

# Računalo u istraživačkom radu učenika u nastavi matematike

UDK: 159.922.7.07:004

371.3:004

371.3:62

Stručni članak

Primljeno: 28. 8. 2011.



**Željka Bjelanović Dijanić<sup>1</sup>**

Srednja škola Čazma  
zeljka.bjelanovic@bj.t-com.hr

## Sažetak

Suvremena nastava prirodnih predmeta naglašava važnost aktivnosti i samostalnog učenja učenika te zahtijeva uvođenje učenika u istraživačku nastavu. U nastavi matematike to se može realizirati korištenjem računala i specijaliziranih programa. U radu su prikazana tri modela korištenja računala i programa dinamične geometrije GeoGebra kao alata za istraživanje učenika u nastavi matematike: učenje otkrivanjem, istraživački usmjerena nastava i projektna nastava. Istraživanjem u nastavi učenicima se ukazuje na izvorni ciklus znanstvenog istraživanja te ih se potiče na kritički odnos prema prikazanim činjenicama, znatiželja i stvaralaštvo, povećava se motivacija, razvija

---

<sup>1</sup> Željka Bjelanović Dijanić je profesorica matematike i informatike, doktorandica na poslijediplomskom doktorskom studiju "Rani odgoj i obvezno obrazovanje" na Učiteljskom fakultetu u Zagrebu. Istraživački interesi vezani su joj uz e-učenje i učenje otkrivanjem te korištenje računala u nastavi matematike.

se sposobnost apstrahiranja, generaliziranja te induktivnog zaključivanja što je u nastavi matematike izuzetno važno.

Ključne riječi: aplet, istraživački usmjerena nastava, kognitivni angažman, programi dinamične geometrije, projektna nastava, računalo, učenje otkrivanjem

## 1. Istraživanje kao metoda za rješavanje problema

Danas se tradicionalna nastava sve više nastoji zamijeniti suvremenom, modernom, nastavom orijentiranom na učenika jer se samo zanimanjem i aktivnošću učenika može postići uspješno poučavanje. Teorija konstruktivizma naglašava da se učenik mora aktivno uključiti u nastavni proces te samostalnim radom doći do vlastitih spoznaja. Način stjecanja znanja je jedinstven za svakog učenika jer (upravo i samo) on vlastitom aktivnošću “konstruira” svoje znanje na temelju vlastitog iskustva (Bjelanović Dijanić, 2010.). Neke od karakteristika suvremene nastave su učenje otkrivanjem, samorad učenika, samostalno rješavanje problema, divergentno, stvaralačko mišljenje (De Zan, 2005.). Kurnik (2008., str. 53) izdvaja sljedeće postavke i ciljeve suvremene metodike nastave matematike: samostalan rad učenika, stvaralački rad učenika, uvođenje učenika u istraživačku nastavu, razvijanje sposobnosti za rješavanje problema te suvremene nastavne metode.

Postoji nekoliko modela nastave koji se u suvremenoj školi primjenjuju, neki se čak međusobno isprepliću pa tako postoji i nekoliko naziva za takvu nastavu. U prirodoslovlju De Zan (2005.) ističe modele poput problemske nastave, učenja putem rješavanja problema, stvaralačke nastave, istraživački usmjerene nastave, projektne nastave, navođenja na istraživanje ili učenje otkrivanjem i sl. Krsnik (2003.) navodi šest različitih tipova interaktivne nastave: grupni rad, otkrivalačka nastava (discovery method), problemska nastava (problem solving), problemski usmjerena nastava (problem centered learning), istraživačka nastava te konstruktivistička nastava. Svim navedenim oblicima zajedničko je rješavanje nekog problema.

Pa čak je i tradicionalna nastava matematike takva da se uglavnom svodi na rješavanje raznih problema formuliranih u obliku većeg broja zadataka s poznatim postupkom rješavanja i jednim točnim rješenjem koje se može provjeriti na kraju zbirke zadataka. Takvu vrstu zadataka nazivamo zadacima zatvorenog tipa, a probleme zatvorenim problemima. Za razliku od tih postoje i otvoreni problemi, odnosno zadaci otvorenog tipa kojima se u nastavi stvara problemska situacija. Krsnik (2003.) navodi nekoliko kriterija po kojima se nastavna situacija može smatrati problemskom: (1) spoznaja da problemska situacija postoji, (2) je li problem poznat, odnosno

u nastavi zadan ili nije?, (3) je li poznat postupak rješavanja?, (4) pretpostavlja li se da postoji jednoznačno rješenje problema koje se može smatrati točnim? Najveća razina kreativnosti postiže se ako je poznato samo da postoji problemska situacija. Stoga je jedan od zadataka nastavnika u suvremenoj nastavi što češće stvarati problemske situacije da bi se uopće mogao identificirati problem. Danas vrlo aktualan primjer za problemsku situaciju u nastavi matematike mogao bi biti izbor tarifnog modela za mobitel. Jedna od učinkovitijih metoda kojom se može pristupiti rješavanju problemske situacije jest oluja ideja ili “*brainstorming*”. To je tehnika kreativnog generiranja velikog broja ideja u kratkom vremenu. Nastavnik stvara radno ozračje koje potiče učenike da slobodno iznose ideje o razrješavanju problemske situacije: o identifikaciji problema, o proceduri rješavanja, o tome ima li problem jednoznačno rješenje. Pri tom se ničija ideja u početku ne smije kritizirati, a nakon iznošenja svih ideja slijedi njihovo vrednovanje (Krsnik, 2003., Matijević, 1999.). Ukoliko je problem, odnosno matematički zadatak poznat, a postupak rješavanja nije ili ima više točnih rješenja govorimo o zadatku otvorenog tipa. Kod takvih zadataka naglasak je na procesu rješavanja problema i diskusiji pri čemu učenici samostalno odabiru metodu rješavanja (Čižmešija, 2006.b).

Pojedini autori koji se bave različitim granama prirodnih znanosti smatraju kako se gotovo svi sadržaji srednjoškolskog programa mogu postaviti u obliku problemskih situacija koje učenici mogu razriješiti gotovo samostalno, uz tek malu pomoć nastavnika (Krsnik, 2003.). Osnovna ideja je razbiti problem na nekoliko segmenata ili koraka koji će osiguravati da učenik samostalno dođe do rješenja. Istaknuti matematičar George Pólya (2003.) koji se zalagao za heuristički pristup učenju tvrdio je da postoji umijeće otkrića i da ga je moguće naučiti. On je razradio model rješavanja problema u četiri koraka:

- 1. Razumijevanje zadatka** – zadatak treba pročitati s razumijevanjem te pokušati odgovoriti na pitanja: *Što je nepoznato? Što je zadano? Kako glasi uvjet zadatka?*
- 2. Stvaranje plana** – uočiti zakonitost (pravilo, formula, teorem) koja povezuje poznate i nepoznate varijable, složeniji zadatak raščlaniti na nekoliko lakših.
- 3. Izvršavanje plana** – paziti da se točno izvede svaki korak.
- 4. Osvrt** – provjera rezultata, odgovoriti na pitanja *Može li se rezultat dobiti na drugačiji način? Može li se rezultat uočiti na prvi pogled? Ima li rezultat smisla? Može li se rezultat ili metoda rješavanja upotrijebiti za neki drugi zadatak?* (Pólya, 1966.).

*Apleti* su posebna vrsta interaktivnog nastavnog materijala koji po svojoj prirodi odgovaraju upravo ovom pristupu, a detaljnije su opisani u poglavlju o istraživački

usmjerenoj nastavi. Prije toga potrebno je istaknuti još jedan psihološki fenomen u psihologiji učenja i nastave.

## 2. Kognitivni angažman

Da bi učenici kvalitetno usvajali nova znanja i spoznaje, moraju uložiti određeni napor pri učenju kojeg se još naziva i kognitivni angažman. *“Kognitivni angažman je pokretanje različitih misaonih procesa koji omogućuju učenje, a ima dva aspekta: dubinu obrade podataka i strategiju obrade.”* (Andrilović i Čudina-Obradović, 1996., str. 149). U matematici je ulaganje napora za dubinskom obradom podataka posebno izraženo i jedan je od najčešćih razloga zbog kojeg dio učenika ovaj predmet smatra težim od ostalih. Da bi doista razumjeli nastavno gradivo, moraju ga sami sebi objasniti, potražiti vlastite primjere, povezati s prije naučenim, znati primijeniti u zadacima, u drugim nastavnim predmetima ili situacijama iz svakodnevnog života. Postoji nekoliko strategija kojima se postiže dubinska obrada:

1. kognitivna strategija – ponavljanje, pronalaženje primjera, izrada sažetaka, shema, mentalnih mapa,
2. metakognitivna strategija koja uključuje planiranje i kontrolu,
3. strategija regulacije napora koja se odnosi na usklađivanje uloženog napora s postignutim rezultatima (Andrilović i Čudina-Obradović, 1996.).

Da bi kognitivni angažman doveo do trajnog znanja potrebno je primijeniti što više različitih strategija. To u matematici nije nimalo lako, a koliko će učenik biti uspješan ovisi o njegovoj motivaciji za učenjem matematike.

Korištenje računala i rad na digitalnim nastavnim materijalima potiče motivaciju za učenje, ono olakšava strategiju planiranja i kontrole, a nastava uz pomoć računala je zanimljivija i traži aktivno sudjelovanje pa učenici često nisu ni svjesni koliko su napora uložili što rezultira kvalitetnijim usvajanjem novih spoznaja (Bjelanović Dijanić, 2011.).

## 3. Računalo u nastavi matematike i programi dinamične geometrije

Danas je suvremena nastave matematike nezamisliva bez računala. Osim što potiče motivaciju za učenje i traži aktivno sudjelovanje, računalo u nastavi ima još nekih prednosti:

- individualizira učenje: učenik uči samostalno i vlastitim tempom,
- računalo je strpljivo, uporno i ništa ne oprašta, a reagira trenutno,

- računala mogu poboljšati kognitivne vještine,
- omogućuje iskustveno, istraživačko i otvoreno učenje,
- učenici vole međusobno surađivati dok rade na računalu (Šuljić, 2008.).

Pritom je vrlo važno na koji način i koji programi se u nastavi koriste. Ako računalo služi kao potpora predavačkoj nastavi u kojoj nastavnik cijelom razredu frontalno prezentira nove sadržaje koristeći se Power Point prezentacijom, tada niti jedna od gore navedenih prednosti neće doći do izražaja. Naprotiv, takva nastava vrlo brzo prelazi u dosadu. Uvijek je bolje koristiti specijalizirane matematičke programe, a nastavu organizirati tako da svaki učenik radi samostalno za računalom ili da rade u paru.

Programi dinamične geometrije su specijalizirani računalni programi namijenjeni nastavi matematike među kojima se u hrvatskim školama najviše koriste *Geogebra* i *The Geometer's Sketchpad*. Oni omogućavaju izradu dinamičnih konstrukcija, matematički objekti poput točaka, pravaca, dužina mogu se pomicati i pritom zadržavaju svoja matematička svojstva što omogućava opažanje interakcija među objektima, istraživanje njihovih svojstava i odnosa te formuliranje vlastitih zaključaka. Zbog toga programi dinamične geometrije omogućavaju da računalo postane nezaobilazan alat pri istraživanju učenika u nastavi matematike. Akcijsko istraživanje koje sam provela sa svojim učenicima pokazalo je da učenje matematike otkrivanjem uz pomoć računala i programa dinamičke geometrije GeoGebra uz metodički osmišljene i didaktički oblikovane interaktivne digitalne obrazovne materijale osigurava aktivnost svih učenika u razredu, povećava motivaciju za učenje matematike, potiče samostalno dolaženje do zaključaka, ali i suradnju među učenicima (Bjelanović Dijanić, 2011.).

U ovom radu opisat ću tri različita modela suvremene nastave u kojima se koristi istraživanje pomoću računala u GeoGebri: (1) navođenje na istraživanje ili učenje otkrivanjem, (2) istraživački usmjerenu nastavu i (3) projektnu nastavu. GeoGebra je program dinamične geometrije namijenjen učenicima osnovnih i srednjih škola koji povezuje geometriju, algebru, analizu i statistiku. Otvorenog je koda što znači da se besplatno može preuzeti s interneta ([www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)) te ga svi zainteresirani nastavnici mogu instalirati u školi, a učenici kod kuće.

## 4. Navođenje na istraživanje – učenje otkrivanjem

Učenje otkrivanjem je iskustveno učenje koje se odvija u stvarnosti ili zamišljenoj stvarnosti. Ukoliko imamo stvarnu situaciju, govorimo o istraživanju koje omogućava da učenik vidi kako teče pravo znanstveno istraživanje. Ako nam istraživanje u stvarnosti nije dostupno, koristimo se simulacijom pri čemu je u nastavi

matematike izuzetno korisna računalna simulacija korištenjem programa dinamične geometrije.

Varošanec (2006.) ističe kako istraživanjem učenici proučavaju i rješavaju probleme pokušavajući otkriti matematičke pravilnosti, zakonitosti i svojstva promatranih objekata s kojima do tada nisu bili upoznati. Pri tome učeničko istraživanje ima iste korake kao i znanstveno istraživanje:

1. uočavanje i definiranje problema,
2. određivanje plana i metoda istraživanja,
3. prikupljanje podataka, postavljanje pretpostavke (hipoteze),
4. analiziranje podataka, opovrgavanje ili potvrđivanje hipoteza,
5. primjena rezultata.

De Zan (2005.) naglašava kako istraživanjem učenici iskušavaju izvorni ciklus znanstvenog pristupa koji je stvorio suvremeni svijet: pretpostavka, opažanje, istraživanje, kritičko vrednovanje, nova pretpostavka, provjera.

#### 4.1. Primjer – rješavanje problema maksimuma

Za ilustraciju navodim primjer jednog problema maksimuma:

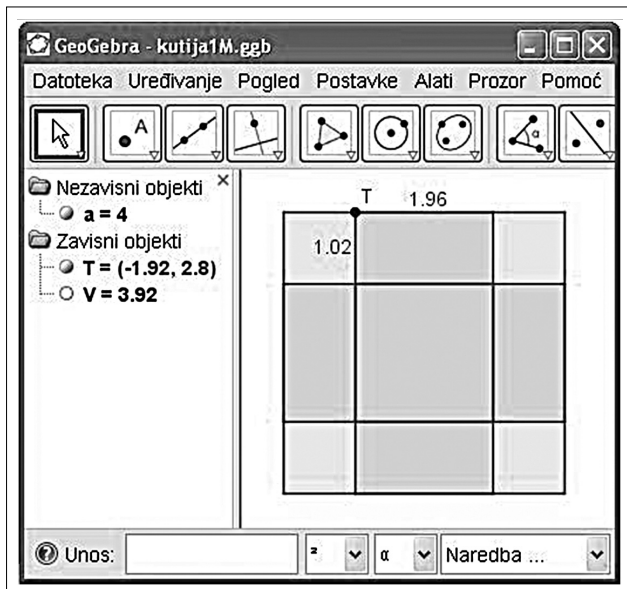
*Od kartona kvadratnog oblika izradi kutiju najvećeg volumena.*

Ovaj problem je otvorenog tipa, ima više rješenja kao i načina rješavanja. U razredu se stvara problemska situacija i započinje se *brainstormingom*. Učenici se mogu pitati da li kutija treba imati poklopac ili ne, da li se karton smije rezati i lijepiti, ima li problem jedno, nijedno ili više različitih rješenja i sl. Nakon početne rasprave trebalo bi preciznije definirati problem (1. korak), npr. dogovori se da kutija ne treba imati poklopac nego samo bazu i četiri bočne strane te da kutija nastaje iz jednog dijela kartona rezanjem i lijepljenjem samo bočnih bridova. Nakon toga se pravi plan istraživanja (2. korak), može se donijeti karton i pokušati napraviti nekoliko modela (stvarna situacija) ili se može simulacijom u programu dinamične geometrije izraditi model pa mijenjati parametre i promatrati promjenu volumena. S obzirom da se danas već dosta učenika služi GeoGebrom, neće im biti teško izraditi jednostavan model poput ovoga:

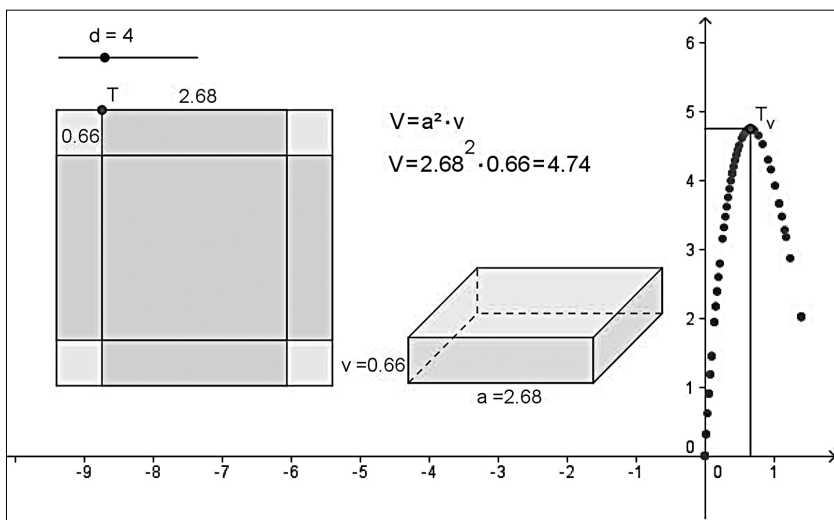
Ogromna prednost simulacije u GeoGebri pred izradom stvarnih modela je ta što pomicanjem točke T u desnom dijelu prozora GeoGebre možemo ispitati gotovo sve slučajeve i odrediti kada je volumen najveći. Sve se konstruira dinamički, a za izračun volumena unosi se formula tako da i vrijednost volumena koju očitavamo u lijevom dijelu prozora prati promjene točke T.

Bolji poznavaoi GeoGebre mogu napraviti dinamičku konstrukciju kvadra koji nastaje nakon što se kutija sklopi. Također je moguće prikazati volumen kao funk-

Slika 1. Simulacija rezanja kartona u Geogebri



Slika 2. Simulacija spajanja kutije i prikaz volumena kao funkcije



ciju koja ovisi o nekom parametru primjerice o visini kvadra što nam omogućuje da uočimo točku maksimuma čime cijela simulacija postaje još zornija i pogodnija za razrednu raspravu.

Sada se naslućuje rješenje problema, pažljivom analizom dobivenih mjera osnovnog brida  $a$  i visine  $v$  kvadra može se pretpostaviti da se maksimalni volumen postiže za  $a=4v$ .

Računalna simulacija nam omogućuje da postavimo hipotezu (3. korak) iako tu treba biti posebno pažljiv. Učenici mogu steći dojam da nam je ovo dovoljno za rješenje problema. Zato im svakako treba naglasiti da se u znanosti svaka hipoteza treba dokazati što u matematici znači vratiti se papiru, olovci i matematičkom dokazu (4. korak). Nakon što se hipoteza dokaže, problem je riješen. U suvremenoj nastavi treba poticati razrednu diskusiju (5. korak) kojom je poželjno analizirati postupak rješavanja, raspraviti primjenu naučenog, vratiti se početnoj problemskoj situaciji pa pokušati varirati postavljeni problem. Na primjer, kako riješiti zadatak ako od ostatka materijala treba slijepiti poklopac, ili ako karton nije kvadratnog nego pravokutnog oblika, ili ako kutija nije kvadratnog nego cilindričnog oblika i sl. Na slične varijacije treba poticati posebno darovite učenike da im se ukaže na put kojim se u znanosti dolazi do novih otkrića.

## 5. Istraživački usmjerena nastava

Istraživački usmjerena nastava potiče učenike da samostalnim istraživanjem dolaze do određenih spoznaja uz odgovarajuću pomoć nastavnika. Pri tome nastavnik i učenik zajednički definiraju problem koji određuje novi nastavni sadržaj, zna se da rješenje problema postoji, ali postupak u pravilu nije zadan i svaki učenik samostalno treba doći do rješenja. Ovakav način rada omogućuje visok stupanj diferencijacije nastave jer će nastavnik svakom učeniku pomoći onoliko koliko mu treba. Ipak, Ovčar i Loparić (2008.) zalažu se za suzdržanost u pružanju pomoći učenicima i stvaranje atmosfere u kojoj se učenik osjeća ostavljen sam sebi kako bi upregnuo vlastite snage.

De Zan (2005.) navodi nekoliko stupnjeva kroz koje se prolazi prilikom usvajanja novih spoznaja u istraživački usmjerenoj nastavi:

1. stupanj motivacije – odnosi se na stvaranje problemske situacije,
2. stupanj teškoće – upoznavanja problema,
3. stupanj rješenja – postavljanje hipoteze, izrada plana istraživanja,
4. stupanj rada i izvođenja – izvođenje pokusa, mjerenja, uspoređivanja,
5. stupanj zadržavanja i vježbanja,
6. stupanj postignuća, provjeravanja i primjene naučenog – postignutog.

Pri tome se prva četiri stupnja odnose na novi spoznajni rad što odgovara znanstvenom pristupu, dok su preostala dva stupnja više didaktička, ona odgovaraju prirodnom tijeku nastave matematike, peti je stupanj vježbe, a šesti stupanj primjene.



U matematici se uz pomoć interaktivnih digitalnih materijala koje nazivamo *apletima* vrlo efikasno može organizirati istraživački usmjerena nastava pod uvjetom da je izvršena odgovarajuća priprema. To znači da nastavnik na internetu treba pronaći odgovarajući materijal po kojem će učenici raditi ili ga treba sam izraditi. S obzirom da je mala vjerojatnost da će naći upravo ono što mu treba k tome još i na materinjem jeziku, a kvalitetna izrada apleta oduzima puno više vremena od pripreme za običan nastavni sat, kompromisno rješenje je prilagoditi ono što se nađe potrebama planirane nastave. GeoGebra je program pomoću kojeg se vrlo lako mogu izraditi ili mijenjati već postojeći apleti. Apleti su mali interaktivni programi ugrađeni u web stranicu koja obično sadrži tekstualne naputke u nekoliko koraka kojima se učenike vodi kroz istraživanje na apletu. Više o apletima i njihovoj primjeni u nastavi matematike može se pogledati kod Bjelanović Dijanić (2009.). Radom na apletima učenici eksperimentiraju te samostalno izvode zaključke i na taj način konstruiraju vlastito znanje, a pažljivo odabrani zadaci vode ih do konačnog cilja s minimalnim rizikom od neuspjeha. Hohenwarter (tvorac Geogebre) i Preiner (2007.) ističu da ovakvim pristupom vođenog učenja otkrivanjem učenici spoznaju matematičke pojmove i zakonitosti na višem nivou nego ako im nastavnik prezentira gotove činjenice.

### 5.1. Primjer – interaktivni aplet vezan uz geometriju trokuta

Kao primjer ću pokazati neke aplete iz interaktivnog materijala *Geometrija trokuta* kojeg su izradili naši profesori Šime Šuljić iz Pazina i Ela Rac Marinić Kragić iz Zagreba koji već na samom početku ohrabruju: “*Zahvaljujući apletima geometrija može biti cool.*”

S lijeve strane (Slika 3.) nalazi se izbornik koji prikazuje sve teme ovog digitalnog materijala, a svaka tema dijeli se u nekoliko podtema kao što je na slici 3. vidljivo za temu *Trokut*. U središnjem dijelu ekrana lekcije *Stranice i kutovi trokuta* nalazi se aplet koji izgleda kao prozor GeoGebre dok se s desne strane nalaze upute za rad učenika. Upute su pažljivo sastavljene kako bi ih mogli pratiti i oni koji nisu navikli na rad u GeoGebri.

Prvi zadatak odnosi se na konstrukciju trokuta. Umjesto već nacrtanog trokuta, autori su odlučili da učenici ulože dodatan napor i samostalno pomoću miša i odgovarajućih alata konstruiraju trokut kojeg će promatrati.

U desnom dijelu prozora (Slika 4.) GeoGebre je dinamički crtež, a u lijevom se mogu očitati mjere svih objekata s crteža. Time je stvorena problemska situacija (1. stupanj motivacije). Drugi zadatak odnosi se na upoznavanje problema (2. stupanj teškoće), učenici trebaju pomicati vrhove trokuta i istražiti odnos duljina stranica i veličina nasuprotnih kutova trokuta nakon čega postavljaju pretpostavku (3. stupanj

Slika 3. Lekcija: *Stranice i kutovi trokuta*

**Trokut**

**Stranice i kutovi trokuta**

Datoteka Uređivanje Pogled Postavke Alati Pomoć

Nezavisni objekti  
Zavisni objekti

**1. zadatak.** Nacrtaj trokut u lijevom prozoru:

- Uzmi alat  $\blacktriangleright$  iz alatne trake i njime najprije klikni na točku  $A$ , pa na  $B$ , na  $C$  i na posljedku ponovo na  $A$ . Sa strane dobivamo mjeru za površinu trokuta i duljine stranica.
- Uzmi gumb  $\triangleleft$  i klikni s njime po sredini trokuta da dobiješ kutove.

**2. zadatak.** Pomiči vrhove trokuta alatom  $\blacktriangleleft$  i provjeri vrijedi li:

- Ako je  $\alpha < \beta$  tada je i  $a < b$ .
- Ako vrijedi  $a > b$  tada je  $\alpha > \beta$ .
- Usporedi duljine stranica i veličine kutova. Možeš li zaključiti u kakvom su međusobnom odnosu duljine stranica i veličine nasuprotnih kutova u trokutu [Odgovor]

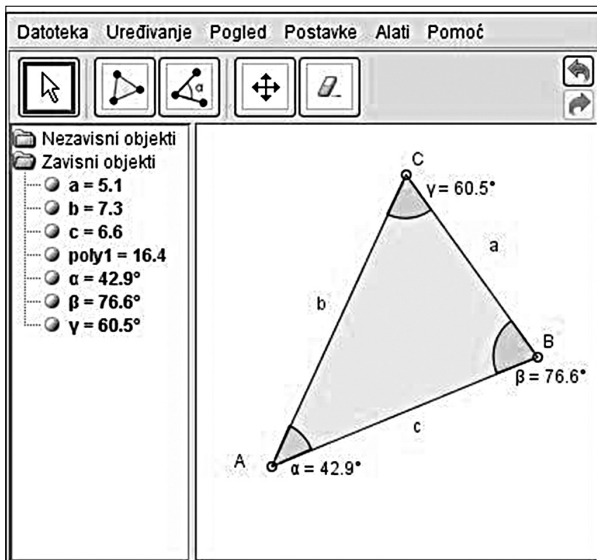
Dalje: Nejednakost trokuta

rješenja) koju čak mogu provjeriti klikom na dugme [Odgovor]. 4. stupanj rada i izvođenja po De Zanu u apletima se ne ostvaruje zasebno već je integriran u proces otkrivanja od samog početka.

Nakon što završi rad na ovom apletu, učenik prelazi na sljedeći i ponovo prolazi isti ciklus otkrivanja, definiranja i rješavanja problema. Međutim, Šuljić (2007.) upozorava na opasnost pretrčavanja kroz materijal posebno kod onih učenika koji su vješti u radu računalom i skloni brzanzu kroz sadržaje tražeći zabavu. Stoga ih na samom početku valja upozoriti da pažljivo čitaju tekst ne preskačući ništa, a još je bolje ako rade u parovima i raspravljaju dok prolaze kroz materijal.

Nakon što prouče zadani materijal, završena je prva faza istraživački usmjerene nastave – novi spoznajni rad. Sada su preostala još dva stupnja, stupanj vježbe i stupanj primjene. Treba napomenuti da učenici nisu ništa zapisivali dok su radili na računalu. Kako bi zaokružili dubinsku obradu novih sadržaja, potrebno je uvježbati usvojeno rješavajući odgovarajuće zadatke iz zbirke, te u razrednoj raspravi analizirati tijekom istraživanja i sistematizirati nove sadržaje. Nije rijedak slučaj da na kraju ovako oblikovanih interaktivnih materijala postoji radni list kojeg učenici mogu ispisati na papir te olovkom riješiti i tako provjeriti stupanj usvojenosti zadanih sadržaja.

Slika 4. Prikaz apleta nakon konstrukcije trokuta



## 6. Projektna nastava

Projektnu metodu neki autori navode kao poseban slučaj učenja otkrivanjem (Bognar i Matijević, 2002.) te se ona smatra najsloženijom metodom iskustvenog učenja, a podrazumijeva rad nekoliko grupa učenika na složenijem matematičkom problemu često bliskom realnom svijetu (Varošaneć, 2006.). Od nastavnika se zahtijeva dodatni angažman i izvjesna hrabrost zbog mogućih poteškoća i neizvjesnog ishoda projekta, ali ova metoda je vrlo zanimljiva i motivirajuća za učenike. Nastavnik ima ulogu menadžera projekta koji cijelo vrijeme nadgleda rad učenika, dok je za učenike važno da imaju sposobnost rada u timu jer će morati podijeliti posao i svaki odraditi svoj svoju ulogu kako bi projekt uspješno završili.

Čižmešija (2006.a) navodi kako pri realizaciji jednog matematičkog projekta treba proći kroz nekoliko faza:

0. faza priprema projekta koja uključuje odabir teme, pripremu učenika te organizaciju rada na projektu,
1. faza postavljanje problema, po mogućnosti otvorenog, nakon čega slijedi brainstorming i sređivanje ideja, preciziranje zadatka te podjela učenika u grupe i podjela zadataka,

2. faza rad u skupinama – prikupljanje izvora informacija, upotreba pomoćnih sredstava poput računala, eventualna komunikacija s drugim grupama, dokumentacijski radovi i sl.,
3. faza integriranje radnih rezultata koje uključuje prezentacije rezultata svake skupine, kritičko vrednovanje te integriranje rezultata u finalni proizvod,
4. faza matematički doprinos – odnosi se na uspostavljanje veze s nastavnim programom i prezentaciju finalnog proizvoda korisnicima.

Proizvod može biti pano, plakat, članak, web stranica, radni materijal za druge učenike i sl., međutim s obzirom da se radi o nastavi pažnju treba usmjeriti i na raznovrsne aktivnosti učenika za vrijeme rada na projektu te znanja i vještine koja će time usvojiti. Teme mogu biti iz bilo kojeg područja, ali je poželjno da se podudaraju s nastavnim planom i programom. U matematici su teme iz geometrije posebno pogodne za projektnu nastavu, a računalo će opet biti nezaobilazan alat za rad učenika. Osim što ga učenici danas sve više koriste za pretraživanje informacija na internetu, prezentaciju svojih radova, izradu popratnih tekstova ili slika, istraživanje u programu dinamične geometrije omogućuje im dodatnu dubinsku obradu podataka prikupljenih iz raznih tekstualnih izvora.

### 6.1. Primjer – Projekt „Četiri karakteristične točke trokuta“

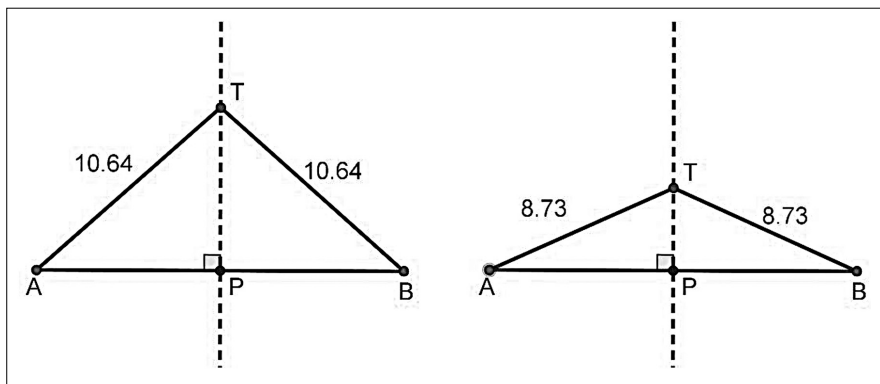
U ovom radu opisat ću tijek jednog projekta kojeg su realizirali učenici iz Srednje škole Čazma u ožujku 2010. godine. Za temu projekta odabrana je nastavna cjelina iz prvog razreda gimnazije – Četiri karakteristične točke trokuta. Kako bi učenike navela na temu projekta koju sam planirala realizirati, na prethodnom nastavnom satu ponudila sam nekoliko otvorenih problema poput ovoga:

“U županiji Nigdjezemskoj postoje ti grada Abraka, Dabraka, Hokus-Pokus i svaka dva su spojena (ravnim) cestama. Županija je odlučila izgraditi željezničku postaju. Na kojem mjestu će ju izgraditi

- a) da bi troškovi izgradnje pristupnih putova do triju cesta bili najjeftiniji?
- b) da stanovnici sva tri grada mogu jednako brzo doputovati do postaje?”

Raspravu smo započeli u razredu, a za domaću zadaću učenici su trebali ponuditi neka rješenja. Na idućem satu analizirali smo ta rješenja i definirali temu. Učenici su podijeljeni u četiri tima, a s obzirom da su već imali iskustva rada u timu nije im bio problem podijeliti zaduženja: proučiti temu u udžbeniku, istražiti interaktivni materijal na računalu, izdvojiti bitno na grafoliju, pripremiti predavanje za ostale učenike te pripremiti materijal za razredni pano.

Slika 5. Istraživanje: svaka točka simetrale dužine jednako je udaljena od krajnjih točaka dužine



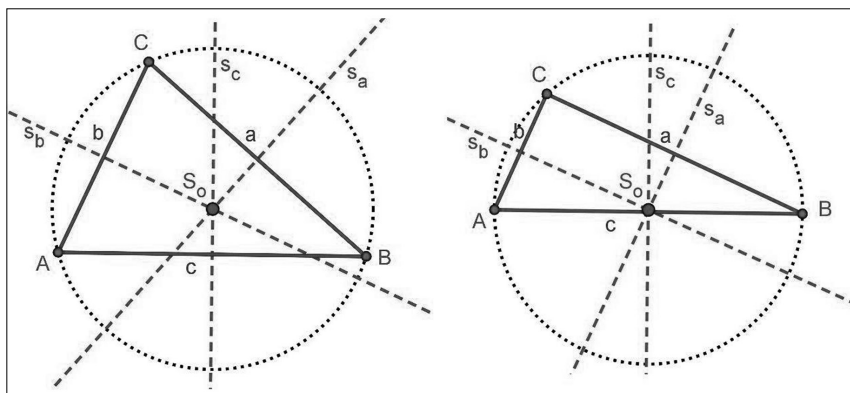
S obzirom da se radilo u blok satu u školi, ponuđena su dva izvora informacija: udžbenik te interaktivna prezentacija profesorice Aleksandre Brmbota iz Raba za što su na raspolaganju bila dva prijenosna računala u učionici na kojima su se učenici pojedinih timova izmjenjivali. Napominjem da je profesorica Brmbota kao članica diskusijske liste nastavnika matematike (<http://groups.yahoo.com/group/nastava-matematike/>) svoj materijal stavila dostupan ostalim kolegama na slobodno korištenje u nastavi. Prezentacija je izvrsno osmišljena i oblikovana, prati udžbenik, a svaki poučak je popraćen odgovarajućom geogebricom na koju vodi poveznica iz prezentacije (geogebrica je gotov dinamični uradak u GeoGebri). Zbog preglednosti učenicima je bilo lako snalaziti se u prezentaciji, odmah su našli dio koji se odnosi na njihov zadatak, npr. na projekciji za *središte opisane kružnice* nudi se sljedeće: *definicija, poučak o simetrali dužine, obrat poučka, konstrukcija, kružnica opisana trokutu*.

Klikom na poveznicu *poučak o simetrali dužine* otvara se geogebrica u kojoj se učenici pomicanjem točke T po simetrali dužine AB mogu uvjeriti da je doista svaka točka simetrale dužine jednako udaljena od krajnjih točaka te dužine, a uz pomoć udžbenika taj su poučak dokazali. (Slika 5.)

U geogebri *kružnica opisana trokutu* pomicanjem bilo koje točke trokuta učenici će se uvjeriti da se sve tri simetrale stranica sijeku u istoj točki, a ta točka je središte trokutu opisane kružnice. Nadalje, moguće je istražiti neke posebne slučajeve trokuta, npr. u pravokutnom trokutu se može uočiti da je središte opisane kružnice polovište hipotenuze. (Slika 6.)

Rezultat projektne nastave bio je nastavni sat na kojem su timovi učenika jedni drugima prezentirali zadanu temu. Također su izradili prikladni materijal za razred-

Slika 6. Istraživanje: sve tri simetrale stranica sijeku se u jednoj točki



ni pano. Neki od ciljeva ovog projekta bili su: da se učenici navikavaju na timski rad, da samostalno proučavaju i istražuju nove spoznaje, da se stave u ulogu nastavnika i ostatku razreda prezentiraju nova znanja, da se naviknu na korištenje tehnologije primjerene nastavi matematike. Također valja istaknuti didaktičku vrijednost procesa kroz koji su učenici radeći na ovom projektu prošli.

## 7. Umjesto zaključka

Primjeri nastave opisani u ovom radu pokazuju kako nastava otkrivanjem ne brine samo o sadržaju već i o tijeku otkrića, učenici se osposobljavaju u tehnici otkrivanja te povećavaju svoju intelektualnu moć i sposobnost ustrojavanja znanja, uče se gdje će pronaći podatke kada im budu potrebni (Bruner, prema De Zan, 2005.).

De Zan (2005.) naglašava kako se samostalnim učeničkim istraživanjem oblikuje otvoreni um učenika, što uključuje neka pozitivna obilježja poput kritičnog odnosa prema prikazanim činjenicama, znatiželju i stvaralaštvo.

Međutim, Kurnik (2008.) upozorava na težinu istraživačke nastave i učenicima i nastavnicima. Učenici moraju biti primjereno osposobljeni za umni rad što se može ublažiti radom u paru, a sama nastava može se kombinirati s heurističkom. Tijekom rada mogu se pojaviti situacije koje nastavnik nije predvidio, ali na njih mora biti pripravan što znači da bi trebao biti dobro osposobljen za izvođenje istraživačke nastave. Međutim, to ne znači da se ipak ne bi trebalo odvažiti i krenuti s uvođenjem novih nastavnih metoda. Učenje otkrivanjem biti će uspješnije ako učenici posjeduju predznanje nužno za praćenje novih sadržaja te ako imaju iskustva u ovakvom načinu učenja.

Varošanec (2006.) također ističe prednosti, ali i nedostatke ovakvih metoda rada. Povećava se motivacija i interes za predmet, razvija se sposobnost apstrahiranja, poopćavanja i induktivnog zaključivanja, znanje se integrira horizontalno i vertikalno. Međutim, ako se izostavi strogi matematički dokaz postavljene hipoteze učenik stječe dojam da se na osnovi nekoliko konkretnih primjera može iskazati tvrdnja i da je to korektno. Kao drugi veliki nedostatak navodi da je za učenje otkrivanjem potrebno puno više vremena nego nekom drugom metodom te da je priprema sata zahtjevnija.

Međutim, zahtjevnost pripreme može se djelomično ublažiti suradnjom nastavnika i razmjenom nastavnih materijala. Kada bi nastavnici iskoristili mogućnosti koje internet pruža i svoje materijale stavljali na raspolaganje drugima, kao što su to učinili kolege Aleksandra Brmbota, Ela Rac Marinić Kragić i Šime Šuljić čiji radovi su se koristili u opisanim primjerima nastave, tada bi jedni drugima znatno uštedjeli vrijeme pripreme, a korišteni materijali dobili bi na kvaliteti. Također bi se nakon izvjesnog vremena stvorila velika baza digitalnih obrazovnih materijala na hrvatskom jeziku kao što to postoji u drugim zemljama. Da ideja suradništva i dijeljenja nije daleko od realnosti, može se pogledati na mrežnim stranicama GeoGebre ([www.geogebra.org/en/upload/](http://www.geogebra.org/en/upload/) – mapa hrvatski) te na mrežnim stranicama udruge Normala ([www.normala.hr](http://www.normala.hr)) gdje su nastavnici entuzijasti već započeli s ozbiljnim radom.

## Literatura

- Andrilović, V., Čudina-Obradović, M. (1996.). *Psihologija učenja i nastave*. Zagreb: Školska knjiga.
- Bjelanović Dijanić, Ž. (2009.). *Mathlet – interaktivni digitalni materijal namijenjen samostalnom učenju*. Pogled kroz prozor, br 6, <http://pogledkrozprozor.wordpress.com/2009/03/31/mathlet-interaktivni-digitalni-materijal-namijenjen-samostalnom-ucenju/>, (pristupljeno 27.8.2011.)
- Bjelanović Dijanić, Ž. (2010.). *Učenje istraživanjem u GeoGebri prema modelu Georga Pólya*. Matematika i škola, XII (57), 64-70.
- Bjelanović Dijanić, Ž. (2011.). *Učenje matematike otkrivanjem uz pomoć programa dinamičke geometrije GeoGebra – Akcijsko istraživanje*. The Third International Scientific Colloquium “Mathematics and Children” – The Math Teacher, Osijek: Element, str. 491-504, [http://free-bj.t-com.hr/zbjelanovic/radovi/akcijsko\\_istrazivanje\\_GeoGebra.pdf](http://free-bj.t-com.hr/zbjelanovic/radovi/akcijsko_istrazivanje_GeoGebra.pdf), (pristupljeno 27.8.2011.)
- Bognar, L., Matijević, M. (2002.). *Didaktika*. Zagreb: Školska knjiga.
- Čižmešija, A. (2006.a). *Projektna nastava matematike*. <http://web.math.hr/nastava/mnm1/Projekt.ppt> (pristupljeno 27.8.2011.)
- Čižmešija, A. (2006.b). *Zadaci otvorenog tipa*. <http://web.math.hr/nastava/mnm1/Otvoreni.ppt> (pristupljeno 2006.)
- De Zan, I. (2005.). *Metodika nastave prirode i društva*. Zagreb: Školska knjiga.

- Hohenwarter, M., Preiner, J. (2007), Creating Mathlets with Open Source Tools. *The Journal of Online Mathematics and Its Applications*, Vol. 7. [www.maa.org/joma/Volume7/Hohenwarter2/index.html](http://www.maa.org/joma/Volume7/Hohenwarter2/index.html) (pristupljeno 27.8.2011.)
- Kurnik, Z. (2008.). *Istraživačka nastava*. Matematika i škola, X (47), 52-59.
- Krsnik, R. (2003.). *Problemski usmjerena nastava, deklarativno ili stvarno?* U: Šesti hrvatski simpozij o nastavi fizike: Problemski i istraživački usmjerena nastava fizike. Split: HFD, str. 6-14, <http://nastava.hfd.hr/simpozij/2003/2003-Krsnik.pdf> (pristupljeno 27.8.2011.)
- Matijević, M. (1999.). *Didaktika i obrazovna tehnologija*. U: A. Mijatović, (ur.), Osnove suvremene pedagogije, str. 487-510. Zagreb: HPKZ.
- Ovčar, S., Loparić, S. (2008.). *Kako primijeniti istraživačku metodu u nastavi matematike*. U: Zbornik radova trećeg kongresa nastavnika matematike, str. 187-198. Zagreb: HMD,.
- Polya, G. (1966.). *Kako ću riješiti matematički zadatak*. Zagreb: Školska knjiga.
- Polya, G. (2003.). *Matematičko otkriće*, Zagreb: HMD.
- Rac Marinić Kragić, E., Šuljić, Š. (2006.). *Geometrija trokuta*. [http://www.normala.hr/interaktivna\\_matematika/trokut/](http://www.normala.hr/interaktivna_matematika/trokut/) (pristupljeno 27.8.2011.)
- Šuljić, Š. (2007.). *Poseban prilog: CD ROM*. Matematika i škola, VIII (38), 122-128.
- Šuljić, Š. (2008.). *Interaktivni materijali za nastavu matematike*. <http://www.azoo.hr/admin/fckeditor/File/Interaktivni%20materijali.ppt> (pristupljeno 1.4.2010)
- Varošaneć, S. (2006.). *Učenje otkrivanjem*. <http://web.math.hr/nastava/mnml1/ucenje.doc> (pristupljeno 27.8.2011.)

## Computer as a tool for students' research in teaching mathematics

### Summary

The modern teaching of natural sciences emphasizes the importance of activities and independent student learning, and requires introducing student into discovery learning. In teaching mathematics it can be realized by using computers and specialized software. This article presents three models of using computer and dynamic geometry software as a tool for student research in mathematics: discovery learning, inquiry based learning and project based learning. The research in teaching points students the original cycle of scientific research, encouraging a critical attitude toward the facts presented, curiosity and creativity, increases motivation, develops the ability to abstraction, generalization and inductive reasoning as in the teaching of mathematics is extremely important.

**Key words:** applet, inquiry based learning, cognitive engagement, dynamic geometry software, project based learning, computer, discovery learning