UDK: 514.113(049.3)
Stručni članak
Primljeno: 20. 3. 2009.
Prihvaćen: 23. 11. 2009.

TRI NELOGIČNOSTI JEDNE DEFINICIJE

Izet KALABA, prof.
Srednja škola fra Andrije Kačića Miošića, Ploče
e-mail: mkalaba@inet.hr

Sažetak: *U ovom članku bavit ćemo se definicijom uspravne piramide, upozoriti na određene njezine nelogičnosti te na kraju predložiti novu definiciju, kao zamjenu, koja potpuno mijenja pojam uspravne piramide. Zbog toga bi, po meni, trebalo promijeniti dio nastavnog programa koji se odnosi na spomenutu problematiku, a time bi i udžbenici pretrpjeli određene izmjene.*

Ključne riječi: *definicija, aksiom, uspravna piramida, kosa piramida, nastavni plan i progtam*

UVOD

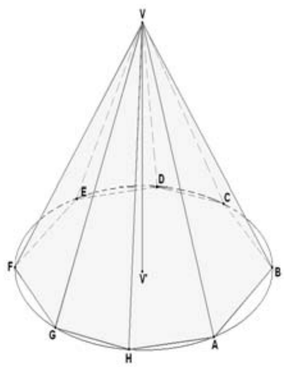
Na ovo me pisanje natjerala sama praksa rada u jednom razrednom odjelu, s budućim *operaterima lučkom mehanizacijom*, koji u razrednoj knjizi ispod predmeta *Matematika* imaju predmet *Slaganje i krcanje tereta*, sve s ciljem povezivanja teorije izložene na nastavnom satu s njihovom budućom praksom. Hoće li čitatelj koji poznaje euklidsku geometriju od njezinih osnova do diferencijala na kraju članka ostati začuđeniji nego ikada zbog toga što je netko pokušao mijenjati samu definiciju, to je velika kušnja ovoga članka.

SADAŠNJA DEFINICIJA USPRAVNE PIRAMIDE

U svim udžbenicima (ili bar u onima po kojima radim, a navedeni su na kraju članka u *literaturi*) stoji sljedeća definicija:

Def. 1. Piramida je uspravna ako su joj svi bočni bridovi jednake duljine.

Prema toj bi definiciji osmerostrana piramida sa sl. 1 bila uspravna:

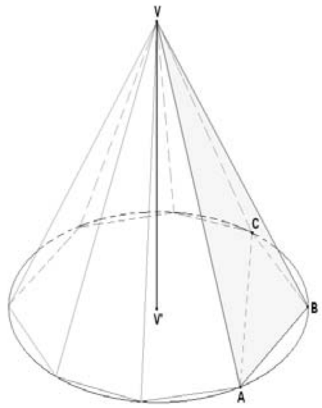


Sl. 1. Nožište V' visine piramide pada u središte bazi opisane kružnice.

Kako su svi bočni bridovi jednake duljine, to je prethodna piramida, po def. 1. uspravna.

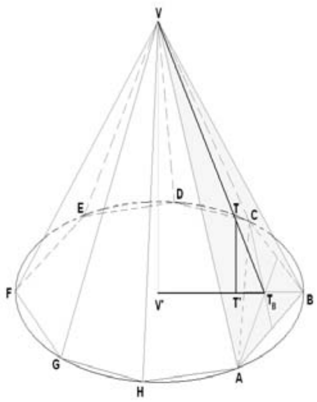
PRVA NELOGIČNOST

Uočimo trostranu piramidu ABCV kao dio prethodne pravilne osmerostrane piramide ABCDEFGHV. Ona je također, po def. 1, uspravna, sl. 2:



Sl. 2. Uspravna trostrana piramida

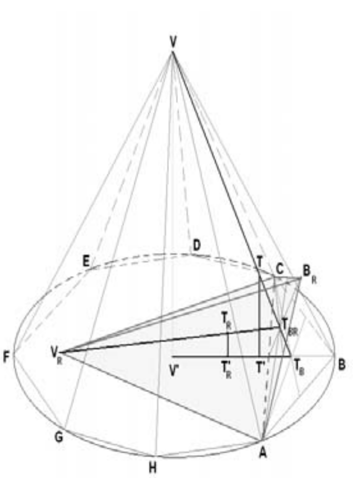
Nelogičnost uspravnosti ove piramide nije u tome što joj je nožište visine, točka V', izvan baze, nego što ta piramida ne može stajati na svojoj bazi; jednostavno će se srušiti, rotirat će oko osnovnog brida AC dok joj vrh V ne dođe u ravninu sada već bivše baze ABC. Taj pad (rotacija, rušenje) prikazan je na sl. 3:



Sl. 3. Uspravna je piramida pala!!!

Sada je piramida promijenila bazu ABC u ACV_R, a vrh je točka B_R. Točka B_R nastala je rotacijom točke B oko pravca AC, a točka V_R istom rotacijom točke V. Kut rotacije jest šiljasti kut između ravnina pobočke ACV i baze ABC sa sl. 2.

Zašto je piramida pala? A bila je uspravna! Naravno da neke riječi koje upotrebljavamo u matematici ne znače ono što znače kada ih upotrebljavamo u svakodnevnom životu, ali za učenika osmoga razreda ili za moje spomenute učenike koji će slagati teret bilo u lučkom skladištu u Pločama (drugoj najvećoj luci u Hrvatskoj po teretnom prometu), bilo u brodu ili na njemu trebala bi ta riječ *uspravno* značiti isto, inače će im se teret srušiti (možete samo zamisliti složenu geometriju unutrašnjosti broda).



Sl. 4. Trostrana uspravna piramida prije pada

Znamo da je težište piramide, točka T, udaljena od baze za duljinu četvrtine visine piramide, tj.

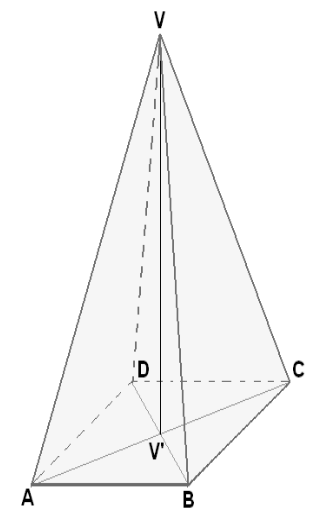
$$|VV'| = 4|TT'|,$$

te se laganim računom pokaže da je točka T' izvan baze ABC. Kada je ortogonalna projekcija težišta izvan baze, tijelo pada (fizičari bi za težište rekli *centar mase*; kod homogenih tijela taj se centar mase poklapa s našim, *geometrijskim* težištem tijela). Da smo umjesto pravilne osmerostrane uzeli pravilnu šesterostranu piramidu, točka T' bila bi točno na osnovnom bridu AC, trostrana bi piramida „lebdjela" na granici između pada i stajanja. Usput, točka T_B težište je baze ABC, koja je jednakokračan trokut, jer je dio pravilnog osmerokuta.

DRUGA NELOGIČNOST

Pogledajmo piramidu kojoj je baza romb, a nožište joj je visine u sjecištu dijagonala baze, sl. 5:

Sl. 5. Piramida koja nije uspravna (???)



Zašto ova piramida nije uspravna, kada je ona, gledano laički, uspravna da uspravnija ne može biti? Bočni bridovi AV i CV dulji su od bočnih bridova BV i DV te po def. 1. piramida nije uspravna. Kod prizme imamo sljedeće: ako prizma nije uspravna, onda je kosa; ovdje ne možemo reći da je piramida sa sl. 5 *kosa*, jer su sve četiri pobočke pod jednakim kutom nagnute u odnosu na ravninu baze. Uostalom, u našim udžbenicima za osnovnu i srednju školu uopće nema pojma *kosa piramida*.

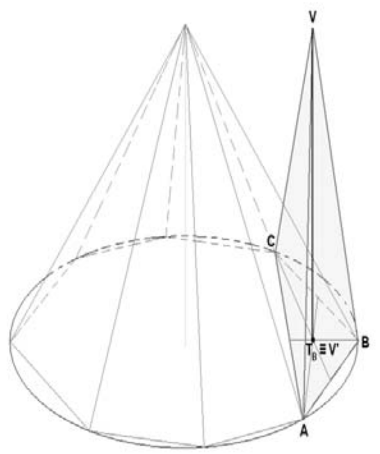
Trebalo bi omogućiti da **svaki konveksni mnogokut** može biti baza uspravne piramide. Def. 1 to sputava. Naprimjer, neka je baza pravokutni trapez. Oko takva trapeza ne može se opisati kružnica, dakle piramida s takvom bazom ne može imati sve bočne bridove jednake duljine, te ne može biti uspravna u smislu spomenute def. 1.

Nova def. 2, koja će ubrzo slijediti, omogućit će da se i piramida sa sl. 5 može nazvati uspravnom, a i svaka ona kojoj je baza konveksni mnogokut, pri ispravnom odabiru vrha, postat će uspravna.

TREĆA NELOGIČNOST

Osobno ne volim definicije koje u sebi imaju implikaciju tipa: ako… onda..., ako se ta definicija može drukčije formulirat bez te implikacije. Def. 1 ima tu implikaciju. Tada neoprezan nastavnik upadne u zamku dokazivanja definicije, a učenik misli da je $a \Rightarrow b$ isto što i $b \Rightarrow a$, pa se opet nastavnik upita zašto implikacija u definiciji nije zamijenjena sa: ako i samo ako... onda... Zašto su osnove matematičke logike naprasno iz udžbenika matematike prebačene u udžbenik informatike, jer tamo, u tom blještavilu Worda, Excela, Accessa.. naš zakon kontrapozicije ($a \Rightarrow b \Leftrightarrow \neg b \Rightarrow \neg a$) stoji ugašen, nijem, dalek, bez one radosti koja iz njega zrači kada tom tautologijom dokazujemo određene matematičke tvrdnje. Zato bi, po meni, definicija 1 bolje izgledala u obliku (to još nije nova definicija koja bi zamijenila def. 1): Uspravna piramida jest piramida kod koje su svi bočni bridovi jednake duljine. Ona je opisna, a ako netko misli da se i u njoj krije implikacija, onda je ona manje vidljiva.

Sjetimo se kako neki nastavnici dokazuju da je, recimo, $2^0 = 1$, po modelu $2^3 : 2^3 = 2^{3-3} = 2^0$, dok je $2^3 : 2^3 = 8 : 8 = 1$, te izjednačivanjem desnih strana dobiju $2^0 = 1$ (zanimljivo kako su učenici zadovoljni ovakvim objašnjenjem iako im je prije rečeno da je $a^0 = 1$, za $a \neq 0$, po definiciji; dotada su učenici pretpostavljali da je $2^0 = 0$). Naravno da se u ovom članku ne može ući u svu kompleksnost *definicije* općenito, jer bi za to trebao jedan veći rad, možda čak i knjiga s temom *Definicija u matematici*.



NOVA DEFINICIJA USPRAVNE PIRAMIDE

Def. 2. Uspravna piramida jest piramida kojoj nožište visine pada u težište baze.

Dakle, točke se V' i T_B poklapaju. Naravno, s njima se poklapa i točka T', ortogonalna projekcija težišta T piramide. Po ovoj definiciji piramida sa sl. 2 ne bi bila uspravna. Evo kako bi izgledala uspravna piramida koja ima istu visinu i istu bazu kao ta piramida:

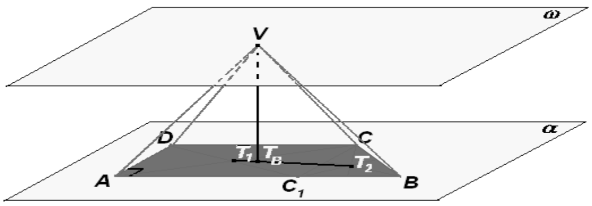
Sl. 6. Uspravna piramida po novoj definiciji

Pozorni će čitatelj uočiti da smo osmerostranu piramidu malo rotirali oko njezine visine; to smo učinili samo zbog toga da se bočni bridovi AV i CV trostrane piramide ne bi dijelom preklapali na slici, dakle rotacija je nebitna za temu članka. Naravno da ovako definirana uspravna piramida stoji na bazi, ne ruši se, jer je težište konveksne baze uvijek unutar baze, za razliku od središta opisane kružnice, koje može biti izvan nje ili čak ne postojati.

Kod pravilnih piramida ništa se neće promijeniti, jer se kod pravilnih mnogokuta središte opisane kružnice poklapa s njegovim težištem.

Teorem 1. Za svaki konveksni mnogokut postoji točka izvan ravnine tog mnogokuta koja je vrh **uspravne** piramide čija je baza taj mnogokut.

Dokaz: Točka se nalazi na pravcu koji je okomit na mnogokut u njegovu težištu. Tih je točaka beskonačno mnogo, no ako je zadana i visina piramide, onda postoji samo jedna takva točka (ne računajući njezinu osnosimetričnu točku u odnosu na ravninu baze); sl. 7:



sl.7. Za bazu smo uzeli već prethodno spomenuti pravokutni trapez, koji smo podijelili dužinom CC_1 na pravokutnik i

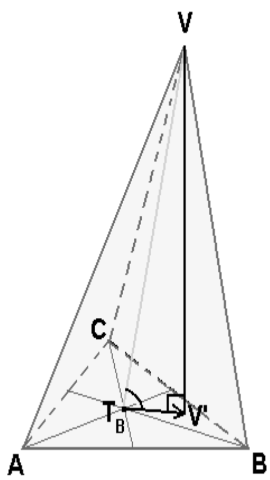
trokut, našli njihova težišta T_1 i T_2 i na njihovoj spojnici konstruirali točku $T_{B,}$ koja je težište trapeza na način da je:

$$\left| T_1 T_B \right| : \left| T_B T_2 \right| = P_2 : P_1 = \left| BC_1 \right| : 2 \left| AC_1 \right|$$

gdje je P_1 površina pravokutnika, a P_2 površina trokuta. Primjer služi kao ilustracija činjenice da se „povećao" broj uspravnih piramida; ako se služimo def. 2, ta nova definicija čak dovodi i do novih (ili drukčijih) teorema, poput prethodnog teorema 1. Naravno da promjena definicije u nekoj teoriji nije toliko revolucionarna kao promjena aksioma te teorije, ali ne znam zašto mi baš sad na pamet padaju matematičari Gödel i Zermelo. Po Gödelu, unutar svake teorije, ma kako bila logički ustrojena, kao što je i sama matematika, pojavit će se pitanje na koje se ne može točno odgovoriti, ili će se pak javiti pogreška pa i proturječnost, dok po Zermelu, ako se neki problem ne može riješiti, treba pokušati tu teoriju nadopuniti novim aksiomom. Jednom sam u šali rekao kolegi da sve što je Newton znao o matematici, znamo i mi (misleći da živimo 3,5 stoljeća poslije njega, a uzeo sam ga za primjer jer je bio briljantan um koji je matematici podario ono što, vjerojatno, nitko prije ni poslije njega nije), na što se on nasmijao i rekao da nije siguran da ja i on znamo ono što su znali spomenuti matematičari Gödel i Zermelo.

ŠTO DOBIVAMO, A ŠTO GUBIMO NOVOM DEFINICIJOM

Dobivamo bolju zornost pojma *uspravna piramida*, odnosno geometrijski pojam *uspravno* poklapa se s tim pojmom u svakodnevnom životu. Drugo, dobivamo na praktičnosti, jer kad se neki teret složi u obliku uspravne piramide, sigurno neće pasti. Dakle, primjer kako se teorija praksom potvrđuje, a praksa teorijom osmišljuje. Treće, sada možemo definirati i *kosu piramidu*, kao piramidu koja nije uspravna. Čak možemo reći da je nagnuta u smjeru (orijentaciji) vektora T_BV', i to pod šiljastim kutom između VT_B i T_BV' (T_B je težište baze), sl. 8:



sl. 8. Kosa piramida

Naravno, kao i kose prizme, neke kose piramide mogu stajati na svojoj bazi, a neke ne (već smo rekli da to ovisi o tomu je li ortogonalna projekcija težišta prizme odnosno piramide na ravninu baze, unutar ili izvan baze).

„Gubimo” niz zadataka tipa: svi bočni bridovi (bivše) uspravne piramide zatvaraju s ravninom baze kutove po 58^0 itd.

U zadacima po staroj definiciji za nepravilnu uspravnu trostranu piramidu služili smo se formulom

$$r = \frac{abc}{4P}$$

kako bismo izračunali priležeću katetu za kut između bočnog brida i ravnine baze, u pravokutnom trokutu gdje je taj bočni brid hipotenuza, a visina *v* nasuprotna kateta. Po novoj definiciji (za uspravnu piramidu) promijenila se priležeća kateta, ona je $\frac{2}{3}t_a$ (ili dvije trećine t_b, odnosno t_c), dok su hipotenuza i nasuprotna kateta ostale kao prije.

Izraz je za t_a:

$$t_a = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$$

dok se za t_b i t_c izrazi dobivaju samo kružnom zamjenom slova. Moglo bi se pokazati da ako je osnovni brid *a* uspravne trostrane piramide manji od *b*, onda je bočni brid mimosmjeran sa *a* veći od analognog za *b*. Ovo nije novi teorem nego samo kraća formulacija zahvaljujući novoj def. 2. Ujedno je i primjer kako uvođenje novih definicija sistematizira teoriju, čini je preglednom i manje glomaznom.

Nekoć davno, htio sam geometriju Lobačevskog smjestiti u Descartesov koordinatni sustav, uzimajući za ha-pravac jednu granu one e-hiperbole kod koje je poluos *b* duljine 1, a poluos joj *a* izlazi iz ishodišta pod bilo kojim kutom i bilo koje duljine, uvodeći i metriku u taj model. Bilo je lijepo računom dolaziti do već poznatih teorema. Mislio sam, sve je lijepa tajna i sve ima neko bezgranično trajanje, oko svega su jaki odsjaji logike i duboke intuicije. Tada sam došao do neobičnog poučka, da ne postoji ha-kružnica po volji velikog opsega. Kako u dostupnoj literaturi nisam uspio naći taj poučak, posumnjao sam da možda aksiomatika ha-geometrije ne važi u tom mom analitičkom modelu. Zaboravio sam na taj rad poslije, pedagoški rad u učionici nudio je nove izazove. Zašto je jezik matematike, kao matične znanosti nastavnog predmeta *matematike*, tako semantički siromašan a sadržajno bogat, toliko simbolički koncizan i pojmovno apstraktan da se razmatranja, čak i u geometriji, mogu slijediti a da se pritom na umu nema nikakva interpretacija!

U razredu pak nastavnik matematike treba biti dovoljno konkretan kako bi učenici razumjeli sadržaj i primijenili naučeno, te dovoljno apstraktan jer matematika razvija i apstraktan način mišljenja, koji je potreban za transfer znanja. Ako nastavnik ne njeguje ovo drugo, onda je za kvalitetnog učenika sudjelovanje u toj nastavi čisto traćenje, gubljenje ne samo vremena nego i prigode za taj razvoj. Kako naći balans između tih dviju krajnosti?

ZAKLJUČAK

Naravno, ja se i dalje u nastavi koristim def. 1 jer imam slobodu rada samo unutar nastavnog programa. Ali zato kada s učenicima, *operaterima lučkom mehanizacijom* (tako im se zove zanimanje), radim uspravnu piramidu, uvijek osjetim određenu nelagodu u svom izrazu, kao da im nešto prešućujem. Hoće li neki novi nastavni program odagnati tu nelagodu? Hoće li mi dati više slobode u radu? Hoće li kurikul reći nastavniku: „Bježi od udžbenika kao jedine knjige!" Ili će se i dalje nastavnik držati udžbenika kao pijan plota, praveći vrlo malu selekciju informacija, zaboravljajući da preobilje informacija zbunjuje učenika, isto kao i njihova oskudnost (oskudnost informacija)?

LITERATURA:

1. Z. Šikić, Lj. Kelava Račić, *Matematika za 2. razred četverogodišnje strukovne škole*, 2. dio, str. 101, Školska knjiga, Zagreb 2007.
2. J. Gusić, P. Mladinić, M. Pavković, *Matematika za 2. razred opće gimnazije*, 2. dio, str. 160 i 161, Školska knjiga, Zagreb 2008.
3. V. Matijević, Đ. Salamon, B. Šego, *Matematika u struci 3*, udžbenik za strojarska zanimanja, str. 59, Alka script, Zagreb 2008.
4. V. Kadum, *Matematika za 2. razred ekonomskih škola*, str. 226, Neodidacta, Zagreb 1998.
5. Mrkonjić, J. Ujević, *Matematika za drugi razred industrijskih i obrtničkih škola*, str. 118, Birotehnika, Zagreb 1994.
6. Đ. Salamon, B. Šego, *Matematika u struci 2*, str. 115, Alka script, Zagreb 2006.
7. V. Erceg, *Gospodarska matematika 2*, str 135, HoReBa, Pula 2003.
8. A. Kurepa, S. Kurepa, *Matematika 2*, str. 131, Školska knjiga, Zagreb 1988.

UDC 514.113(049.3)
Professional article
Accepted: 20. 3. 2009.
Confirmed: 23. 11. 2009.

THREE ILLOGICALITIES OF ONE DEFINITION

Izet KALABA, prof.
Secondary school of fra Andrija Kačić Miošić
e-mail address: mkalaba@inet.hr

Summary: *This article deals with the definition of right pyramid, warns about its certain illogicalities and finally suggests a new definition as an alternative, which completely changes the notion of right pyramid. Due to this, in author's opinion, the part of educational program that refers to the mentioned problem area should be altered, including the textbooks which should also undergo certain changes.*

Keywords: *definition, axiom, right pyramid, skew pyramid, instructional program*