x bolje rangiran u profilu $P' = (\prec_1', \ldots, \prec_n')$ nego u profilu $P = (\prec_1, \ldots, \prec_n)$ ak to vrijedi za svaki par individualnih preferencija $\prec_i'$, $\prec_i$, $i = 1, \ldots, n$. Tu činjenicu zapisujem ovako: $P' <_x P$. Arrow [1] sljedeći zahtjev zove *pozitivna asociranost* društvene i individualni preferencija. Mi ćemo ga zvati *monotonost* funkcije društvenog blagostanja.

Aksiom. ($\mathbf{A_2}$) *Neka su $x, y \in K$ kandidati, $P, P' \in \mathcal{T}^n$ profili i $\prec = F(P)$, $\prec' = F(P'$ odgovarajuće društvene preferencije. Ako vrijedi $x \prec y$ i $P' <_x P$, onda vrijedi $x \prec' y$.*

Oslabljivanjem pretpostavke dobivamo jači aksiom. Za profile $P = (\prec_1, \ldots, \prec_n)$ $P' = (\prec_1', \ldots, \prec_n')$ pišemo $P' \leq_x P$ ako za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi

(1) ako za kandidata y vrijedi $x \prec_i y$, onda vrijedi $x \prec_i' y$.

Dakle, x je u svakoj komponenti od P' na istom ili boljem položaju nego u odgovarajućc komponenti od P, ali redoslijed ostalih kandidata ne mora biti isti. Sljedeći aksiom zovemo *jak monotonost* funkcije društvenog blagostanja ili *jaka pozitivna asociranost* društvene i individualni preferencija.

Aksiom. ($\mathbf{A}_2'$) *Neka su $x, y \in K$ kandidati, $P, P' \in \mathcal{T}^n$ profili i $\prec = F(P)$, $\prec' = F(P'$ odgovarajuće društvene preferencije. Ako vrijedi $x \prec y$ i $P' \leq_x P$, onda vrijedi $x \prec' y$.*

Aksiome monotonosti i jake monotonosti možemo izreći i za funkcije društvenog izbora.

Aksiom. *($\mathbf{a_2}$) Ako za kandidata $x \in K$ i profile $P, P' \in \mathcal{T}^n$ vrijedi $x = f(P)$ i $P' <_x P$, ond vrijedi $x = f(P')$.*

Aksiom. *($\mathbf{a_2'}$) Ako za kandidata $x \in K$ i profile $P, P' \in \mathcal{T}^n$ vrijedi $x = f(P)$ i $P' \leq_x P$, ond vrijedi $x = f(P')$.*

Arrow [1] postavlja još jedan zahtjev na funkciju društvenog blagostanja, takozvanu *nezavisnost o nevažnih alternativa* (eng. *independence of irrelevant alternatives*).

Aksiom. *($\mathbf{A_3}$) Neka su $P = (\prec_1, \dots, \prec_n)$, $P' = (\prec_1', \dots, \prec_n') \in \mathcal{T}^n$ profili i $S \subseteq K$ podsku kandidata. Ako se restrikcije individualnih preferencija $\prec_i\|_S = \prec_i'\|_S$ podudaraju za sval $i = 1, \dots, n$, onda se restrikcije društvenih preferencija $\prec = F(P)$, $\prec' = F(P')$ takođe podudaraju: $\prec\|_S = \prec'\|_S$.*

Restrikcija relacije $\prec \subseteq K \times K$ na podskup $S \subseteq K$ je relacija $\prec\|_S = \prec \cap (S \times S)$. Ako je totalni uređaj na K, onda je restrikcija $\prec\|_S$ totalni uređaj na S. Analogna tvrdnja vrijedi za strog slabe uređaje. Smisao aksioma (A_3) jest da odustajanje nekih kandidata ne bi trebalo utjecati n izborni položaj preostalih kandidata. U suprotnom neki kandidati mogu manipulirati izborima tako d potiču kandidiranje „lažnih kandidata”, kojima je cilj „pokupiti” glasove njihovih takmaca i odustat Sličan aksiom mogao bi se formulirati za funkciju društevnog izbora f, ali se u tom kontekst obično promatra druga vrsta manipulacije, koju provode birači.

Sjetimo se da birači rangiraju sve kandidate. Funkcija društvenog izbora $f : \mathcal{T}^n \to K$ određuj samo jednog pobjednika, a svi ostali kandidati su gubitnici izbora. U tom kontekstu birači čest reagiraju tako da svojeg favorita rangiraju najbolje, a kandidate koje doživljavaju kao njegov konkurente rangiraju lošije od svojih stvarnih preferencija. Takvo ponašanje naziva se *strateškir glasanjem* i smatra se nedostatkom izbornog sustava koji ga potiče. Idući aksiom naziva s *otpornost na strateško glasanje*.

Aksiom. *($\mathbf{a_4}$) Neka je $P = (\prec_1, \dots, \prec_n) \in \mathcal{T}^n$ profil, $i \in \{1, \dots, n\}$ birač t $P' = (\prec_1, \dots, \prec_i', \dots, \prec_n)$ profil koji dobijemo zamjenom i-te koordinate od P s uređajer $\prec_i' \in \mathcal{T}$. Ako je $f(P) \neq f(P')$, onda je $f(P) \prec_i f(P')$.*

Uređaj $\prec_i$ tumačimo kao stvarnu preferenciju i-tog birača. Negacija aksioma (a_4) glasi: posto profil P i birač i takav da mu se isplati zamijeniti svoju stvarnu preferenciju s uređajem $\prec_i'$. Tada ć pobjednik izbora $f(P')$ biti bolje rangiran od $f(P)$ u stvarnoj preferenciji $\prec_i$. To znači da birač ima razloga za strateško glasanje – u aksiomu zahtijevamo da to ne bude istina niti za jedno birača.

Zadaci

4.1 Dokažite da iz surjektivnosti (a_1) i jake monotonosti (a_2') funkcije društvenog izbora slijec Paretov uvjet (a_1').

4.2 Koje implikacije vrijede, a koje ne vrijede između aksioma (A_1), (A_1') i (A_1'')? Koje implikacij vrijede za jako monotone funkcije društvenog blagostanja, tj. pod dodatnom pretpostavkom (A_2')?

5 Teoremi nemogućnosti

Promotrimo koje od aksioma zadovoljava Bordina funkcija društvenog blagostanja F_B. Funkcija j očito surjektivna: za bilo koji totalni uređaj $\prec\, \in \mathcal{T}$, ako se sve individualne preferencije podudaraj s $\prec$, onda to vrijedi i za društvenu preferenciju $F_B(\prec, \ldots, \prec) = \prec$. Prema tome, ispunjen j aksiom (A_1). Ispunjen je i aksiom (A_1''), iz kojeg direktno slijedi (A_1'): ako za individualn preferencije vrijedi $x \prec_i y$, onda za odgovarajuće funkcije korisnosti vrijedi $u_i(x) < u_i(y)$ $i = 1, \ldots, n$. Društvenu preferenciju određuje suma $u(x) = \sum_{i=1}^n u_i(x) < \sum_{i=1}^n u_i(y) = u(y)$ pa je $x \prec y$ i za $\prec = F_B(\prec_1, \ldots, \prec_n)$.

Bordina funkcija društvenog blagostanja F_B je monotona, tj. zadovoljava aksiom (A_2). Iz $x \prec$ slijedi $\sum_{i=1}^n u_i(x) < \sum_{i=1}^n u_i(y)$. Ako za profile P, P' vrijedi $P' <_x P$, onda je $u_i'(x) \leq u_i(x)$, z $i = 1, \ldots, n$. Nadalje, $u_i'(y)$ ostao je isti kao $u_i(y)$ ili se povećao za jedan ako je x „prestigao” y i-toj individualnoj preferenciji $\prec_i'$. U svakom slučaju vrijedi $u_i'(y) \geq u_i(y)$, za $i = 1, \ldots, n$. Zat imamo $\sum_{i=1}^n u_i'(x) \leq \sum_{i=1}^n u_i(x) < \sum_{i=1}^n u_i(y) \leq \sum_{i=1}^n u_i'(y)$, iz čega slijedi $x \prec' y$.

Funkcija F_B ipak ne zadovoljava jaku monotonost (A_2') i nezavisnost od nevažnih alternativa (A_3) Kao protuprimjer za (A_3) promotrimo slučaj s tri birača i četiri kandidata x, y, z, w. Kandidati su profilu $(\prec_1, \prec_2, \prec_3)$ rangirani na sljedeći način:

	x	y	z	w
u_1	1	2	3	4
u_2	1	2	3	4
u_3	2	1	3	4
u	4	5	9	12

Individualne preferencije zadane su funkcijama korisnosti u_1, u_2, u_3, a u zadnjem retku tablice j suma $u = u_1 + u_2 + u_3$ koja određuje društvenu preferenciju. Drugi profil $(\prec_1', \prec_2', \prec_3')$ zadan j sljedećom tablicom:

	x	y	z	w
u_1'	1	2	3	4
u_2'	1	2	3	4
u_3'	4	1	2	3
u'	6	5	8	11

Restrikcije individualnih preferencija na podskup kandidata $\{x, y\}$ podudaraju se u oba profila. Z prva dva birača je $x \prec_1 y$ i $x \prec_2 y$, a za trećeg birača je $y \prec_3 x$. Isti odnosi vrijede u uređajim $\prec_1'$, $\prec_2'$ i $\prec_3'$. Međutim, restrikcije društvenih preferencija $\prec = F_B(\prec_1, \prec_2, \prec_3)$ $\prec' = F_B(\prec_1', \prec_2', \prec_3')$ se ne podudaraju: vrijedi $x \prec y$ i $y \prec' x$.

Ovaj primjer odgovara situaciji u kojoj većina birača preferira kandidata x nad y. Međutim, manjin koja preferira y izrazito je nesklona kandidatu x. Ako u izborima sudjeluju samo x i y, pobjeđuje x Ako pak sudjeluju i druga dva kandidata z i w, pobjeđuje y jer njegovi birači stavljaju kandidata na zadnje mjesto.

Bordina funkcija društvenog izbora f_B očito zadovoljava Paretov uvjet (a_1'), iz čega odmah slijec surjektivnost (a_1). Slično kao za F_B pokazuje se da je f_B monotona (vrijedi (a_2)), ali nije jak monotona (ne vrijedi (a_2')). Osim toga f_B nije otporna na strateško glasanje, tj. ne zadovoljav aksiom (a_4). To se vidi iz istog primjera kao maloprije: trećem biraču isplati se umjesto stvarn preferencije $\prec_3$ na glasanju iskazati $\prec_3'$ jer tada pobjeđuje njegov favorit y.

Za razliku od Bordinih funkcija, diktatorske funkcije društvenog blagostanja F_d i društvenog izbor f_d zadovoljavaju sve aksiome demokracije. Teoremi nemogućnosti tvrde da je situacija jo paradoksalnija: ako postoje bar tri kandidata, diktatorske funkcije jedine su koje zadovoljavaju sv aksiome!

Teorem 4. *(Arrow) Neka je $F : \mathcal{T}^n \to \mathcal{T}$ funkcija društvenog blagostanja koja zadovoljav aksiome (A_1'), (A_2) i (A_3). Ako je $k \geq 3$, onda postoji $d \in \{1, \ldots, n\}$ takav da je $F = F_d$.*

Ovo je najvažniji rezultat iz [1]. Arrow je uz spomenute aksiome imao aksiom da funkcij društvenog blagostanja ne smije biti diktatorska. U tom kontekstu teorem tvrdi da nije moguć funkcija društvenog blagostanja koja zadovoljava sve aksiome – odatle naziv „teorer nemogućnosti”[2].

U literaturi postoje mnogi alternativni dokazi i modifikacije Arrowljeva teorema. Jedan kratak doka dan je u knjizi [3]. Među najpoznatijim srodnim teoremima je takozvani Gibbard-Satterthwaiteo teorem, koji se odnosi na funkcije društvenog izbora.

Teorem 5. *(Gibbard-Satterthwaite) Neka je $f : \mathcal{T}^n \to K$ funkcija društvenog izbora koj zadovoljava aksiome (a_1) i (a_4). Ako je $k \geq 3$, onda postoji $d \in \{1, \ldots, n\}$ takav da je $f = f_d$.*

Teorem su neovisno dokazali američki filozof Allan Gibbard [5] i ekonomist Mar A. Satterthwaite [9]. U radu [6] dokazana je ekvivalentnost aksioma jake monotonosti (a_2') otpornosti na strateško glasanje (a_4). Zbog toga iz surjektivnosti (a_1) i jake monotonosti $(a_2'$ također slijedi da je funkcija društvenog izbora diktatorska ako je $k \geq 3$. Direktan dokaz to teorema i još jedan dokaz Arrowljeva teorema dan je u [8].

Zadaci

5.1 Pokažite primjerom da Bordina funkcija društvenog blagostanja F_B ne zadovoljava aksiom $(A_2'$ (jaku monotonost).

5.2 Dokažite da Bordina funkcija društvenog izbora f_B zadovoljava aksiom (a_2) (monotonost) Pokažite primjerom da ne zadovoljava aksiom (a_2') (jaku monotonost).

5.3 Dokažite da u slučaju samo dvaju kandidata ($k = 2$) Bordina funkcija društvenog blagostanj F_B zadovoljava aksiome (A_2') i (A_3), a Bordina funkcija društvenog izbora f_B zadovoljava aksiom (a_2') i (a_4).

5.4 Dokažite da iz aksioma surjektivnosti (a_1) i otpornosti na strateško glasanje (a_4) slijedi jak monotonost (a_2').

6 Zaključak

U ovom članku osvrnuli smo se na matematičko modeliranje izbornog procesa u okviru teorij društvenog izbora. Najviše pozornosti posvetili smo opisivanju izbornog sustava i svojstava koj treba zadovoljavati jezikom relacija i funkcija. Glavni teoremi o nemogućnosti tvrde da ne postoj funkcije društvenog izbora i blagostanja koje zadovoljavaju aksiome demokracije i nisu diktatorske Postavlja se pitanje o posljedicama tih rezultata na stvarne izbore i donošenje kolektivnih odluka praksi. Korištena terminologija nameće zaključak da „demokracija nije moguća”, odnosno da nužn vodi u „diktatorstvo”. Autori ovog članka ne slažu se s tom pojednostavljenom interpretacijom.

Po našem mišljenju, teoremi nemogućnosti pokazuju da ne treba pretjerivati s formalnir zahtjevima i pravilima. Pojedinačni aksiomi demokracije motivirani su željom da izbori bud pravedni, ali u kombinaciji dovode do paradoksalnog zaključka o diktatorstvu, tj. ne mogu svi bi zadovoljeni. Svjedoci smo da se slične situacije događaju u praksi. U Hrvatskoj se probler nepoštovanja ili „zaobilaženja” zakona i pravila često pokušava riješiti donošenjem novih pravila Mnogobrojna i pretjerano komplicirana pravila mogu dovesti do paradoksalnih situacija.

Smatramo kako je za stvarne izbore iznimno važno da pravila budu jednostavna, razumljiva i lak provediva. Također, važno je da sudionici izbora (kandidati i birači) prihvaćaju mogućnost da isho bude suprotan od onog koji priželjkuju. Drugim riječima, za uspjeh demokracije potrebna j dovoljno razvijena „demokratska svijest” društva, a ne samo dobra izborna pravila.

7 Rješenja zadataka

2.1. Neka je relacija ρ irefleksivna i tranzitivna. Neka vrijedi $x\,\rho\,y$ i $y\,\rho\,x$. Tada zbog tranzitivnos slijedi $x\,\rho\,x$, što ne može biti istina zbog irefleksivnosti. Dakle, nikad se ne događa $x\,\rho\,y$ i $y\,\rho\,x$, p je implikacija da iz $x\,\rho\,y$ i $y\,\rho\,x$ slijedi $x=y$ istinita „na prazno”.

2.2. Na skupu $\{1,2,3\}$ definiramo relaciju $\{(1,1),\ (1,3),\ (2,2),\ (3,3)\}$. Ta relacija je parcijalr uređaj u kojem neusporedivost nije tranzitivna: 1 nije usporediv s 2 i 2 nije usporediv s 3, ali 1 jes usporediv s 3.

2.3. Neka je $\prec$ tranzitivna relacija za koju je i neusporedivost tranzitivna te neka vrijedi $x\prec y$ Pretpostavimo da postoji z takav da je $x\not\prec z$ i $z\not\prec y$. Tada vrijedi $z\not\prec x$, jer bi u suprotnom i tranzitivnosti slijedilo $z\prec y$. Analogno vidimo da vrijedi $y\not\prec z$. Dakle, x i y nisu usporedivi sa z, međusobno su usporedivi. To je kontradikcija s tranzitivnosti usporedivosti pa takav z ne postoji.

Obrnuto, neka relacija $\prec$ zadovoljava uvjet iz zadatka. Neka je x neusporediv sa z i z neusporediv y. Zbog uvjeta ne može vrijediti $x\prec y$ niti $y\prec x$, pa su x i y također neusporedivi neusporedivost je tranzitivna.

2.4. Neka je $\prec$ strogi slabi uređaj na K. Neusporedivost s obzirom na $\prec$ je relacija ekvivalencij na K, tj. relacija $\sim$ koja je refleksivna, simetrična i tranzitivna. Relacija $\prec$ inducira totalni uređaj n skupu klasa ekvivalencije $K/\sim$ (stavimo $[x]\prec[y]\iff x\prec y$, gdje su $[x]$ i $[y]$ klas ekvivalencije kojoj pripadaju x i y). Označimo odgovarajuću funkciju korisnosti $v:K/\sim\to\{1,\dots,l\}$ (l je broj klasa ekvivalencije). Možemo je proširiti do funkcije $u:K\to\mathbb{I}$ stavljajući $u(x)=v([x])$. Pokazuje se da za tako definiranu funkciju vrijec $x\prec y\iff u(x)<u(y)$.

2.5. Po prethodnom zadatku, relaciju strogog slabog uređaja, kod koje neusporedivost ima točno klasa ekvivalencije, možemo identificirati sa surjekcijom $u:K\to\{1,\dots,l\}$. Broj surjekcija k-članog na l-člani skup je $S(k,l)=\sum_{i=0}^{l}(-1)^i\binom{l}{i}(l-i)^k$ (vidi [3, korolar 5.1.2] i [7, teorem 2.6.3]). Prema tome, ukupan broj relacija strogog slabog uređaja j $\sum_{l=1}^{k}S(k,l)=\sum_{l=1}^{k}\sum_{i=0}^{l}(-1)^i\binom{l}{i}(l-i)^k$. To je takozvani k-ti uređeni Bellov broj, tj. brc uređenih particija k-članog skupa.

3.1. Neka je $(\prec_1,\dots,\prec_n)\in\mathcal{T}^n$ profil individualnih preferencija i neka su $x_1,x_2\in K$ dv Condorcetova pobjednika za taj profil. Tada bi po definiciji broj individualnih preferencija u kojima j x_1 bolje rangiran od x_2 trebao biti istovremeno veći i manji od broja individualnih preferencija kojima je x_2 bolje rangiran od x_1, što je nemoguće. Dakle, ne mogu postojati dva Condorcetov pobjednika.

3.2. Na opisani način možemo dobiti svaku funkciju društvenog izbora $f:\mathcal{T}^n\to K$. Zaista, z zadanu funkciju f definiramo funkciju društvenog blagostanja $F : \mathcal{T}^n \to \mathcal{T}$ tako d $f(\prec_1, \ldots, \prec_n)$ bude najbolje rangirani kandidat u društvenoj preferenciji $F(\prec_1, \ldots, \prec_n)$, a ostal kandidate poredamo proizvoljno. Tada se funkcija društvenog izbora pridružena funkciji F podudar s f.

4.1. Neka je $P' \in \mathcal{T}^n$ profil za koji je kandidat $x \in K$ najbolje rangiran u svakoj od komponent Prema surjektivnosti (a_1), postoji profil $P \in \mathcal{T}^n$ takav da je $x = f(P)$. Očito vrijedi $P' \leq_x P$, p iz aksioma (a_2') slijedi $x = f(P')$. Time je dokazan Paretov uvjet (a_1').

4.2. Iz aksioma (A_1) (surjektivnosti funkcije društvenog blagostanja) očito slijedi aksiom (A_1') Obrat ne vrijedi – kao primjer možemo uzeti $K = \{x, y, z\}$ i bilo koju funkciju društveno blagostanja koja za sliku ima sljedeće 3 od 6 mogućih permutacija kandidata: (x, y, z), (y, z, x) (z, x, y). Takva funkcija nije surjekcija, ali zadovoljava aksiom (A_1') jer su mogući svi poret parova kandidata. Slično, iz aksioma (A_1'') slijedi Arrowljev aksiom (A_1'), a obrat ne vrijedi. I aksioma (A_1'') slijedi i surjektivnost (A_1). Zaista, ako vrijedi (A_1''), onda za bilo koji uređaj $\prec \in \mathcal{T}$ vrijedi $F(\prec, \ldots, \prec) = \prec$. Nije teško naći primjer surjektivne funkcije društvenog blagostanja koj ne zadovoljava aksiom (A_1'').

Uz dodatnu pretpostavku jake monotonosti (A_2') pokazuje se da iz (A_1') slijedi (A_1''), analogno ka u prethodnom zadatku. Tada su sva tri zahtjeva (A_1), (A_1'), (A_1'') međusobno ekvivalentna.

5.1. Neka na izborima sudjeluju tri kandidata x, y, z i dva birača. Neka su profili $P = (\prec_1, \prec_2)$ $P = (\prec_1', \prec_2')$ zadani funkcijama korisnosti u_1, u_2 i u_1', u_2':

	x	y	z
u_1	1	3	2
u_2	3	2	1
u	4	5	3

	x	y	z
u_1'	1	2	3
u_2'	3	1	2
u'	4	3	5

Bordine društvene preferencije $\prec = F_B(P)$ i $\prec' = F_B(P')$ odgovaraju funkcijama $u = u_1 + u_2$ $u' = u_1' + u_2'$. Vidimo da je $x \prec y$ i $P' \leq_x P$, ali ne vrijedi $x \prec' y$. Dakle, funkcija F_B n zadovoljava aksiom (A_2').

5.2. Neka profilima $P = (\prec_1, \ldots, \prec_n)$ i $P' = (\prec_1', \ldots, \prec_n')$ odgovaraju funkcije korisnos $u_1, \ldots, u_n$ i $u_1', \ldots, u_n'$. Suma $u = \sum_{i=1}^n u_i$ je minimalna za pobjednika izbora $x = f_B(P)$. I $P' <_x P$ slijedi $u_i'(x) \leq u_i(x)$ i $u_i'(y) \geq u_i(y)$, za sve kandidate $y \in K$, $y \neq x$ i birač $i \in \{1, \ldots, n\}$. Prema tome, suma $u'(x) = \sum_{i=1}^n u_i'(x)$ nije se povećala u odnosu na $u(x)$, $u'(y)$ se nije smanjila u odnosu na $u(y)$, $y \neq x$. Stoga u' također poprima minimalnu vrijednost z kandidata x i vrijedi $x = f_B(P')$. Dakle, Bordina funkcija f_B zadovoljava monotonost (a_2). I sljedećeg primjera s četiri kandidata x, y, z, w i dva birača vidi se da ne zadovoljava jak monotonost (a_2').

	x	y	z	w
u_1	1	3	4	2
u_2	3	2	1	4
u	4	5	5	6

	x	y	z	w
u_1'	1	2	3	4
u_2'	3	1	2	4
u'	4	3	5	8

Vrijedi $x = f_B(P)$ i $P' \leq_x P$, ali $f_B(P')$ nije x nego y.

5.3. Za $k = 2$ funkcija F_B zadovoljava aksiom (A_3) jer su tada jedini neprazni podskupovi $S \subseteq K$ jednočlani, pa se restrikcije društvenih preferencija sigurno podudaraju. Za aksiome (A_2') i $(a_2'$ ključno je što za $k = 2$ postoje samo dvije permutacije skupa K. U tom slučaju za profile vrijed $P' \leq_x P$ ako i samo ako vrijedi $P' <_x P$, pa je aksiom (A_2') ekvivalentan s (A_2) i (a_2') j ekvivalentan s (a_2). Znamo da F_B zadovoljava (A_2) i f_B zadovoljava (a_2). Konačno, spomenu smo da je (a_4) ekvivalentan s (a_2). Zato Bordina funkcija društvenog izbora f_B za $k =$ zadovoljava i aksiom (a_4).

5.4. Kratak dokaz te tvrdnje nalazi se u [8].

Bibliografija

[1] K.J. Arrow, *Social choice and individual values*, Wiley, 1951. (prvo izdanje); 1963. (drug izdanje). Dostupno na: http://cowles.econ.yale.edu/P/cm/m12-2/

[2] M. Botić, *Arrowljev teorem*, diplomski rad, PMF-Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu 2011.

[3] P.J. Cameron, *Combinatorics: topics, techniques, algorithms*, Cambridge University Press 1994.

[4] D. Ciraki, *Teorija javnog izbora i paradoksi glasovanja*, Politička misao **33** (1996), 198.–225 Dostupno na: http://fakultet.fpzg.hr/politicka-misao/DataStorage/Articles/900.pdf

[5] A. Gibbard, *Manipulation of voting schemes: a general result*, Econometrica **41** (1973) 587.–601.

[6] E. Muller, M.A. Satterthwaite, *The equivalence of strong positive association and strategy proofness*, Journal of Economic Theory **14** (1977), 412.–418.

[7] I. Nakić, *Diskretna matematika*, skripta, PMF-Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, 2009 Dostupno na: http://web.math.hr/nastava/komb/predavanja/predavanja.pdf

[8] P.J. Reny, *Arrow's theorem and the Gibbard-Satterthwaite theorem: a unified approach* Economics Letters **70** (2001), 99.–105. Dostupno na: http://home.uchicago.edu/ preny/paper /arrow-gibbard-satterthwaite.pdf

[9] M.A. Satterthwaite, *Strategy-proofness and Arrow's conditions: existence and correspondenc theorems for voting procedures and social welfare functions*, Journal of Economic Theory **1** (1975), 187.–217.

[10] Wikipedia, *Borda count*, svibanj 2011.
http://en.wikipedia.org/wiki/Borda_count

[11] Wikipedia, *Instant-runoff voting*, svibanj 2011.
http://en.wikipedia.org/wiki/Instant-runoff_voting

---

[1] U Pravilniku PMF–Matematičkog odsjeka stoji odredba „u slučaju izjednačenog broja glasova, odlučuje glas pročelnika”.
[2] Arrow je u [1] zapravo upotrijebio naziv *possibility theorem*, tj. teorem mogućnosti.

ISSN 1334-6083