

## IMAJU LI MEDVJEDIĆI JEDNAK BROJ BOMBONA? KONCEPTUALNO RAZUMIJEVANJE OSNOVNIH SVOJSTAVA ZBRAJANJA

Daria Rovan

Odsjek za psihologiju, Filozofski fakultet Sveučilišta u Zagrebu  
I. Lučića 3, 10 000 Zagreb  
drovan@ffzg.hr

Nina Pavlin-Bernardić

Odsjek za psihologiju, Filozofski fakultet Sveučilišta u Zagrebu  
I. Lučića 3, 10 000 Zagreb  
nbernardi@ffzg.hr

Vesna Vlahović-Štetić

Odsjek za psihologiju, Filozofski fakultet Sveučilišta u Zagrebu  
I. Lučića 3, 10 000 Zagreb  
vvlahovi@ffzg.hr

### Sažetak

Niz istraživanja upućuje na to da napredak u stjecanju matematičkih kompetencija zahtijeva kvalitativni skok u konceptualnom razumijevanju. Jedan takav ključni konceptualni napredak koji predstavlja osnovu za stjecanje vještine zbrajanja jest razumijevanje odnosa dio-cjelina. Istraživanja redosljeda kojim djeca usvajaju osnovne principe zbrajanja – aditivnost, komutativnost i asocijativnost – omogućuju bolje razumijevanje razvoja znanja o odnosu dio-cjelina. Stoga je cilj ovog istraživanja bio utvrditi postoje li dobne razlike u razumijevanju osnovnih svojstava zbrajanja te utvrditi postoje li razlike u razumijevanju pojedinih svojstava zbrajanja. U istraživanju su sudjelovala djeca predškolske dobi od 4 godine ( $N = 41$ ), 5 godina ( $N = 89$ ) i 6 godina ( $N = 76$ ), te učenici prvog razreda osnovne škole ( $N = 77$ ). Razumijevanje principa zbrajanja ispitano je prezentiranjem zadataka u kontekstu konkretnih objekata. Glavni efekt dobi pokazao se značajnim za sva svojstva zbrajanja, pri čemu se pokazalo da su starija djeca uspješnija u rješavanju ovakvih zadataka. Rezultati također upućuju na to da nema razlika u razumijevanju principa aditivnosti, komutativnosti i asocijativnosti. Kako bismo provjerili postoje li kvalitativne razlike u dječjim obrazloženjima odgovora, detaljno su analizirana objašnjenja koja su djeca davala prilikom rješavanja zadataka. Pokazalo se da djeca uspješna u rješavanju zadataka u pravilu daju bolje elaborirana objašnjenja od one koja griješe, što upućuje na to na različite razine konceptualnog znanja o zbrajanju. Dobiveni rezultati u skladu su s modelom Baroodyja, Wilkinsa i Tiilikainen (2003) te s opisom protokvantitativne razine rezoniranja u okviru modela Resnickove (1992).

**Ključne riječi:** konceptualno razumijevanje, aditivnost, komutativnost, asocijativnost

## UVOD

Kako matematička znanja u današnjem svijetu čine dio temelja gotovo svih ljudskih djelatnosti, sve se više pojavljuje interes za istraživanjem procesa stjecanja znanja iz matematike. Razvoj dječje kompetentnosti u matematici zasniva se na razvoju i povezivanju konceptualnog i proceduralnog znanja (Rittle-Johnson, Siegler i Alibali, 2001). Proceduralno znanje definira se kao sposobnost da se izvrši slijed postupaka potrebnih da bi se riješio problem. Ova je vrsta znanja povezana sa specifičnom vrstom problema te je nije moguće široko generalizirati. Nasuprot tome, konceptualno znanje definira se kao implicitno ili eksplicitno razumijevanje načela koja vrijede u pojedinom području, kao i međusobnih povezanosti između pojedinih dijelova znanja. Ovo je znanje fleksibilno, nije povezano sa specifičnim vrstama problema i time ga je lako moguće generalizirati. Iako se dugo vremena pokušavalo utvrditi koja se od ove dvije vrste znanja pojavljuje prva, trenutno prevladava uvjerenje da je razvoj matematičkih kompetencija iterativni proces u kojem konceptualni napredak vodi do proceduralnog napretka, koji zatim dovodi do daljnjeg konceptualnog napretka (Baroody, Tiilikainen i Tai, 2006; Canobi, 2004; Rittle-Johnson i Alibali, 1999; Rittle-Johnson, Siegler i Alibali, 2001). Ovakav pogled na razvoj matematičkih znanja naglašava potrebu za identifikacijom mehanizama koji se nalaze u podlozi napredovanja u znanju.

Niz istraživanja upućuje na to da napredak u stjecanju matematičkih kompetencija zahtijeva kvalitativni skok u konceptualnom razumijevanju (Baroody, Tiilikainen i Tai, 2006; Siegler, 2000). Upravo zbog toga što konceptualno znanje uključuje razumijevanje odnosa unutar pojedinog područja, ono pruža bolju osnovu za daljnje učenje u usporedbi s proceduralnim znanjem. Konceptualno znanje s vremenom postaje sve šire i u većoj mjeri povezano s drugim aspektima znanja, što pruža vrlo dobru i učinkovitu osnovu za daljnji napredak u učenju (Baroody, Tiilikainen i Tai, 2006).

Jedan takav ključni konceptualni napredak predstavlja razumijevanje odnosa dio-cjelina, koje se očituje u prepoznavanju da se cjelina sastoji od dijelova i da se dijelovi mogu kombinirati u cjelinu. Ovaj je konstrukt osobito važan za razumijevanje ranog učenja matematike jer razumijevanje odnosa dio-cjelina predstavlja osnovu za stjecanje osnovnih aritmetičkih vještina (Sophian i Vong, 1995). Na razvoju znanja o odnosu dio-cjelina temelji se i usvajanje osnovnih svojstava zbrajanja.

Shvaćanje osnovnih svojstava zbrajanja važan je aspekt matematičkog znanja (Resnick, 1992) i predstavlja konceptualnu osnovu za rasuđivanje o relacijama između različitih matematičkih izraza koji uključuju zbrajanje. Osnovna svojstva zbrajanja su aditivnost, komutativnost i asocijativnost. Svojstvo aditivnosti podrazumijeva da se veći skupovi sastoje se od manjih skupova i iskazuje se na sljedeći način:  $(a + b) + c = a + b + c$ . Svojstvo komutativnosti upućuje na to da ukupan rezultat ne ovisi o redosljedu pribrojnika ( $a + b + c = b + a + c$ ), dok se svojstvo asocijativnosti odnosi na to da zadaci u kojima su skupovi razdvojeni te ponovno kombinirani drukčijim redosljedom imaju isti rezultat [ $(a + b) + c = a + (b + c)$ ].

Dosadašnji pokušaji formiranja modela razvoja razumijevanja svojstava zbrajanja prvenstveno su vezani uz svojstvo komutativnosti, bilo u užem kontekstu (Baroody i Gannon, 1984; Baroody, Wilkins i Tiilikainen, 2003) ili u okviru sveobuhvatnog modela matematičkog mišljenja (Resnick, 1992). No, kako Resnick (1992) ujedno naglašava da se dječje razumijevanje asocijativnosti i komutativnosti ne razlikuje i da je utemeljeno u razumijevanju aditivnosti, možemo pretpostaviti da isti razvojni slijed koji je pretpostavljen za svojstvo komutativnosti, vrijedi i za ostala svojstva zbrajanja.

Prema modelu koji su postavili Baroody i Gannon (1984), razumijevanje komutativnosti razvija se od unarne koncepcije zbrajanja bez razumijevanja komutativnosti do binarne koncepcije zbrajanja i pravog razumijevanja komutativnosti. Unarne operacije su operacije na jednom broju koje rezultiraju drugim brojem (npr. "Karlo je imao tri pikule. Petar mu je dao još dvije. Koliko pikula sada ima Karlo?"), dok pod binarnim operacijama podrazumijeva operacije na dvije količine koje rezultiraju trećom ("Marko ima tri crvene i dvije plave pikule. Koliko pikula ukupno ima Marko?"). Model Baroodyja i Gannon razlikuje četiri razine razumijevanja komutativnosti (nema razumijevanja, protokomutativnost, pseudokomutativnost i prava komutativnost), a detaljnije je prikazan u tablici 1.

Resnick (1992) je ponudila drugačiji pogled na razvoj razumijevanja svojstva komutativnosti. Ona, naime, smatra da razmišljanje predškolske djece uključuje i unarnu i binarnu koncepciju zbrajanja. Za razliku od prethodno navedenog pristupa, kao osnovu razumijevanja komutativnosti istaknula je nenumeričko kvalitativno razumijevanje. Resnick (1992) smatra da u bilo kojem području matematike djeca počinju s konkretnim mišljenjem, napredujući zatim kroz tri razine sve apstraktnijeg mišljenja:

a) *razina 1 - Protokvantitativna matematika*: Na ovoj razini djeca zaključuju o konkretnim objektima bez osvrtnja na specifične količine, odnosno radije koriste kvalitativne (npr. plave loptice + crvene loptice) nego kvantitativne termine ( $5 + 3$ ). Kvalitativno rezoniranje omogućuje predviđanje smjera odgovora, dok kvantitativno rezoniranje omogućuje određivanje točnog odgovora. Korištenjem kvalitativnog rezoniranja, djeca mogu otkriti da dodavanjem elemenata nekom skupu njegova veličina raste, a da se oduzimanjem elemenata njegova veličina smanjuje.

b) *razina 2 - Kvantitativna matematika*: Na ovoj razini djeca mogu zaključivati o brojevima koji su povezani s pojedinačnim smislenim kontekstom. Primjerice, djeca mogu utvrditi da ako dijete koje ima tri loptice dobije još dvije loptice, ukupno ima pet loptica. A osim toga, još mogu utvrditi da oduzimanjem dvije loptice koje je dijete dobilo, ono opet ima tri loptice kao na početku.

c) *razina 3 - Numerička matematika*: Na ovoj razini djeca mogu zaključivati o specifičnim brojevima u apstraktnom kontekstu te tako, primjerice, dijete može izračunati koliko je  $3 + 2$  bez potrebe za smislenim kontekstom. Također, dijete može prepoznati, bez potrebe za računanjem, da je  $3 + 2 - 2$  jednako 3.

Tablica 1. Modeli razvoja razumijevanja svojstva komutativnosti

Baroody i Gannon (1984)	Resnick (1992)	Baroody, Wilkins i Tiilikainen (2003)
<p><i>Razina 0 – unarna koncepcija zbrajanja + nema razumijevanja komutativnosti</i></p> <p>dijete vidi <math>4 + 2</math>, kao <math>4</math> i <math>2</math> više, ali <math>2+4</math> vidi kao <math>2</math> i <math>4</math> više, ne shvaća da je <math>4+2</math> isto što i <math>2+4</math></p>	<p><i>Protokvantitativna (prenumerička)</i></p> <p>plave loptice + crvene loptice = crvene loptice + plave loptice (dio <math>1 +</math> dio <math>2 =</math> dio <math>2 +</math> dio <math>1</math>)</p>	<p><i>Razina 0 – unarna koncepcija zbrajanja + nema razumijevanja komutativnosti</i></p>
<p><i>Razina 1 – unarna koncepcija zbrajanja + protokomutativnost</i></p> <p>dijete može zanemariti redosljed pribrojnika da bi mu računanje bilo lakše, no unatoč tome nije sigurno je li zbroj <math>2+4</math> isti kao i zbroj <math>4+2</math></p>	<p><i>Kvantitativna (specifični brojevi u smislenom kontekstu)</i></p> <p><math>3</math> loptice + <math>4</math> loptice = <math>4</math> loptice + <math>3</math> loptice</p>	<p><i>Razina 1 – unarna koncepcija zbrajanja + nema razumijevanja komutativnosti i binarna koncepcija zbrajanja + protokomutativnost</i></p>
<p><i>Razina 2 – unarna koncepcija zbrajanja + pseudokomutativnost</i></p> <p>dijete još uvijek ima unarnu koncepciju zbrajanja, ali zna da zadaci s istim pribrojnicima imaju isti zbroj</p>	<p><i>Numerička (specifični brojevi u apstraktnom kontekstu)</i></p> <p><math>3 + 4 = 4 + 3</math></p>	<p><i>Razina 2 – unarna koncepcija zbrajanja + protokomutativnost i binarna koncepcija zbrajanja + prava komutativnost</i></p>
<p><i>Razina 3 – binarna koncepcija zbrajanja + prava komutativnost</i></p> <p>dijete ima binarnu predodžbu zbrajanja i pravo matematičko razumijevanje komutativnosti (<math>a + b = b + a</math>)</p>	<p><i>Razina operacija (opći aritmetički principi)</i></p> <p><math>a + b = b + a</math></p>	<p><i>Razina 3 – unarna koncepcija zbrajanja + pseudokomutativnost i binarna koncepcija zbrajanja + prava komutativnost</i></p>

d) *razina 4 - Operativna matematika*: Na ovoj razini djeca usvajaju opća aritmetička načela, odnosno mogu tretirati operacije s brojevima kao konceptualne entitete o kojima se može zaključivati u apstraktnom kontekstu. Primjerice, dijete može prepoznati princip inverzije, tj. da dodavanje bilo kojeg broja može biti vraćeno u prethodno stanje oduzimanjem tog broja ili obrnuto (npr.  $a + b - b = a$  ili  $a - b + b = a$ ).

Ovaj opći model matematičkog rasuđivanja preslikava se i na model razvoja razumijevanja svojstva komutativnosti prikazan u tablici 1. Resnick (1992) smatra da je za razvoj razumijevanja komutativnosti temeljno razumijevanje principa aditivnosti koje se vezuje još uz protokvantitativnu razinu. Djeca najprije znaju da se cjelina može rastaviti na dijelove, da se dijelovi mogu ponovno kombinirati u

cjelinu i da redosljed kojim su dijelovi kombinirani ne mijenja cjelinu (protokvanzitivna razina). Zatim dijelovi i cjelina dobivaju količinu (kvantitativna razina). Zatim djeca više ne trebaju konkretne objekte koji bi prikazivali količinu, već počinju shvaćati simbole brojeva (numerička razina). Konačno, počinju shvaćati općenite odnose među brojevima (razina operacija) i tada razumiju smisao principa komutativnosti.

Međutim, nalazi provedenih istraživanja (Wilkins, Baroody i Tiilikainen, 2001) upućuju na to da pojedine postavke modela Baroodyja i Gannon (1984), kao i modela koji je postavila Resnick (1992) nisu točne. Iz postavki prvog modela slijedi da bi djeca trebala prije razviti razumijevanje komutativnosti kod zadataka koji odražavaju unarnu koncepciju zbrajanja nego kod binarnih. Za razliku od toga, prema modelu Lauren Resnick (1992), djeca bi trebala jednako dobro razumjeti svojstvo komutativnosti i kod zadataka s unarnom i s binarnom koncepcijom. Rezultati istraživanja govore suprotno od ovih postavki – djeca svojstvo komutativnosti lakše razumiju kod zadataka s binarnom nego s unarnom koncepcijom (Wilkins, Baroody i Tiilikainen, 2001). U skladu s time, Baroody, Wilkins i Tiilikainen (2003) predlažu novi model razvoja komutativnosti koji ispravlja manjkavosti navedenih modela. Ovaj ujedineni model također je prikazan u tablici 1.

Baroody, Wilkins i Tiilikainen (2003) naglašavaju da su još mnoga pitanja vezana uz razvoj svojstava zbrajanja ostala nedovoljno razjašnjena te postoji potreba za dodatnim empirijskim istraživanjima. Posebno bi bilo značajno utvrditi razvija li se komutativnost simultano s drugim svojstvima zbrajanja, jesu li djeca uspješnija u rješavanju zadataka komutativnosti u konkretnom kontekstu u odnosu na apstraktni kontekst, kao i hoće li biti uspješniji u zadacima koji uključuju manje brojeve u odnosu na one koji uključuju velike brojeve. Pri tome su potrebna istraživanja koja će biti usmjerena na svaku pojedinu razinu modela prikazanog u tablici 1.

Ovim istraživanjem pokušali smo dobiti odgovore na neka od spomenutih nedovoljno rasvijetljenih pitanja vezanih uz razvoj razumijevanja osnovnih svojstava zbrajanja, a pri tome smo se usmjerili na početne razine razumijevanja ovih svojstava. Iako se već dugo smatra da djeca prvo razumiju zbrajanje u kontekstu konkretnih objekata, još se uvijek ne zna dovoljno o razvoju dječjeg znanja svojstava zbrajanja u tom kontekstu (Canobi, Reeve i Pattison, 2003). Istovremeno, izgleda vjerojatno da konceptualno razumijevanje svojstava zbrajanja nastaje opažanjem pravilnosti u načinima na koji se fizički objekti mogu kombinirati (Canobi, Reeve i Pattison, 2002). Stoga upravo spoznaje o dječjem razumijevanju odnosa dio-cjelina u konkretnom kontekstu mogu imati važne teorijske i obrazovne implikacije (Resnick, 1992).

Istraživači se slažu da razvoj razumijevanja svojstava zbrajanja započinje od usvajanja protokvanzitivnog koncepta (Baroody, Wilkins i Tiilikainen, 2003; Resnick, 1992). Međutim, usporedbom različitih modela razvoja razumijevanja komutativnosti možemo uočiti razlike u početnim razinama razumijevanja koje ti modeli predviđaju. Model Baroodyja, Wilkinsa i Tiilikainen (2003) uključuje nultu razinu

razumijevanja s koje djeca prelaze na prvu razinu, koja uključuje koncept protokomutativnosti vezan uz binarnu koncepciju zbrajanja. Nasuprot tome, model Resnickove kao prvu razinu navodi protokvantitativnu razinu i time ne daje dovoljno informacija o tome kad i kako djeca stječu ovu početnu razinu razumijevanja svojstava zbrajanja i što joj prethodi.

Empirijska istraživanja također ne pružaju jasnu sliku početka razvoja konceptualnog razumijevanja svojstava zbrajanja budući da u dosadašnjim istraživanjima ovih svojstava u kontekstu konkretnih objekata nisu utvrđene značajnije dobne razlike. Istraživanjem Canobi, Reevea i Pattison (2002) utvrđene su samo manje razlike između dviju skupina djece prosječne dobi 5 i 6 godina, dok rezultati istraživanja Canobi, Reevea i Pattison (2003) upućuju na to da nema dobnih razlika u konceptualnom razumijevanju, no u tom su istraživanju sudjelovala djeca dobi od 6 do 8 godina. Pretpostavljamo da bi se uključivanjem mlađe djece u istraživanje, kao i povećanjem raspona dobi među sudionicima istraživanja dobili jasniji podaci o postojanju dobnih razlika u početnom razumijevanju svojstava zbrajanja. U skladu s modelom Baroodyja, Wilkinsa i Tiilikainen (2003) možemo pretpostaviti da se najveći dio djece predškolske dobi nalazi ili na nultoj razini ili na prvoj razini, a tek manji broj njih na višim razinama razumijevanja svojstava zbrajanja. Istovremeno, možemo pretpostaviti da s dobi opada broj djece na nultoj razini, a raste broj djece koja se nalaze na višim razinama.

Ovdje bi također bilo važno uzeti u obzir kako sama djeca doživljavaju i objašnjavaju zadatke koji uključuju osnovna svojstva zbrajanja. Dječja objašnjenja rješenja ovih zadataka mogu nam pružiti dodatni uvid u način rasuđivanja djece koja pokazuju različiti stupanj konceptualnog razumijevanja. Zbog toga smo u ovom istraživanju posebnu pažnju poklonili upravo kvalitativnoj analizi dječjih objašnjenja.

Posebno nas je zanimalo utvrditi i postoje li razlike u razvoju razumijevanja različitih svojstava zbrajanja – aditivnosti, komutativnosti i asocijativnosti. Iako Resnick (1992) pretpostavlja da se komutativnost i asocijativnost istovremeno razvijaju, rezultati nekih istraživanja pokazuju da se razumijevanje komutativnosti događa prije nego razumijevanje asocijativnosti (Canobi, Reeve i Pattison, 1998, 2002, 2003), te su svakako potrebna dodatna pojašnjenja razvoja razumijevanja svojstava zbrajanja.

Sažeto, u ovom smo se istraživanju usmjerili na sljedeće probleme:

1) Utvrditi postoje li dobne razlike u razumijevanju osnovnih svojstava zbrajanja te utvrditi postoje li razlike u razumijevanju pojedinih svojstava zbrajanja – aditivnosti, komutativnosti i asocijativnosti.

2) Detaljno analizirati te kategorizirati objašnjenja koja djeca daju pri rješavanju zadataka aditivnosti, komutativnosti i asocijativnosti, utvrditi postoje li razlike u objašnjenjima između djece koja griješe i koja ne griješe pri rješavanju ovih zadataka, između djece različite dobi te među zadacima kojima se ispituju različita svojstva zbrajanja.

Da bismo na postavljene probleme dobili odgovore što izravnije vezane upravo uz početne razine razumijevanja svojstava zbrajanja, izabrali smo zadatke s konkretnim objektima koji su bili formirani upravo na takav način da se djeci olakša rezoniranje na protokvantitativnoj razini. Iz istog razloga odabrani su zadaci koji se odnose samo na binarnu koncepciju znanja koju djeca lakše usvajaju (Wilkins, Baroody i Tiilikainen, 2001). Također smo vodili računa o tome da uspješnost rješavanja zadataka ne ovisi o uvježbanosti vještine brojenja i računanja budući da nam je u središtu interesa bilo konceptualno, a ne proceduralno znanje.

## METODA

### Sudionici

U istraživanju su sudjelovala djeca predškolske dobi od 4 godine ( $N = 41$ ), 5 godina ( $N = 89$ ) i 6 godina ( $N = 76$ ), te učenici prvog razreda osnovne škole dobi od 7 godina ( $N = 77$ ). Sudionici su bili polaznici dva zagrebačka vrtića i dvije zagrebačke osnovne škole. U istraživanju je ukupno sudjelovalo 283 djece, od čega je bilo 148 dječaka (52,3%) i 135 djevojčica (47,7%). Za sudjelovanje u istraživanju dobivena je pismena suglasnost od strane roditelja.

U prvom dijelu istraživanja kvantitativnim postupcima su analizirani podaci dobiveni od svih sudionika, dok je u drugom dijelu istraživanja kvalitativna analiza provedena na poduzorku djece. Za to je među sudionicima koji su imali sve točne odgovore po slučaju odabrano njih 6 u svakoj dobnoj skupini. Također je među onima koji su griješili u odgovorima u svakoj dobnoj skupini po slučaju odabrano 6 sudionika, s izuzetkom dobne skupine od 7 godina, gdje je odabrano 5 djece (samo je 5 ispitane djece ove dobi napravilo pogreške).

### Postupak

Razumijevanje svojstava zbrajanja ispitano je individualno, u kontekstu konkretnih objekata. Postupak ispitivanja osmišljen je slično kao i u dosadašnjim istraživanjima (Canobi i sur., 2002; Sophian, Harley i Martin, 1995; Wilkins i sur., 2001). Djeca su procjenjivala ekvivalentnost parova zadataka koji su bili sastavljeni s ciljem ispitivanja razumijevanja osnovnih svojstava zbrajanja. Preciznije, djeca su trebala odgovoriti imaju li dva medvjedića jednak broj bombona, pri čemu su medvjedićima bomboni bili raspodijeljeni prema načelima aditivnosti  $[(a + b) + c = a + b + c]$ , komutativnosti  $(a + b + c = a + c + b)$  ili asocijativnosti  $[(a + b) + c = a + (b + c)]$ .

Sa svakim djetetom provedeno je individualno ispitivanje u trajanju od otprilike petnaest minuta. Ispitivanje su provodili posebno uvježbani studenti psiholo-

gije. Prije samog početka ispitivanja ispitivač je postavio dva medvjedića nasuprot djetetu te je ispred svakog medvjedića stavio po 3 veće bijele kutije (koje su imale funkciju zagrada). Također je pripremio dvije plave kutije u kojima su bila po 3 plava bombona, dvije crvene kutije sa po 4 crvena bombona te dvije zelene kutije sa po 10 zelenih bombona. Na početku ispitivanja ispitivač je objasnio djetetu kako će sada igrati igru u kojoj dva medvjedića po imenu Tin i Tina dobivaju bombone, pri čemu je zadatak djeteta da kaže jesu li Tin i Tina dobili jednak broj bombona. Zatim je ispitivač djetetu pokazao dvije plave kutije sa po tri plava bombona i rekao: "Pogledaj, ove dvije kutije su jednake. U svakoj se nalaze po tri plava bombona!". Ponovio je isti postupak s dvije crvene kutije, pri čemu su u svakoj kutiji bila četiri crvena bombona. Ispitivač je na kraju djetetu pokazao dvije zelene kutije sa po deset zelenih bombona poslaganih jedni na druge, kako ih dijete ne bi moglo prebrojiti, uz objašnjenje: "Pogledaj, ove dvije kutije su jednake. U svakoj se nalazi jednak broj zelenih bombona!". U ovom se slučaju nije spominjalo koliki je broj bombona u kutiji, s ciljem da se spriječi da dijete pri rješavanju zadataka računa u sebi (u

Tablica 2. Primjeri zadataka korištenih za ispitivanje razumijevanja osnovnih svojstava zbrajanja

Svojstvo zbrajanja	Matematički izraz	Tekst zadatka
Aditivnost	$(x + 3) + 4$	"Tin dobije kutiju sa zelenim bombonima i 3 plava bombona (stavi se u prvu bijelu kutiju), zatim dobije 4 crvena bombona (stavi se u drugu bijelu kutiju).
	$x + 3 + 4$	Tina dobije kutiju sa zelenim bombonima (stavi se u prvu bijelu kutiju), zatim dobije 3 plava bombona (stavi se u drugu bijelu kutiju), zatim dobije 4 crvena bombona (stavi se u treću bijelu kutiju). Imaju li Tin i Tina jednak broj bombona?"
Komutativnost	$x + 3 + 4$	"Tin dobije kutiju sa zelenim bombonima (stavi se u prvu bijelu kutiju), zatim dobije 3 plava bombona (stavi se u drugu bijelu kutiju), zatim dobije 4 crvena bombona (stavi se u treću bijelu kutiju).
	$x + 4 + 3$	Tina dobije kutiju sa zelenim bombonima (stavi se u prvu bijelu kutiju), zatim dobije 4 crvena bombona (stavi se u drugu bijelu kutiju), zatim dobije 3 plava bombona (stavi se u treću bijelu kutiju). Imaju li Tin i Tina jednak broj bombona?"
Asocijativnost	$(x + 3) + 4$	"Tin dobije kutiju sa zelenim bombonima i 3 plava bombona (stavi se u prvu bijelu kutiju), zatim dobije 4 crvena bombona (stavi se u drugu bijelu kutiju).
	$x + (3 + 4)$	Tina dobije kutiju sa zelenim bombonima (stavi se u prvu bijelu kutiju), zatim dobije 3 plava i 4 crvena bombona (stavi se u drugu bijelu kutiju). Imaju li Tin i Tina jednak broj bombona?"



slučaju da je dijete pitalo koliko ima zelenih bombona, ispitivač mu je odgovorio da ima puno zelenih bombona). Ispitivač je zatim napomenuo djetetu da bombone ne treba brojiti.

S ciljem da se dijete što bolje upozna sa zadatkom te da se provjeri je li zapamtio da kutije iste boje sadrže isti broj bombona, na početku ispitivanja su mu prezentirana tri zadatka za vježbu, pri čemu je svaki medvjedić dobivao samo po jednu kutiju bombona. Dijete je od ispitivača dobilo povratnu informaciju o točnosti odgovora. Nakon uvježbavanja, tijekom kojeg je utvrđeno da dijete daje točne odgovore na zadatke za vježbu, djetetu su prezentirani testni zadaci.

Svako je dijete dobilo kombinaciju od 15 zadataka raspoređenih po slučajnom rasporedu. Među testnim zadacima bila su po tri zadatka za svako svojstvo zbrajanja (aditivnost, komutativnost, asocijativnost), te po tri zadatka identičnosti ( $a + b = a + b$ ) i nejednakosti ( $a + b = b + c$ ). Odgovori na zadatke identičnosti i nejednakosti poslužili su za otkrivanje sudionika koji su imali sklonost davanju pristranih odgovora. Naime, na pristranost su upućivali odgovori u kojima bi dijete za zadatak identičnosti reklo da medvjedići nemaju jednak broj bombona, ili u kojima bi za zadatak nejednakosti reklo da imaju jednak broj bombona. Primjeri zadataka kojima se ispitivalo razumijevanje svojstava zbrajanja nalaze se u tablici 2.

Tijekom ispitivanja ispitivač je sjedio s desne strane djetetu i stavljao bombone u bijele kutije slijeva nadesno, na način da sve grupe bombona ostanu vidljive djetetu tako da se ono ne mora oslanjati na pamćenje riječi ili radnji ispitivača kako bi procijenilo jesu li medvjedići dobili jednak broj bombona. Ispitivač je tekst zadatka izgovarao istovremeno s postavljanjem bombona na odgovarajuća mjesta. Nakon što je dijete dalo svoj odgovor, ispitivač ga je zabilježio te zatražio od djeteta kratko objašnjenje odgovora. Za razliku od probnih zadataka, kod testnih zadataka dijete nije dobilo povratnu informaciju o odgovoru. Dječja objašnjenja zašto misle da medvjedići imaju ili nemaju jednak broj bombona snimana su diktafonima na audiokasete.

## REZULTATI

### Kvantitativna analiza

Prvi je cilj našeg istraživanja bio utvrditi postoje li razlike u razumijevanju pojedinih osnovnih svojstava zbrajanja te utvrditi postoje li dobne razlike u razumijevanju tih svojstava. Da bi se provjerilo jesu li djeca dobro razumjela testne zadatke, izračunana je prosječna uspješnost rješavanja kontrolnih zadataka identičnosti ( $M = 94,2\%$ ;  $SD = 19,3$ ) i nejednakosti ( $M = 86,0\%$ ;  $SD = 30,0$ ). Dobiveni rezultati u skladu su s rezultatima prethodnih istraživanja (Canobi, Reeve i Pattison, 2002, 2003) te upućuju na dobro razumijevanje zadataka. Kao pokazatelj razumijevanja pojedinog svojstva zbrajanja korišten je postotak točnih odgovora za to svojstvo,

Tablica 3. Korigirani postotak točnih odgovora za različita svojstva zbrajanja s obzirom na dob djece

Dob	N	Aditivnost		Komutativnost		Asocijativnost	
		M	SD	M	SD	M	SD
4	41	61,0	40,8	56,1	40,4	56,1	39,7
5	89	69,0	42,3	70,4	41,3	67,0	43,4
6	76	78,1	37,9	78,5	37,2	77,6	38,3
7	77	91,8	24,9	91,8	25,5	90,5	27,0
Ukupno	283	76,4	38,2	76,3	38,0	74,7	39,2

korigiran za postotak netočnih pozitivnih odgovora. Naime, da bismo kontrolirali utjecaj mogućih pristranosti pri odgovaranju (davanje samo pozitivnih odgovora ili odgovaranje po slučaju), od postotka točnih odgovora za svako pojedino svojstvo oduzet je postotak netočnih pozitivnih odgovora (da je  $a + b$  jednako  $b + c$ ). Prosječna uspješnost djece različite dobi u rješavanju pojedinih skupina zadataka prikazana je u tablici 3.

Postojanje dobnih razlika u razumijevanju različitih svojstava provjereno je Brown-Forsytheovim testom jednakosti aritmetičkih sredina budući da je prilikom provođenja statističkih analiza utvrđeno da dobivene distribucije nisu normalne (Kolmogorov-Smirnovljev  $z$  kretao se od 6,70 do 6,89;  $p < 0,001$ ) te da Levenov test upućuje na nejednakost varijanci. Brown-Forsytheov test je parametrijski test prikladan za korištenje u slučaju kada distribucije nisu normalne, varijance nisu homogene i kad veličina uzoraka nije podjednaka, a slične je snage kao analiza varijance (Clinch i Keselman, 1982). Značajne razlike dobivene su za sva tri svojstva zbrajanja: aditivnost ( $F^*(3/202,6) = 7,99$ ;  $p < 0,001$ ), komutativnost ( $F^*(3/202,5) = 9,54$ ;  $p < 0,001$ ) i asocijativnost ( $F^*(3/215,3) = 9,25$ ;  $p < 0,001$ ).

Post-hoc usporedbe aritmetičkih sredina (Tamhane T2, Dunnet T3, Games-Howell) upućuju na superiornost sedmogodišnjaka u razumijevanju osnovnih svojstava zbrajanja. Pri razumijevanju svojstva aditivnosti sedmogodišnjaci su bili značajno uspješniji od četverogodišnjaka ( $p < 0,001$ ) i petogodišnjaka ( $p < 0,001$ ), dok je razlika između šestogodišnjaka i sedmogodišnjaka bila marginalno značajna ( $p = 0,05$ ). U razumijevanju svojstava komutativnosti i asocijativnosti sedmogodišnjaci su ponovno bili značajno uspješniji od četverogodišnjaka ( $p < 0,001$ ) i petogodišnjaka ( $p < 0,001$ ). Također, svojstva komutativnosti i asocijativnosti u usporedbi s četverogodišnjacima bolje razumiju i šestogodišnjaci ( $p < 0,05$ ).

Da bi se ispitalo postoje li razlike u dječjem razumijevanju svojstava aditivnosti, komutativnosti i asocijativnosti, korišten je Friedmanov test za zavisne uzorke s obzirom na to da su distribucije rezultata negativno asimetrične. Rezultati provedene analize pokazuju da ne postoji razlika u dječjem razumijevanju svojstava aditivnosti, komutativnosti i asocijativnosti ( $\chi^2_F = 4,44$ ;  $df = 2$ ;  $p > 0,05$ ).

## Kvalitativna analiza

Kako bismo provjerili postoje li kvalitativne razlike u dječjim obrazloženjima odgovora koje bi pokazale različite razine konceptualnog znanja o zbrajanju, provedena je kvalitativna analiza objašnjenja tehnikom analize sadržaja. Kao što je to već navedeno, za kvalitativnu analizu odabran je poduzorak djece i to tako da je za svaku dobnu razinu po slučaju izabrano po šestoro djece koja nisu griješila pri rješavanju zadataka i šestoro djece koja su griješila (s izuzetkom djece od 7 godina, gdje je bilo samo petero djece koja su pri rješavanju načinila pogreške). Sveukupno su analizirana objašnjenja za 47 djece. Kako je za svako dijete analizirano 9 objašnjenja (po 3 za svako svojstvo zbrajanja), ukupno su analizirana 423 dječja objašnjenja odgovora na zadatke.

Analizu sadržaja nezavisno su provodila dva istraživača, a usuglašavali su se u svim ključnim fazama procesa. Analiza je provedena na temelju transkripata dječjih odgovora, a kao elementi analize uzeta su pojedina dječja objašnjenja. Za formiranje kategorija korišten je induktivni pristup.

Prije nego što smo pristupili analiziranju materijala, pregledavanjem zabilješki s ispitivanja određene su preliminarnе kategorije prema kojima ćemo kodirati dječje odgovore. Predviđeno je da se prilikom kodiranja za svaki testni zadatak posebno zabilježi točnost djetetova odgovora te kategorija objašnjenja. U prvom je koraku kodiranje dječjih objašnjenja obavljeno na probnom uzorku, a rezultiralo je manjim revidiranjem korištenih kategorija. Zatim je provedeno kodiranje svih podataka odabranih za analizu. Nakon što je proces kodiranja dovršen, pregledavanjem dobivenih rezultata pojedine su kategorije spojene s ciljem jasnije interpretacije u svjetlu korištenih teorijskih okvira.

U konačnici su formirane sljedeće kategorije: (1) nema objašnjenja, (2) usmjerenost na obilježja irelevantna za rješenje zadatka, (3) usmjerenost na različitosti u elementima zadatka, (4) navođenje (ne)jednakosti, ali bez elaboracije pravila, (5) usporedba prema bojama, (6) usporedba količina, te (7) potpuno objašnjenje. Karakteristična dječja objašnjenja za svaku od navedenih kategorija prikazana su u prilogu 1. Zatim su provedene daljnje analize, pri čemu su kao jedinice analize korištena pojedinačna dječja objašnjenja, kao i dominantni način objašnjavanja za pojedino dijete. Varijabla dominantnog odgovora za svako je dijete formirana za sve zadatke zajedno, kao i pojedinačno za zadatke komutativnosti, asocijativnosti i aditivnosti.

Učestalost korištenja različitih kategorija pojedinačnih dječjih objašnjenja s obzirom na to vezuju li se uz točna ili netočna rješenja zadataka prikazana je u tablici 4. Može se uočiti da se uz netočne odgovore u najvećem postotku pojavljuju kategorije “usmjerenost na irelevantna obilježja” te “usmjerenost na različitosti u elementima zadatka” koje upravo upućuju na to da dijete ne razlučuje koji su odnosi u zadatku bitni za njegovo rješavanje. Iste se kategorije odgovora izuzetno rijetko vezuju uz točne odgovore. Točne odgovore najčešće su pratila objašnjenja iz kategorija “neelaborirane jednakosti” i “usporedbe prema bojama”. Također, isključivo uz toč-

Tablica 4. Učestalost korištenja različitih kategorija dječjih objašnjenja

Kategorija	Uz točna rješenja		Uz netočna rješenja		Ukupno	
	f	%	f	%	f	%
nema objašnjenja	32	10,9	10	7,8	42	9,9
irelevantna obilježja	13	4,4	28	21,7	41	9,6
imenovanje različitosti	4	1,4	64	49,6	68	16,1
(ne)jednakost neelaborirana	94	32,0	14	10,9	108	25,5
usporedba boja	98	33,3	13	10,1	111	26,2
usporedba količina	45	15,3	-	-	45	10,6
potpuno objašnjenje	8	2,7	-	-	8	1,9
Ukupno	294	100,0	129	100,0	423	100,0

Tablica 5. Dominantne kategorije odgovora s obzirom na dob djece i ovisno o tome rješava li zadatke s pogreškama ili bez njih

Dob		Ne radi pogreške					Radi pogreške					
		4	5	6	7	Ukupno	4	5	6	7	Ukupno	
Dominantni odgovor	nema objašnjenja			2			2				2	
	irelevantna obilježja						2	1	1		4	
	imenovanje različitosti							3	2	3	8	
	(ne)jednakost neelaborirana	2	1	2	1	6	2	1	1	2	6	
	usporedba boja	3	2	3	2	10		1	1		2	
	usporedba količina	1	1		3	5						
	potpuno objašnjenje				1	1						
	više kategorija								1		1	
Ukupno			6	6	6	6	24	6	6	6	5	23

na rješenja vezuju se najnaprednije kategorije objašnjenja (“usporedba količina” i “potpuno objašnjenje”) koje upućuju na više razine konceptualnog razumijevanja osnovnih svojstava zbrajanja.

U tablici 5. prikazane su dominantne kategorije odgovora za svako dijete ovisno o tome rješava li zadatke s pogreškama ili bez njih i s obzirom na dob djeteta. Pri određivanju dominantne kategorije odgovora utvrđeno je da 24 djece (51,1%) konzistentno koristi jednu kategoriju objašnjenja, dok 23 djece (48,9 %) koristi dvije ili više različitih kategorija.

Dobiveni rezultati pokazuju da postoje statistički značajne razlike u korištenju objašnjenja iz različitih kategorija između skupine djece koja griješe i skupine djece koja ne griješe pri rješavanju ovih zadataka ( $\chi^2 = 24,32$ ;  $df = 7$ ;  $p < 0,01$ ). Vrlo

Tablica 6. Kategorije dominantnih odgovora s obzirom na svojstva zbrajanja

Vrsta zadatka	Aditivnost	Asocijativnost	Komutativnost	
Dominantni odgovor	nema objašnjenja	4	4	4
	irelevantna obilježja	5	3	5
	imenovanje različitosti	8	9	8
	(ne)jednakost neelaborirana	12	11	13
	usporedba boja	13	12	11
	usporedba količina	4	6	5
	potpuno objašnjenje	1	1	1
	više kategorija		1	
Ukupno	47	47	47	

je zanimljivo uočiti koje su to kategorije u kojima se pojavljuju najveće razlike između ove dvije skupine djece. Kategoriju “usmjerenost na obilježja irelevantna za rješenje zadatka” te “usmjerenost na različitosti u elementima zadatka” koriste isključivo djeca koja griješe, dok kategorije “usporedba količina” i “potpuno objašnjenje” koriste isključivo djeca koja rješavaju sve točno. Pri tome kategorije koje koriste isključivo djeca koja griješe zapravo upućuju na to da dijete nije u stanju razlučiti koja su obilježja bitna, a koja nebitna za rješenje zadatka. Nasuprot tome, kategorije koje koriste isključivo djeca koja rješavaju sve točno upućuju na naprednije razumijevanje osnovnih svojstava zbrajanja.

Željeli smo provjeriti i razlikuju li se djeca različite dobi prema čestini korištenja objašnjenja iz različitih kategorija. Na temelju podataka navedenih u tablici 5. možemo vidjeti da su obrasci odgovaranja djece različite dobi vrlo slični, no mogu se uočiti i neka manja odstupanja. Među djecom različite dobi koja točno rješavaju zadatke, sedmogodišnjaci u nešto većoj mjeri koriste objašnjenje usporedbom količina nego što to čine mlađa djeca. Također se može uočiti da među djecom koja griješe četverogodišnjaci ne koriste strategiju imenovanja različitosti koja je prilično uobičajena za stariju djecu.

Također je provjereno postoje li razlike u čestini korištenja različitih kategorija objašnjenja za različita svojstva zbrajanja (tablica 6.). Friedmanov test pokazao je da nema statistički značajne razlike između zadataka komutativnosti, asocijativnosti i aditivnosti s obzirom na korištene kategorije objašnjenja ( $\chi^2_F = 1,00$ ;  $df = 2$ ;  $p > 0,05$ ).

## RASPRAVA

Ovim istraživanjem pokušali smo saznati nešto više o početnim razinama razvoja razumijevanja osnovnih svojstava zbrajanja. Pri tome smo se posebno usmjerili

na dva dosad nedovoljno razmatrana pitanja. Željeli smo utvrditi u kojoj dobi djeca stječu početno protokvantitativno razumijevanje svojstava zbrajanja te na koji način djeca predškolske i rane školske dobi razmišljaju o problemima koji uključuju ova svojstva zbrajanja. Također smo željeli saznati usvajaju li djeca sva ispitana svojstva zbrajanja simultano ili razumijevanje nekog svojstva prethodi usvajanju nekog drugog svojstva.

Dobiveni nalazi pružaju značajan doprinos razjašnjavanju dobnih razlika u početnom razumijevanju svojstava zbrajanja. Naime, prethodna istraživanja ne upućuju na značajnije dobne razlike u razumijevanju svojstava zbrajanja u kontekstu konkretnih objekata (Canobi, Reeve i Pattison, 2002, 2003), no to je vjerojatno posljedica odabira sudionika u tim istraživanjima. U oba istraživanja sudjelovao je relativno mali broj djece. Također, u istraživanju Canobi, Reevea i Pattison (2002) radilo se o malom dobnom rasponu (predškolci dobi 4-5 godina i učenici prvog razreda dobi 5-6 godina), dok su u istraživanju Canobi, Reevea i Pattison (2003) sudjelovala nešto starija djeca (dobi od 6 do 8 godina) za koju možemo pretpostaviti da uglavnom više nisu na početnom stupnju razumijevanja svojstava zbrajanja. Nasuprot tome, rezultati ovog istraživanja, u kojem su sudjelovala djeca dobi od 4 do 7 godina, upućuju na postojanje jasnog trenda poboljšanja učinkovitosti djece s dobi. Pri tom treba naglasiti da po svojoj uspješnosti posebno odskaču sedmogodišnjaci koji su već započeli formalno školovanje, te možemo pretpostaviti da matematička znanja koja stječu u školi pridonose njihovoj većoj uspješnosti. Ovu bi pretpostavku, međutim, trebalo dodatno provjeriti kako bi se razlučili mogući efekti dobi od efekata formalnog školovanja.

Unatoč tome što su starija djeca uspješnija od mlađe u rješavanju zadataka koji uključuju svojstva zbrajanja, može se primijetiti da su već i mlađa djeca prilično uspješna. To je u skladu s teorijskim pretpostavkama da se dječje razumijevanje dio-cjelina koncepata pojavljuje u smislenom kontekstu već prije škole, tako da već i mlađa djeca imaju određeno znanje o načinima na koji se skupovi mogu kombinirati i razdvajati (Canobi, Reeve i Pattison 2002). Izgleda da se razumijevanje odnosa dio-cjelina pojavljuje vrlo rano, mada se ne može uspješno primijeniti u svim kontekstima. Baroody, Tiilikainen i Tai (2006) navode da cijeli niz istraživanja pokazuje kako djeca predškolske dobi mogu shvatiti neverbalne zadatke zbrajanja i izvršiti jednostavne postupke zbrajanja mnogo prije nego što za rješavanje matematičkih problema mogu primijeniti postupke koji uključuju brojenje ili simboličke izraze.

Međutim, ipak nisu sva mlađa djeca jednako uspješna u rasuđivanju o zadacima kojima se ispituju svojstva zbrajanja. Prema rezultatima kvalitativne analize, djeca koja griješe u rješavanju ovih zadataka uglavnom ne znaju obrazložiti kako su došla do rješenja, a također se pri rješavanju zadataka vrlo često usmjeravaju na obilježja zadatka koja ih ne dovode do točnog rješenja. Na temelju toga možemo pretpostaviti da ta djeca još nemaju (dovoljno dobro) razvijenu protokvantitativnu shemu svojstava zbrajanja. S obzirom na to da smo utvrdili da se udio djece koja ne shvaćaju svojstva zbrajanja s dobi smanjuje, možemo pretpostaviti da u predš-

kolskoj dobi djeca prelaze s razine nerazumijevanja svojstava zbrajanja na razinu protokvantitativnog rasuđivanja o svojstvima zbrajanja, pri čemu očito postoje individualne razlike. No, u dobi od 7 godina, nakon polaska u školu, gotovo sva djeca stječu (barem) protokvantitativno razumijevanje svojstava zbrajanja.

Drugo važno pitanje postavljeno u ovom istraživanju jest postoje li razlike u razumijevanju pojedinih svojstava zbrajanja – aditivnosti, komutativnosti i asocijativnosti, odnosno stječu li djeca početno razumijevanje svojstava zbrajanja simultano ili usvajanje pojedinih svojstava zbrajanja prethodi usvajanju drugih. Dobiveni rezultati pokazuju da ne postoje razlike među različitim svojstvima zbrajanja, niti u uspješnosti rješavanja zadataka koji uključuju različita svojstva zbrajanja, niti u načinima na koji djeca rasuđuju o njima. S obzirom na to da su zadaci u ovom istraživanju osmišljeni upravo tako da odgovaraju protokvantitativnoj razini rezoniranja, možemo pretpostaviti da početno dječje razumijevanje odnosa dio-cjelina koje ne uključuje kvantitativno rezoniranje jednako pridonosi usvajanju svih triju svojstava zbrajanja. Dobiveni rezultati potvrđuju teorijske postavke koje navodi Resnick (1992), ali nisu u skladu s rezultatima istraživanja razumijevanja različitih svojstava zbrajanja koja su proveli Canobi, Reeve i Pattison (1998, 2002, 2003). Kako su u tim istraživanjima korišteni složeniji zadaci (simbolički zadaci te nešto složeniji zadaci s konkretnim objektima), moguće je da su njihovi zahtjevi nadilazili protokvantitativnu razinu rasuđivanja. Na temelju toga možemo pretpostaviti da se postojanje razlika u razumijevanju različitih vrsta zbrajanja pojavljuje tek na višim razinama razumijevanja svojstava zbrajanja te da je ta razlika povezana i s računskim, a ne samo s konceptualnim zahtjevima zadataka. Prema pretpostavkama Resnick (1992), ovdje bi od posebne važnosti mogla biti integracija proceduralnog i konceptualnog znanja o zbrajanju, što je neophodno za razvoj pravog kvantitativnog znanja.

Ako dobivene nalaze sagledamo u svjetlu različitih modela razumijevanja svojstava zbrajanja, možemo uočiti da naši nalazi idu u prilog modelu Baroodyja, Wilkinsa i Tiilikainen (2003). U skladu s postavkama tog modela, nalazi ovog istraživanja upućuju na to da se dio djece predškolske dobi nalazi na razini 0 i ne pokazuje nikakvo razumijevanje svojstava zbrajanja, a dio na razini 1 te pokazuje protokvantitativno razumijevanje svojstava zbrajanja u zadacima s binarnom koncepcijom. Udio djece koja se nalaze na razini 0 smanjuje se s dobi te se na toj razini nalazi vrlo malo djece školske dobi. Za razliku od modela Baroodyja i sur. (2003), model koji je predložila Resnick (1992) ne predviđa postojanje nulte razine razumijevanja svojstava zbrajanja, te možemo zaključiti da model Baroodyja, Wilkinsa i Tiilikainen daje bolji pregled početnih razina razumijevanja svojstava zbrajanja.

Međutim, obilježja dječjeg rasuđivanja o zadacima koji ispituju razumijevanje osnovnih svojstava zbrajanja koja smo utvrdili u ovom istraživanju sasvim su u skladu s opisom protokvantitativne razine iz modela Resnick (1992). Postavku tog modela da na protokvantitativnoj razini djeca zaključuju o konkretnim objektima bez osvrtnja na specifične količine, odnosno radije koriste kvalitativne (npr. pla-

ve loptice + crvene loptice) nego kvantitativne termine ( $5 + 3$ ) potvrđuju rezultati dobiveni kvalitativnom analizom. Naime, dječja objašnjenja točnih rješenja zadatka najčešće su upravo kvalitativna (usmjerenost na skupine bombona s obzirom na njihovu boju), iako neka djeca koriste i kvantitativne termine (usmjerenost na količinu bombona).

Dobiveni rezultati imaju i značajne praktične implikacije budući da potvrđuju nalaze prethodnih istraživanja (Canobi, Reeve i Pattison, 1998, 2002, 2003; Resnick, 1992; Sophian i Vong, 1995) da se dječje razumijevanje odnosa dio-cjelina koje je od presudne važnosti za školsku aritmetiku pojavljuje u kontekstu konkretnih objekata. Kako većina djece i prije osnovne škole uspješno prepoznaje osnovna svojstva zbrajanja u kontekstu konkretnih objekata, poučavanje bi trebalo organizirati tako da se napravi jasna poveznica između korištenja ovih principa u konkretnom i apstraktnom kontekstu. Na taj bi se način dječja neformalna matematička znanja mogla uspješno iskoristiti pri učenju školske matematike. Dakle, bitno je da matematičke vještine koje se uče u školi budu usklađene s dječjim konceptualnim razumijevanjem s obzirom na to da će djeca koja su postigla konceptualno razumijevanje češće koristiti naprednije strategije rješavanja matematičkih zadataka te postizati više uspjeha u njihovu rješavanju (Canobi, Reeve i Pattison, 2002). O tome je osobito važno voditi računa kod djece koja pokazuju nedovoljnu razinu konceptualnog razumijevanja. Da bi se toj djeci olakšalo stjecanje matematičkih znanja, potrebno je utvrditi obilježja njihova rasuđivanja o zadacima, razjasniti im zbog čega je ono netočno i objasniti im svojstva zbrajanja pomoću konkretnih materijala.

Unatoč vrijednim nalazima koje pruža, ovo istraživanje ipak daje tek ograničeni pregled razvoja razumijevanja svojstava zbrajanja. Kako su u ovom istraživanju zadaci bili formulirani na protokvantitativnoj razini, bit će potrebna dodatna istraživanja da se utvrdi kakva je uspješnost djece u razumijevanju svojstava zbrajanja na višim razinama matematičkog rasuđivanja. Bilo bi važno provjeriti postoje li razlike u razumijevanju različitih svojstava zbrajanja (aditivnosti, komutativnosti i asocijativnosti) na višim razinama razumijevanja te, ako postoje razlike, zašto se i na kojoj razini javljaju. Zasad je ostalo nedovoljno razjašnjeno i kakav je razvoj razumijevanja svojstava zbrajanja kod zadataka s unarnom koncepcijom zbrajanja. U daljnjim istraživanjima razumijevanja svojstava zbrajanja od osobite bi važnosti bilo utvrditi i kako je konceptualno razumijevanje povezano s proceduralnim znanjem te kakav je njihov zajednički doprinos napretku djece u stjecanju matematičkih kompetencija.

## ZAKLJUČAK

Rezultati ovog istraživanja idu u prilog modelu Baroodyja, Wilkinsa i Tiilikainen (2003) budući da potvrđuju postavke ovog modela o početnim razinama razumijevanja svojstava zbrajanja. Preciznije, rezultati pokazuju da se u predškolskoj dobi događa tranzicija od nerazumijevanja do protokvantitativnog razumijevanja



svojstava zbrajanja. Međutim, sama obilježja rezoniranja na protokvantitativnoj razini u tom modelu nisu toliko razrađena u odnosu na opis dječjeg rasuđivanja u okviru modela koji predlaže Resnick (1992) i koji je sasvim u skladu s rezultatima kvalitativne analize u ovom istraživanju. Iako model Baroodyja i suradnika daje vrlo dobar pregled početnih razina razumijevanja svojstava zbrajanja, očito postoji potreba za nadopunom modela putem uključivanja detaljnijih opisa pojedinih razina rasuđivanja. Općenito možemo zaključiti da djeca o svojstvima zbrajanja uče kroz iskustva s konkretnim objektima te se istraživanjem konkretnih verzija odnosa dio-cjelina može doći do važnih uvida u dječji konceptualni napredak pri ranom učenju matematike. Na kraju je potrebno naglasiti da je ovo prvo istraživanje razumijevanja svojstava zbrajanja u kojem je posebna pažnja dana kvalitativnoj analizi dječjih objašnjenja te obilježjima rasuđivanja djece koja griješe pri rješavanju zadataka. Time je ovo istraživanje dalo doprinos razumijevanju dječjeg konceptualnog znanja o osnovnim svojstvima zbrajanja.

## LITERATURA

- Baroody, A.J., Gannon, K.E. (1984). The development of the commutativity principle and economical addition strategies. *Cognition and Instruction*, 1, 321-339.
- Baroody, A.J., Tiilikainen, S.H., Tai, Y. (2006). The application and development of an addition goal sketch. *Cognition and Instruction*, 24, 123-170.
- Baroody, A.J., Wilkins, J.L.M., Tiilikainen, S. (2003). The development of children's understanding of additive commutativity concept: From protoquantitative concept to general concept? U Baroody, A.J., Dowker, A. (ur.), *The Development of Arithmetic Concepts and Skills: Constructive Adaptive Expertise*, 127-160. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum.
- Canobi, K.H. (2004). Individual differences in children's addition and subtraction knowledge. *Cognitive Development*, 19, 81-93.
- Canobi, K.H., Reeve, R.A., Pattison, P.E. (1998). The role of conceptual understanding in children's addition problem solving. *Developmental Psychology*, 34, 882-891.
- Canobi, K.H., Reeve, R.A., Pattison, P.E. (2002). Young children's understanding of addition concepts. *Educational Psychology*, 22, 513-532.
- Canobi, K.H., Reeve, R.A., Pattison, P.E. (2003). Patterns of knowledge in children's addition. *Developmental Psychology*, 39, 521-534.
- Clinch, J.J., Keselman, H.J. (1982). Parametric alternatives to the analysis of variance. *Journal of Educational Studies*, 7, 207-214.
- Resnick, L.B. (1992). From protoquantities to operators: Building mathematical competence on a foundation of everyday knowledge. U G. Leinhardt, R. Putnam, R.A. Hatrup (ur.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching*, 275-323. Hillsdale: Erlbaum.
- Rittle-Johnson, B., Alibali, M.W. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other? *Journal of Educational Psychology*, 91, 175-189.
- Rittle-Johnson, R., Siegler, R.S., Alibali, M.W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology*, 93, 346-362.

- Siegler, R.S. (2000): The rebirth of children's learning. *Child Development*, 71, 26-35.
- Sophian, C., Harley, H., Martin, C.S.M. (1995): Relational and representational aspects of early number development. *Cognition and Instruction*, 13, 253-268.
- Sophian, C., Vong, K.I. (1995): The parts and wholes of arithmetic story problems: Developing knowledge in the preschool years. *Cognition and Instruction*, 13, 469-477.
- Wilkins, J.L.M., Baroody, A.J., Tiilikainen, S. (2001): Kindergartners' understanding of additive commutativity within the context of word problems. *Journal of Experimental Child Psychology*, 79, 23-36.

## DO THE BEARS HAVE AN EQUAL NUMBER OF SWEETS? CONCEPTUAL DEVELOPMENT OF BASIC ADDITION PRINCIPLES

### Abstract

Previous research indicates that advancement in acquiring mathematical competencies requires a qualitative leap in conceptual development. Understanding part-whole relationship, which represents the basis for acquiring addition skills, is one of the key advances in conceptual development. Research on the adoption of the basic addition principles – additive composition, commutativity and associativity – provides a better understanding of the part-whole knowledge development. Therefore, the aim of this research was to explore age-related differences in understanding the basic addition principles and to determine whether there are differences in understanding different addition principles. The participants were 4 year old ( $N = 41$ ), 5 year old ( $N = 89$ ) and 6 year old ( $N = 76$ ) preschool children, and 7 year old first grade students ( $N = 77$ ). Understanding of the addition principles was assessed by presenting addition problems in a concrete context. The main effect of age proved to be significant for all addition principles, with older children performing better than younger children. The results also indicate that there are no differences in understanding different addition principles. In order to determine whether there are qualitative differences in children's justifications of their answers to the posed problems, they were thoroughly analyzed. Results show that children who are successful in solving addition problems give more elaborated justifications compared to children who are less successful, indicating different levels of conceptual knowledge about addition principles. Overall, the research supports the model proposed by Baroody, Wilkins and Tiilikainen (2003) and the conception of protoquantitative level of mathematical reasoning proposed by Resnick (1992).

**Key words:** conceptual development, additive composition, commutativity, associativity

Primljeno: 26. 02. 2009.

## Prilog 1.

## Primjeri dječjih objašnjenja prema konceptualnim kategorijama

Kategorija	Primjeri
1. Nema objašnjenja	<p>“Pa ne znam”  “Pa zato”  “Ne znam baš”  dijete ne daje nikakav odgovor</p>
2. Usmjerenost na obilježja irelevantna za rješenje zadatka	<p>“Zato kaj Tina ima žutu kapu, a Tin ima plavu kapu”.  “Zato što su bomboni u kutijicama.”  “Jer je to dobro.”  “Jer nisu dovoljno skupljali.”</p>
3. Usmjerenost na različitosti u elementima zadatka	<p><i>Aditivnost:</i>  “Jer ovdje su spojeno crvena i zelena, ovdje jedna plava, ovdje plava, crvena i zelena.”  “Zato jer Tina ima spojeno, a Tina nema.”  Pa zato jer je tamo sve u jednoj kutiji, a ovdje ne.”  “Tin ima na jednom mjestu dvije kutije bombona, a Tina ima u svakoj po jednu.”</p> <p><i>Komutativnost:</i>  “Jer ova crvena je na početku, ova u sredini.”  “Zato što je tu crveno, plavo, zeleno, a tu plavo, crveno, zeleno.”  “Zato što ona ima plavi prvi, a on prvi crveni.”  “Zato što nisu po redu složeni.”</p> <p><i>Asocijativnost:</i>  “Ova ima crvenu i plavu, jednu zelenu, Tin zelenu i plavu i crvenu”.  “Zato jer je sve pomiješano.”  “Zato jer je ta plava ovdje spojena s crvenim, a ovdje je plavo spojeno sa zelenim.”  “Zato jer Tin ima same plave, crvene i zelene zajedno, a Tina ima plave i crvene zajedno i zelene same.”</p>
4. Navođenje (ne)jednakosti, ali bez elaboracije pravila	<p>Uz točne odgovore:  “Zato jer su isti.”  “Zato su jednaki jer imaju iste bombone.”  “Jer ih ima isti broj.”  “Zato jer imaju iste kutije.”</p> <p>Uz netočne odgovore:  “Zato jer nije isto.”  “Zato što nisu iste boje.”  “Jer nije u istim kutijama.”</p>
5. Usporedba po bojama	<p>“Ima puno zelenih i ovdje zelenih, ima crvenih i ovdje isto crvenih i plavih i plavih.”  “Zato jer imaju puno zelenih, puno zelenih, puno plavih, puno plavih, još puno crvenih i puno crvenih.”  “Zato što on ima zelene, plave i crvene i ona ima zelene, plave i crvene.”  “Zato što su dobili i crvene i zelene i plave bombone.”</p>

Kategorija	Primjeri
6. Usporedba količina	<p>“Zato što ovdje ima isto puno i ovdje, i 3 i tu ima 3, i tu ima 4, i tu ima 4, zato!”</p> <p>“Zato što opet imaju jednako plavih, jednako crvenih i jednako zelenih.”</p> <p>“Tin ima 4 crvena, 3 plava i mnogo zelenih i Tina ima 4 crvena, 3 plava i mnogo zelenih.”</p> <p>“Zato što je u svakoj zelenoj isti broj, u svakoj plavoj isti broj i u svakoj crvenoj isti broj.”</p>
7. Potpuno objašnjenje	<p>“Jer su tu crveni, plavi i zeleni i tu su crveni, plavi i zeleni, samo što su tu u svakakvim kutijama, a tu su 2 u istoj kutiji, a ovdje samo jedan”. (aditivnost)</p> <p>“Isti su, samo tu su crveni u sredini, a tu na desno.” (komutativnost)</p>