Izvorni znanstveni rad
UDK: 330.4:366.1

Dr. sc. Mira Oraić
Doc. dr. sc. Ilko Vrankić[1]

DUALNI OPIS POTROŠAČEVIH PREFERENCIJA[2]

DUAL CHARACTERIZATION OF CONSUMER PREFERENCES

SAŽETAK: Dualnost u mikroekonomskoj teoriji u širem smislu omogućuje da se isti problem sagleda iz različitih perspektiva. Pritom dualnost omogućuje da se postojeća znanja dokažu na jednostavniji način, da se izvedu rezultati koji su dualni poznatima i da se promjenom načina razmišljanja dođe do novih spoznaja. U radu se sintetiziraju znanja o dualnosti u teoriji ponašanja potrošača i na originalni način povezuju dualna svojstva funkcija koje opisuju ukus potrošača. Zamjena primarnih varijabli dualnima omogućila je izvođenje nove novčane mjere promjene blagostanja i njezin opis površinom ispod inverzne kompenzirane krivulje potražnje. Taj novi teorijski rezultat dual je poznate kompenzacijske varijacije koju je opisao Hicks polovinom prošloga stoljeća.

KLJUČNE RIJEČI: dualnost, konveksni skupovi, potrošačeve preferencije, novčana mjera promjene blagostanja.

ABSTRACT: Duality in a microeconomic theory in the broad sense allows the same problem to be considered from different perspectives. The duality allows confirmation of existing knowledge in a simpler way, to derive the results that are dual to known ones and to discover new insights by changing a way of thinking. The paper synthesizes knowledge of duality in the theory of consumer behavior and links the properties of dual functions that describe the taste of consumers in an original way. Replacement of the primary variables with the dual ones enabled the derivation of the new monetary measure of welfare change and its description by the area positioned below the inverse compensated demand curve. The new theoretical result is a dual of a known compensatory variation described by Hicks in last century.

KEY WORDS: duality, convex sets, consumer preferences, monetary measure of welfare change.

---

1 Ekonomski fakultet Zagreb, Trg J. F. Kennedya 6, 10000 Zagreb, Hrvatska

2 Ovaj je rad nastao na temelju rezultata istraživanja za doktorsku disertaciju "Dualnost u mikroekonomskoj teoriji" Mire Oraić koja je obranjena 12. srpnja 2011.

1. UVOD

Dualnošću u mikroekonomskoj teoriji bavili su se mnogi autori. Autori Quirino Paris i Michael R. Caputo u svojem su članku pod naslovom *The Rhetoric of Duality* dualnost definirali ovako: "U mikroekonomskim se primjenama dualnost odnosi na pristup koji analizira problem kao funkciju parametara, a ne kao funkciju varijabli odlučivanja" /32, str. 196/. Drugim riječima, osnovno je obilježje dualnog pristupa u mikroekonomskoj teoriji zamjena varijabli /36, str. 19, 10, str. 47/. Larry G. Epstein u svojem radu *Generalized Duality and Integrability* govori o teoriji dualnosti na sljedeći način: "Teorija dualnosti opisuje alternativne ekvivalentne opise potrošačevih preferencija (direktna ili indirektna funkcija korisnosti, funkcija izdataka) ili tehnologije proizvođača koji posluje u uvjetima savršene konkurencije (funkcija proizvodnje, funkcija profita, funkcija troškova)" /16, str. 655/.

U širem smislu dualnost omogućuje da se isti problem sagleda iz različitih perspektiva. Pritom u ekonomiji svoju pažnju možemo usmjeriti primarno na količine, a dualno na cijene koje smatramo parametrima kada su količine varijable odlučivanja. Poznati je primjer Edgeworthovih krivulja indiferencije. Oblik tih krivulja opisuje preferencije potrošača koji više voli uprosječenu košaru od krajnosti. U tom se opisu preferencija potrošača prepoznaje opadanje granične stope supstitucije između dobara niz striktno konveksnu krivulju indiferencije koja odozdo zatvara striktno konveksni skup barem toliko dobrih košara dobara i implicira negativni učinak supstitucije. Konveksne skupove kojima opisujemo ekonomske zakonitosti možemo opisati na dva načina i na taj se način dualnost prirodno smješta u mikroekonomsku teoriju. Primarni opis skupa polazi od količina, varijabli koje se opisuju optimalnim izborima ekonomskih subjekata pri tržišnim cijenama. Optimalni izbori određuju podupiruće ravnine na kojima se zasniva dualni opis konveksnog skupa.

U radu se podrobno opisuju veze između funkcija koje opisuju preferencije potrošača, direktne funkcije korisnosti, indirektne funkcije korisnosti, funkcije izdataka i funkcije udaljenosti, i izvodi se sinteza dualnosti u teoriji ponašanja potrošača. Dualnost se pretvara u način razmišljanja i pronalazi nova novčana mjera promjene blagostanja koja se opisuje površinom ispod inverzne kompenzirane krivulje potražnje. Taj novi teorijski rezultat dual je poznate kompenzacijske varijacije koju je opisao Hicks polovinom prošloga stoljeća.

2. DUALNOST IZMEĐU DIREKTNE I INDIREKTNE FUNKCIJE KORISNOSTI

Direktna funkcija korisnosti, $u(\mathbf{x})$, opisuje preferencije potrošača na osnovi količina dobara, pri čemu je $\mathbf{x} = (x_1,...,x_n)$ kombinacija količina dobara, odnosno košara dobara. Maksimalnu korisnost koju potrošač može ostvariti pri nekim cijenama i dohotku opisuje indirektna funkcija korisnosti, $v(\mathbf{p}, M)$. Indirektna je funkcija korisnosti funkcija tržišnih parametara, cijena dobara i dohotka. U nastavku se pokazuje kako indirektna funkcija korisnosti zadovoljenjem određenih uvjeta regularnosti također u potpunosti opisuje preferencije potrošača. Drugim riječima, zadovoljenjem uvjeta regularnosti postoji dualnost između direktne i indirektne funkcije korisnosti.

Teoreme dualnosti su između direktne i indirektne funkcije korisnosti dokazivali mnogi autori, poput Samuelsona /37, 38/, Laua /26/, Sheparda /40/, Hanocha /18/, Weddepohla /44/, Katznera /23/, Afriata /1/ i Dieweta /13/. Sadržaj je tih teorema da polazeći od neprekidne, rastuće i kvazikonkavne funkcije korisnosti $u(\mathbf{x})$ indirektna funkcija korisnosti, $v(\mathbf{P})$, zadovoljava sljedeća svojstva: $v(\mathbf{P})$ je opadajuća funkcija: ako je $\mathbf{P}^2 \gg \mathbf{P}^1 \gg 0$, tada je $v(\mathbf{P}^2) < v(\mathbf{P}^1)$, $v(\mathbf{P})$ kvazikonveksna funkcija $v(\mathbf{P})$, je takva da je funkcija $u(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{P}} \left\{ v(\mathbf{P}) : \mathbf{Px} \le 1, \mathbf{P} \in \mathrm{R}^n_{++} \right\}$ definirana na $\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n_{++}$ neprekidna na R^n_{++} i ima neprekidno proširenje na R^n_{+}. Nadalje, ako indirektna funkcije korisnosti ima prethodna svojstva i ako je diferencijabilna, s derivacijama različitim od nule u izabranom $\mathbf{P}$, tada je $\mathbf{x}^M(\mathbf{P}) = -\dfrac{\partial v(\mathbf{P}) / \partial \mathbf{P}}{\mathbf{P} \partial v(\mathbf{P}) \partial \mathbf{P}}$ jedinstveno rješenje problema maksimizacije korisnosti uz dano budžetsko ograničenje. Izvedena je funkcija korisnosti $u(\mathbf{x})$ koja se dobije iz indirektne funkcije korisnosti $v(\mathbf{P})$ neprekidna, rastuća i kvazikonkavna. U nastavku se navedena tvrdnja i ilustrira.

Tržišna se razdoblja opisuju cijenama na koje neznatni potrošač nema utjecaja, $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_n)$, i dohotkom kojim raspolaže, $M > 0$. Skup dostupnih košara dobara pri cijenama $\mathbf{p}$ i dohotku M opisuje skup ostvarive potrošnje, $\mathbf{px} \le M$. Kako cijene izražene u jedinicama dohotka, $\mathbf{P} \equiv \dfrac{\mathbf{p}}{M} \gg \mathbf{0}$, koje nazivamo normaliziranim cijenama, određuju isti budžetski prostor, skup ostvarive potrošnje možemo opisati nejednakošću $\mathbf{Px} \le 1$. Pretpostavljamo da je direktna funkcija korisnosti neprekidna na svojoj domeni koja opisuje skup zamislive potrošnje, $\mathbf{X} = \Re^{\mathbf{n}}_{+} = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, ..., x_n); x_i \ge 0, i = 1, ..., n \right\}$, striktno rastuća i kvazikonkavna. Striktni rast direktne funkcije korisnosti implicira da povećanje količina svih dobara u košari ima blagotvoran učinak na blagostanje nezasitnog potrošača. Svojstvo je kvazikonkavnosti direktne funkcije korisnosti plod prihvaćanja aksioma o konveksnosti potrošačevih preferencija prema kojem potrošač uravnoteženu košaru dobara voli barem toliko koliko i jednu od krajnjih košara. Granična stopa supstitucije kao subjektivna vrijednost male jedinice jednog dobra izražena subjektivnom vrijednošću one količine drugog dobra koju je potrošač zauzvrat voljan žrtvovati tada opada kada se kreće niz konveksnu krivulju indiferencije supstituirajući prvim dobrom drugo dobro.

Problem određivanja efikasne raspodjele ograničenog dohotka opisuje model maksimizacije korisnosti uz dano budžetsko ograničenje:

$$v(\mathbf{P}) \equiv \max_{\mathbf{x} \ge \mathbf{0}} \quad u(\mathbf{x}) \qquad (1)$$
$$\text{uz ograničenje } \mathbf{Px} \le 1.$$

Varijable odlučivanja u tom su problemu optimizacije količine dobara. Traže se ekonomski dostupne količine kojima direktna funkcija korisnosti pridružuje najveći indeks korisnosti u skupu ostvarive potrošnje. Maksimalna je korisnost funkcija cijena dobara i dohotka potrošača, odnosno funkcija normaliziranih cijena dobara, na osnovi kojih se indirektno uspoređuje blagostanje potrošača u različitim razdobljima. Funkcija se maksimalnih korisnosti naziva i indirektnom funkcijom korisnosti, $v(\mathbf{P})$.

Indirektna funkcija korisnosti zadovoljava sljedeća svojstva neovisno o funkcionalnom obliku direktne funkcije korisnosti[3]:

[3] Popisu svojstava indirektne funkcije korisnosti nedostaje strogi rast u dohotku i homogenost stupnja nula u cijenama i dohotku. Ta su svojstva izostavljena zbog jasnije ilustracije dualnosti između direktne i indi-

1. $v(\mathbf{P})$ je neprekidna funkcija za $\mathbf{P} \gg \mathbf{0}$. Neprekidnost indirektne funkcije korisnosti proizlazi iz teorema o maksimumu.
2. $v(\mathbf{P})$ je opadajuća funkcija u $\mathbf{P}$. Zapisano simbolima, ako je $\mathbf{P}^2 \geq \mathbf{P}^1$, tada vijedi $v(\mathbf{P}^2) \leq v(\mathbf{P}^1)$. Porast cijene nekog dobra ili smanjenje dohotka potrošaču smanjuje maksimalnu razinu korisnosti.
3. $v(\mathbf{P})$ je kvazikonveksna funkcija cijena. Kvazikonveksnost indirektne funkcije korisnosti ima osebujno ekonomsko značenje. Sadržaj je tog svojstva da se uravnoteženjem normaliziranih cijena dobara potrošača ne može dovesti u povoljniji položaj u odnosu na položaj koji ostvaruje u jednom od krajnjih budžetskih prostora. Takav zaključak proizlazi iz činjenice da je uravnoteženi budžetski prostor koji se dobije ponderiranjem normaliziranih cijena jednakim ponderima podskup unije polaznih budžetskih prostora /44/.

Pokazali smo kako se indirektna funkcija korisnosti izvodi iz direktne funkcije korisnosti. Postavlja se pitanje možemo li krenuvši od izvedene indirektne funkcije korisnosti doći do direktne funkcije korisnosti i hoćemo li dobiti direktnu funkciju korisnosti od koje smo krenuli. Odgovor je na postavljeno pitanje potvrdan uz zadovoljenje određenih uvjeta regularnosti i potvrđuje dualnost između direktne i indirektne funkcije korisnosti.

Promotrimo li pramen budžetskih pravaca koji prolaze kroz košaru dobara $\mathbf{x}$, potrošač pri svakoj kombinaciji normaliziranih cijena dobara izabire najpoželjniju košaru dobara kojom ostvaruje veću razinu korisnosti od $u(\mathbf{x})$. Dugim riječima, potrošač koji se suočava s normaliziranim cijenama $\mathbf{P}$ i pritom može izabrati košaru dobara $\mathbf{x}$, prikladnom preraspodjelom izdataka ne može doći u nepovoljniji položaj i indeks je korisnosti košare dobara $\mathbf{x}$ najmanji od maksimalnih korisnosti koji se dobivaju za normalizirane cijene pri kojima potrošač može priuštiti košaru dobara $\mathbf{x}$. Direktna se funkcija korisnosti stoga izvodi iz modela minimizacije maksimalne korisnosti uz ograničenje dostupnosti košare $\mathbf{x}$,

$$u(\mathbf{x}) \equiv \min_{\mathbf{P} \geq \mathbf{0}} \quad v(\mathbf{P}) \qquad (2)$$
$$\text{uz ograničenje } \mathbf{P}\mathbf{x} = 1$$

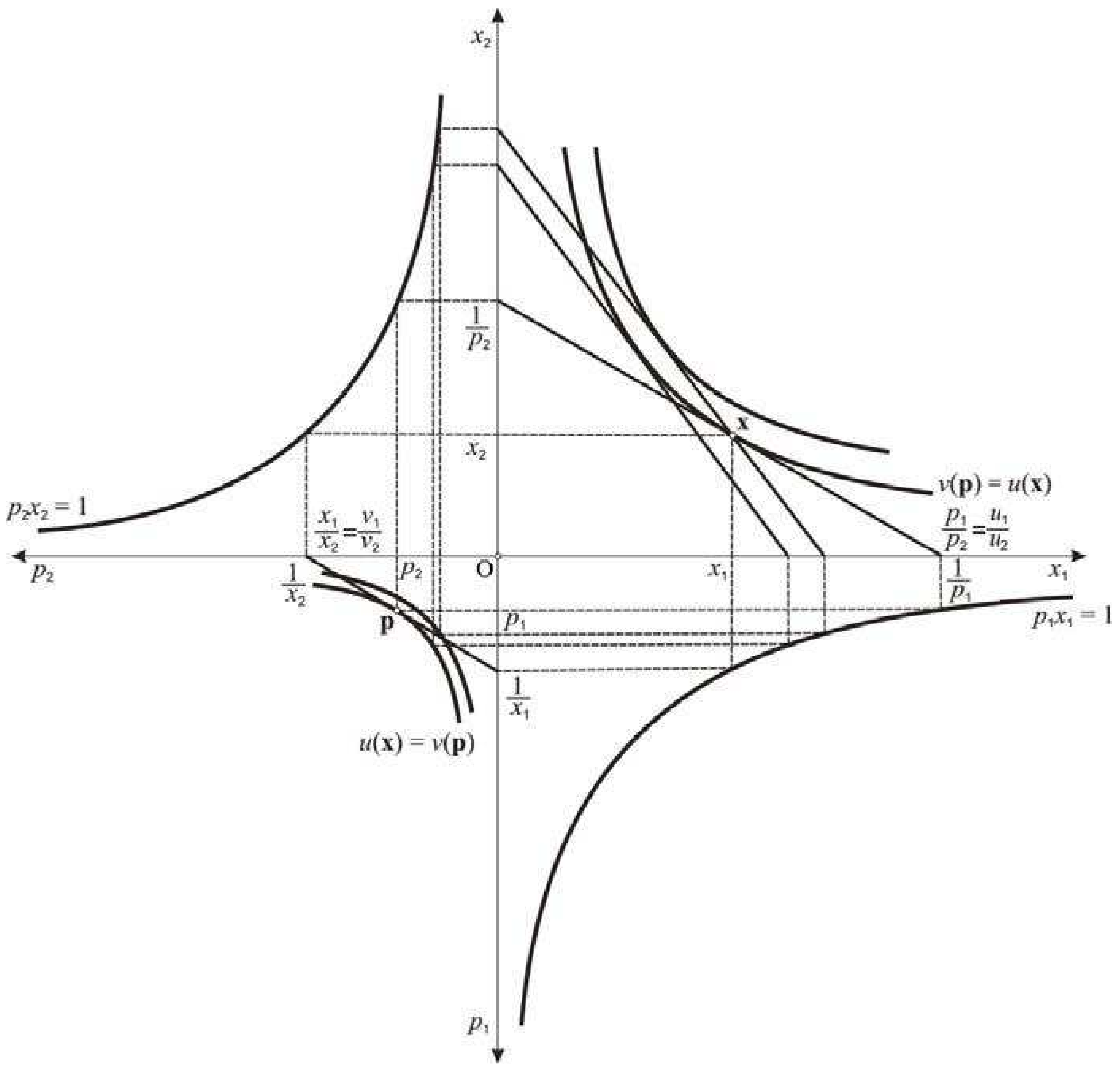
Kombinacija normaliziranih cijena $\mathbf{P}$, koja odgovara dodiru indirektne budžetske crte i indirektne krivulje indiferencije u prostoru normaliziranih cijena dobara, je ona koja minimizira maksimalnu razinu korisnosti kada su zadane količine dobara $\mathbf{x}$. Normalizirane se cijene dobara koje odgovaraju odsječcima indirektne budžetske crte preslikavaju na odgovarajuće osi količina u kombinaciju količina dobara $\mathbf{x}$ koja potrošaču daje najveću razinu korisnosti za zadane normalizirane cijene $\mathbf{P}$.

Preslikavanjem pramena indirektnih budžetskih pravaca koji prolaze kroz kombinaciju normaliziranih cijena $\mathbf{P}$ iz prostora normaliziranih cijena dobiva se direktna budžetska crta u prostoru količina dobara. Pritom odsječci na osima količina odgovaraju recipročnim vrijednostima kombinacije normaliziranih cijena $\mathbf{P}$ pri kojoj je potrošač izabrao košaru dobara $\mathbf{x}$, $\frac{1}{P_1}$ i $\frac{1}{P_2}$. Proporcionalnim se povećanjem količina u prostoru normaliziranih

rektne funkcije korisnosti. Svojstva se u potpunosti analiziraju u poglavlju o dualnosti između indirektne funkcije korisnosti i funkcije izdataka.

cijena dobara svakom pravcu iz pramena pridružuje indirektna budžetska crta koja dodiruje indirektnu krivulju indiferencije. Preslikavanjem tih budžetskih crta izvodi se direktna krivulja indiferencije u prostoru količina dobara. Međusobni položaj direktne budžetske crte i direktne krivulje indiferencije otkriva da je direktna funkcija korisnosti kvazikonkavna u količinama dobara.

U analizi smo pošli od striktno rastuće i kvazikonkavne direktne funkcije korisnosti i izveli striktno opadajuću i kvazikonveksnu indirektnu funkciju korisnosti i obratno. Da je polazna direktna funkcija korisnosti imala pozitivno nagnute ili konkavne dijelove krivulje indiferencije, izvedena direktna funkcija korisnosti podudarala bi se s polaznom direktnom funkcijom korisnosti samo na negativno nagnutim i konveksnim dijelovima krivulje indiferencije. O tome eksplicitno govori i Hotelling: „Ako zamislimo krivulje indiferencije koje imaju valoviti oblik, na nekim dijelovima konveksni, a na drugim konkavni, prisiljeni smo zaključiti da se samo konveksni dijelovi mogu smatrati važnima, budući da su drugi u osnovi neopazivi. Mogu se otkriti samo u nepravilnostima koje se mogu pojaviti u potrošnji prilikom promjene relativnih cijena, što vodi do naglog skoka točke dodira preko ponora kada budžetska crta rotira. Međutim, iako takve nepravilnosti mogu otkriti postojanje po-



Slika 1. Od negativno nagnute i konveksne krivulje indiferencije u primarnom prostoru do negativno nagnute i konveksne krivulje indiferencije u dualnom prostoru i natrag

nora, ne mogu izmjeriti njegovu dubinu. Konkavni dijelovi krivulja indiferencije i njihove generalizacije, ako postoje, zauvijek ostaju u nemjerljivoj tami“ [4]/21, str. 74/.

Walter E. Diewert svoj rad *Applications of Duality Theory* započinje ovako: “Postoje dvije osnovne praktične prednosti teorije dualnosti u ekonomiji. Prva se praktična primjena teorije dualnosti sastoji u tome da nam omogućuje da izvedemo sustave funkcija potražnje (…) jednostavnim deriviranjem funkcija, izbjegavajući pritom eksplicitno rješavanje problema maksimizacije i minimizacije uz ograničenja“ /13, str. 106/. Najvažniji rezultati koji proizlaze iz mogućnosti opisa potrošačevih preferencija pomoću direktne ili indirektne funkcije korisnosti i s teorijskog i s empirijskog stajališta jesu Roy-Willeov identitet i Hotelling–Woldov identitet. Primjenom Roy-Willeova identiteta na indirektnu funkciju korisnosti izravnim se deriviranjem dobiju Marshallove funkcije potražnje, $x_i = v_i / \sum_{j=1}^{n} v_j P_j$, a primjenom njegova duala koji se zove Hotelling-Woldov identitet, izravnim deriviranjem funkcije korisnosti dobiju se inverzne Marshallove funkcije potražnje, $P_i = u_i / \sum_{j=1}^{n} u_j x_j$. U izvođenju Hotelling-Woldova i Roy-Villeova identiteta zbog jedinstvenosti izbora pretpostavlja se da je funkcija korisnosti striktno kvazikonkavna, odnosno da je indirektna funkcija korisnosti striktno kvazikonveksna.

Primjenom Hotelling-Woldova identiteta jednostavnije se izvode inverzne funkcije potražnje polazeći od direktne funkcije korisnosti. Iz geometrijskog opisa ravnoteže potrošača, odnosno dodira direktne krivulje indiferencije i direktne budžetske crte, otkriva se proporcionalnost gradijenta funkcije korisnosti i inverznih funkcija potražnje,

$$\nabla u = \lambda \mathbf{P}, \quad \mathbf{P} = \frac{\nabla u}{\lambda}. \tag{3}$$

Iz budžetskog se ograničenja u problemu određuje vrijednost koeficijenta proporcionalnosti,

$$\mathbf{Px} = 1, \quad \frac{\nabla u\, \mathbf{x}}{\lambda} = 1, \quad \lambda = \mathbf{x}\nabla u, \tag{4}$$

iz čega lako proizlazi Hotelling-Woldov identitet:

$$\mathbf{P} = \frac{\nabla u}{\mathbf{x}\nabla u}. \tag{5}$$

[4] Izvorni je tekst: “If indifference curves for purchases be thought of as possessing a wavy character, convex to the origin in some regions and concave in others, we are forced to the conclusion that it is only the portions convex to the origin that can be regarded as possessing any importance, since the others are essentially unobservable. They can be detected only by the discontinuities that may occur in demand with variation in price-ratios, leading to an abrupt jumping of a point of tangency across a chasm when the straight line is rotated. But, while such discontinuities may reveal the existence of chasms, they can never measure their depth. The concave portions of the indifference curves and their many-dimensional generalizations, if they exist, must forever remain in unmeasurable obscurity“ (Hotelling, 1935:74).

Primjenom Roy-Villeova identiteta jednostavnije se izvode funkcije potražnje za dobrima polazeći od indirektne funkcije korisnosti. Iz geometrijskog opisa ravnoteže potrošača, odnosno dodira indirektne krivulje indiferencije i indirektne budžetske crte, otkriva se proporcionalnost gradijenta indirektne funkcije korisnosti i funkcija potražnje,

$$\nabla v = \mu \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \frac{\nabla v}{\mu}. \tag{6}$$

Iz budžetskog se ograničenja u problemu određuje vrijednost koeficijenta proporcionalnosti,

$$\mathbf{Px} = 1, \quad \frac{\mathbf{P}\nabla v}{\mu} = 1, \quad \mu = \mathbf{P}\nabla v, \tag{7}$$

iz čega lako proizlazi Roy-Villeov identitet:

$$\mathbf{x} = \frac{\nabla v}{\mathbf{P}\nabla v}. \tag{8}$$

U izvođenju funkcija potražnje za dobrima talijanski inženjer Antonelli prepoznao je da se maksimalna korisnosti koju potrošač, uz raspoloživi dohodak, može ostvariti pri nekim cijenama može izraziti upravo kao funkcija tih parametara. Houthakker je takvu funkcionalnu vezu nazvao indirektnom funkcijom korisnosti /22, str. 157/. Iako se i Konüs 1924. godine bavio indirektnom funkcijom korisnosti, prvi su izravno govorili o dualnosti u okviru teorije ponašanja potrošača Konüs i Byushgens /25/ navodeći da se preferencije potrošača jednako dobro mogu opisati pomoću količina dobara kao primarnih varijabli i pomoću cijena i dohotka kao dualnih varijabli. Antonelli je već 1886. godine u svojem radu izrazio funkcije potražnje za dobrima preko funkcije maksimalne korisnosti i time nagovijestio praktičnu primjenu dualnosti u ekonomiji /2/. Međutim, tek je francuski ekonomist René Roy 1942. godine naglasio njegovu važnost u empirijskim istraživanjima i neovisno došao do istog rezultata /36/. Stoga je taj rezultat u literaturi poznat pod nazivom Royev identitet. Znajući da proporcionalna promjena cijena i dohotka nema utjecaj na potrošačev budžetski prostor, a time ni na korisnost najpoželjnije košare, Roy je indirektnu funkciju korisnosti izrazio kao funkciju normaliziranih cijena dobara i izveo Marshallove ili nekompenzirane funkcije potražnje za dobrima pomoću sljedeće verzije Royeva identiteta, $x_i(\mathbf{P}) = \frac{\partial v(\mathbf{P})}{\partial P_i} / \sum_{j=1}^{n} P_j \frac{\partial v(\mathbf{P})}{\partial P_j}, \ i = 1, \ 2, ..., N.$ Često se taj rezultat u literaturi naziva Roy-Villeov identitet po francuskom matematičaru Villeu koji ga je 1946. godine također izveo /42/. Vrijedno je spomenuti i rad Wolda /46, 47/ koji se u tom kontekstu bavio oblikom krivulja indiferencije u prostoru normaliziranih cijena dobara i pokazao da je indirektna funkcija korisnosti kvazikonveksna funkcija u normaliziranim cijenama.

3. DUALNOST IZMEĐU DIREKTNE FUNKCIJE KORISNOSTI I FUNKCIJE IZDATAKA

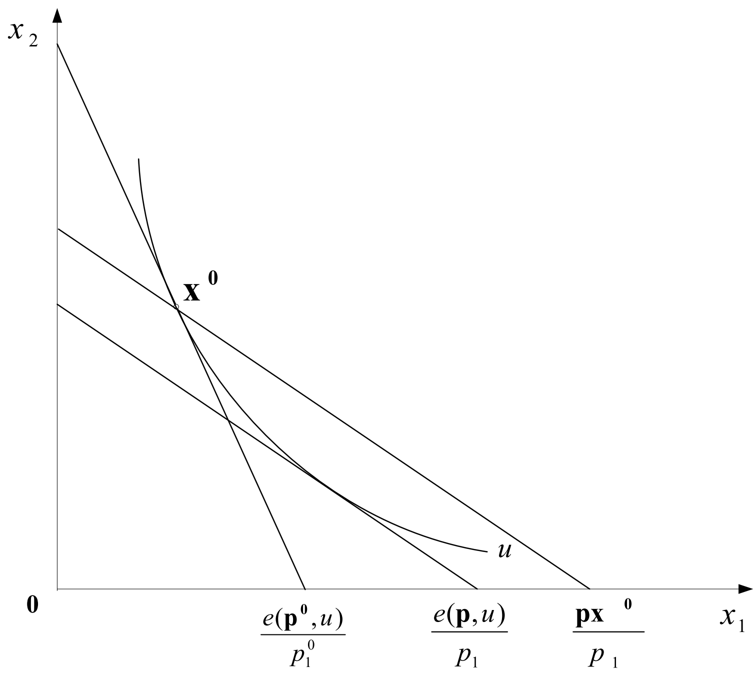
Funkcija izdataka izvodi se iz modela minimizacije izdataka za zadanu razinu korisnosti:

$$e(\mathbf{p},u) = \min_{\mathbf{x}} \mathbf{px} \tag{9}$$

$$\text{uz ograničenje } u(\mathbf{x}) = u.$$

Funkcija izdataka zadovoljava brojne uvjete regularnosti o kojima se govori u poglavlju o vezi između indirektne funkcije korisnosti i funkcije izdataka. U tom se poglavlju svojstva funkcije izdataka dokazuju na temelju svojstava njezine inverzne funkcije, indirektne funkcije korisnosti, i obratno.

U okviru se modela minimizacije izdataka za zadanu razinu korisnosti polazi se od neprekidne, rastuće i kvazikonkavne direktne funkcije korisnosti i izvodi neprekidna funkcija izdataka koja je strogo rastuća i neograničena odozgo u indeksu korisnosti i rastuća, linearno homogena, konkavna i diferencijabilna u cijenama, a derivacija je funkcije izdataka po cijeni nekog dobra jednaka Hicksovoj funkciji potražnje za tim dobrom. U nastavku se pokazuje kako se iz funkcije izdataka izvodi funkcija korisnosti koja generira funkciju izdataka:



Slika 2. Dualni opis skupa barem tako dobrih košara

Jednadžba je krivulje indiferencije koja prolazi kroz izabranu proizvoljnu košaru dobara $\mathbf{x}^0$ $u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}^0)$. Povuče li se tangenta u točki $\mathbf{x}^0$ na tu krivulju indiferencije i pretpostavi li se da je nagib tangente na krivulju indiferencije u točki $\mathbf{x}^0$ jednak odnosu cijena dobara, $\frac{p_1^0}{p_2^0}$, taj odnos zadovoljavaju i sve proporcionalne promjene cijena p_1^0 i p_2^0. Sve su druge košare dobara na krivulji indiferencije $u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x^0})$ pri tim cijenama skuplje, pa se može zaključiti da je košara dobara $\mathbf{x^0}$ najjeftinija košara pri cijenama p_1^0 i p_2^0, odnosno da vrijedi sljedeća jednakost $e(\mathbf{p^0}, u(\mathbf{x^0})) = \mathbf{p^0}\,\mathbf{x^0}$. Promatraju li se neke druge cijene, p_1 i p_2, i krivulja indiferencije $u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x^0})$, košara dobara $\mathbf{x^0}$ više nije najjeftinija i vrijedi sljedeća nejednakost $e(\mathbf{p}, u(\mathbf{x^0})) \leq \mathbf{p}\,\mathbf{x^0}\ \forall \mathbf{p}$. Uzimajući u obzir da se pri cijenama $\mathbf{p^0}$ gornja nejednakost pretvara u jednakost i da je funkcija izdataka strogo rastuća funkcija u razini korisnosti, zaključuje se da ne postoji indeks korisnosti koji je veći od indeksa korisnosti košare $\mathbf{x^0}$ za koji bi vrijedila gornja nejednakost. Drugim riječima, direktna se funkcija korisnosti izvodi iz funkcije izdataka rješavanjem sljedećeg modela optimizacije:

$$u(\mathbf{x^0}) = \underset{u}{\text{maks}} \left\{ u : e(\mathbf{p}, u(\mathbf{x^0})) \leq \mathbf{p}\,\mathbf{x^0}\ \forall \mathbf{p} \right\} \tag{10}$$

U okviru teorije proizvodnje teorem je o dualnosti između funkcije proizvodnje i funkcije troškova, koji je matematički ekvivalentan teoremu dualnosti između funkcije korisnosti i funkcije izdataka, prvi dokazao Ronald W. Shepard 1953. godine u radu *Cost and Production Functions /39/*. U radu se oslanjao na svojstva konveksnih skupova kojima se bavio Fenchel /17/. Doprinos razvoju formalne teorije dualnosti dali su i Uzawa /41/, Shepard /40/ i Diewert /12/.

4. FUNKCIJA IZDATAKA I INDIREKTNA FUNKCIJA KORISNOSTI

Vezu između funkcije izdataka i indirektne funkcije korisnosti opisuju sljedeće jednakosti,

$$v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)) = u, \tag{11}$$

i

$$e(p_1, p_2, v(p_1, p_2, M)) = M. \tag{12}$$

Ti su identiteti ključni za ilustraciju veze između svojstava indirektne funkcije korisnosti i funkcije izdataka.

Funkcija izdataka zadovoljava sljedeća svojstva:

1. $e(\mathbf{p}, u)$ je neprekidna funkcija na svojoj domeni $\mathrm{R}^n_{++} \times \mathrm{U}$, gdje je U skup mogućih indeksa korisnosti.
2. $e(\mathbf{p}, u)$ je strogo rastuća i neograničena odozgo u indeksu korisnosti.
3. $e(\mathbf{p}, u)$ je rastuća u cijenama.
4. $e(\mathbf{p}, u)$ je linearno homogena u cijenama.
5. $e(\mathbf{p}, u)$ je konkavna u cijenama.
6. $e(\mathbf{p}, u)$ je diferencijabilna u cijenama i vrijedi Shepardova lema.

U nastavku će se izvesti svojstva indirektne funkcije korisnosti iz svojstava funkcije izdataka.

Indirektna funkcija korisnosti ima sljedeća svojstva:

1. $v(\mathbf{p}, M)$ je neprekidna funkcija na svojoj domeni.

Rješenje je jednakosti (12) kojom se polazeći od funkcije izdataka dolazi do indirektne funkcije korisnosti neprekidna funkcija i potvrđuje se prethodni zahtjev.

2. $v(\mathbf{p}, M)$ je strogo rastuća u dohotku, M.

Promatraju li se dvije različite razine dohotka za koje vrijedi da je dohodak M^1 veći od dohotka M^0, $M^0 < M^1$, a cijene dobara fiksiraju na $\mathbf{p}$, većem dohotku mora odgovarati i veća maksimalna korisnost, $v(\mathbf{p}, M^0) < v(\mathbf{p}, M^1)$. Time se opisuje da je indirektna funkcija korisnosti strogo rastuća funkcija dohotka. Da bi se to dokazalo, pretpostavlja se suprotno. Drugim riječima, pretpostavlja se da maksimalna korisnost koja odgovara većem dohotku nije veća od maksimalne korisnosti koja odgovara manjem dohotku, $v(\mathbf{p}, M^0) \geq v(\mathbf{p}, M^1)$. Ako se maksimalni indeks korisnosti pri cijenama $\mathbf{p}$ i dohotku M^0 označi s u^0, a maksimalni indeks korisnosti pri cijenama $\mathbf{p}$ i dohotku M^1 označi s u^1, vidi se da je $u^0 \geq u^1$. Zbog monotonosti funkcije izdataka u razini korisnosti, većoj razini korisnosti odgovaraju i veći minimalni izdaci, $e(\mathbf{p}, u^0) \geq e(\mathbf{p}, u^1)$, odnosno

$$e\left[\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, M^0)\right] \geq e\left[\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, M^1)\right]. \qquad (13)$$

Veza između minimalnih izdataka i maksimalne korisnosti, $e(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, M)) = M$, dovodi do sljedeće nejednakosti $M^0 \geq M^1$ što je u proturječju s pretpostavkom od koje se polazi, $M^0 \geq M^1$. Prema tome, indirektna je funkcija korisnosti strogo rastuća u dohotku.

3. $v(\mathbf{p}, M)$ je opadajuća u cijenama $\mathbf{p}$.

Poveća li se cijena barem jednog dobra, a cijene se ostalih dobara ne smanje, $\mathbf{p}^0 \leq \mathbf{p}^1$, ne dolazi do povećanja maksimalne korisnosti, $v(\mathbf{p}^0, M) \geq v(\mathbf{p}^1, M)$, odnosno $u^0 \geq u^1$. Drugim riječima, indirektna je funkcija korisnosti opadajuća u cijenama. Znak blage nejednakosti dopušta mogućnost nepromijenjenog blagostanja zbog porasta cijene dobra kojeg potrošač ne kupuje. U dokazu se ponovno pretpostavlja suprotno, odnosno da se povećanjem cijene barem jednog dobra povećala i maksimalna korisnost, $v(\mathbf{p}^0, M) < v(\mathbf{p}^1, M)$, odnosno $u^0 < u^1$. Zbog monotonosti funkcije izdataka u razini korisnosti, većoj razini korisnosti odgovaraju i veći minimalni izdaci,

$$e\left[\mathbf{p}^0, v(\mathbf{p}^0, M)\right] < e\left[\mathbf{p}^0, v(\mathbf{p}^1, M)\right]. \qquad (14)$$

Funkcija je izdataka rastuća u cijenama i vrijedi

$$e\left[\mathbf{p}^0, v(\mathbf{p}^1, M)\right] \leq e\left[\mathbf{p}^1, v(\mathbf{p}^1, M)\right]. \qquad (15)$$

Uzmu li se u obzir obje nejednakosti i veza između funkcije minimalnih izdataka i maksimalne korisnosti, dolazi se do proturječja $M < M$ i zaključuje da je indirektna funkcija korisnosti opadajuća u cijenama.

4. $v(\mathbf{p}, M)$ je linearno homogena u $(\mathbf{p}, M)$.

Pretpostavi li se da su se cijene i dohodak proporcionalno promijenili, promatraju se sljedeći vektori cijena i dohotka, $(\mathbf{p}^{\mathbf{0}}, M^0)$ i $(t\mathbf{p}^{\mathbf{0}}, tM^0)$. Namjera je pokazati da proporcionalna promjena cijena i dohotka ne utječe na maksimalnu korisnost, $v(t\mathbf{p}^{\mathbf{0}}, tM^0) = v(\mathbf{p}^{\mathbf{0}}, M^0)$. Veza između funkcije izdataka i funkcije maksimalnih korisnosti implicira

$$e\left[\mathbf{p}^0, v(\mathbf{p}^0, M^0)\right] = M^0. \tag{16}$$

Ako se maksimalni indeks korisnosti pri cijenama $\mathbf{p}^{\mathbf{0}}$ i dohotku M^0 označi s u^0, prethodna se veza možemo napisati i na sljedeći način $e(\mathbf{p}^{\mathbf{0}}, u^0) = M^0$. Funkcija je izdataka linearno homogena u cijenama,

$$e(t\mathbf{p}^{\mathbf{0}}, u^0) = te(\mathbf{p}^{\mathbf{0}}, u^0) = tM^0. \tag{17}$$

Zbog veze modela slijedi i sljedeća jednakost:

$$e\left[t\mathbf{p}^0, v(t\mathbf{p}^0, tM^0)\right] = tM^0. \tag{18}$$

Jednakost desnih strana prethodnih dviju jednakosti implicira i jednakost lijevih strana,

$$e(t\mathbf{p}^{\mathbf{0}}, u^0) = e\left[t\mathbf{p}^0, v(t\mathbf{p}^0, tM^0)\right]. \tag{19}$$

Kako je funkcija izdataka strogo rastuća u razini korisnosti, indeksi korisnosti u^0 i $v(t\mathbf{p}^0, \mathrm{t}M^0)$ moraju biti jednaki, $u^0 = (t\mathbf{p}^0, \mathrm{t}M^0)$, odnosno

$$v(\mathbf{p}^0, M^0) = v(t\mathbf{p}^0, tM^0). \tag{20}$$

Prema tome, indirektna je funkcija korisnosti homogena stupnju nula u cijenama i dohotku.

5. $v(\mathbf{p}, M)$ je kvazikonveksna u $(\mathbf{p}, M)$.

Označi li se maksimalni indeks korisnosti pri cijenama $\mathbf{p}^0$ i dohotku M^0 s u^0, maksimalni indeks korisnosti pri cijenama $\mathbf{p}^1$ i dohotku M^1 s u^1 i maksimalni indeks korisnosti pri cijenama $\mathbf{p}^t$, koje su konveksna kombinacija vektora cijena $\mathbf{p}^0$ i $\mathbf{p}^1$, i dohotku M^t, koji je konveksna kombinacija dohotka M^0 i M^1, s u^t,

$$v(\mathbf{p}^{\mathbf{0}}, M^0) = u^0 \tag{21}$$

$$v(\mathbf{p}^1, M^1) = u^1, \tag{22}$$

$$v(\mathbf{p}^t, M^t) = u^t, \tag{23}$$

da bi se dokazalo da je indirektna funkcija korisnosti kvazikonveksna u cijenama i dohotku, mora se pokazati da maksimalni indeks korisnosti na uravnoteženom budžetskom prostoru nije veći od maksimalnog indeksa korisnosti koji se postiže na jednom od budžetskih prostora od kojih se polazi,

$$v(\mathbf{p}^t, M^t) \le maks\left\{v(\mathbf{p}^0, M^0), v(\mathbf{p}^1, M^1)\right\}. \tag{24}$$

Pretpostavlja se bez smanjenja općenitosti da vrijedi $u^0 \le u^1$. Tada treba dokazati da je $u^t \le u^1$.

U dokazu se polazi od toga da je funkcija izdataka konkavna u cijenama i strogo rastuća u razini korisnosti. Zbog konkavnosti funkcije izdataka za razinu korisnosti u^1 vrijedi

$$e(\mathbf{p}^t, u^1) \ge (1-t)e(\mathbf{p}^0, u^1) + te(\mathbf{p}^1, u^1). \tag{25}$$

Funkcija je izdataka rastuća u razini korisnosti pa se prethodna nejednakost može nadopuniti na sljedeći način:

$$e(\mathbf{p}^t, u^1) \ge (1-t)e(\mathbf{p}^0, u^1) + te(\mathbf{p}^1, u^1) \ge (1-t)e(\mathbf{p}^0, u^0) + te(\mathbf{p}^1, u^1). \tag{26}$$

Desna se strana nejednakosti preko veze modela može zamijeniti s M^t,

$$(1-t)e\left[\mathbf{p}^0, v(\mathbf{p}^0, M^0)\right] + te\left[\mathbf{p}^1, v(\mathbf{p}^1, M^1)\right] = (1-t)M^0 + tM^1 = M^t. \tag{27}$$

Slijedi

$$e(\mathbf{p}^t, u^1) \ge M^t = e(\mathbf{p}^t, u^t). \tag{28}$$

Uzme li se u obzir dokazani rast indirektne funkcije korisnosti u dohotku i veza između indirektne funkcije korisnosti i funkcije izdataka, prethodna nejednakost konačno vodi do kvazikonveksnosti indirektne funkcije korisnosti u cijenama i dohotku,

$$v\left[\mathbf{p}^t, e(\mathbf{p}^t, u^1)\right] \ge v\left[\mathbf{p}^t, e(\mathbf{p}^t, u^t)\right], \tag{29}$$

odnosno

$$u^1 \ge u^t. \tag{30}$$

6. Vrijedi Royev identitet, $x_i^M = -\dfrac{\partial v / \partial p_i}{\partial v / \partial M}$.

U dokazu Royeva identiteta polazi se od veze između indirektne funkcije korisnosti i funkcije izdataka,

$$v\left[\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)\right] = u \cdot \tag{31}$$

Deriviranjem identiteta s obzirom na cijenu dobra X_i, p_i, dobiva se sljedeći izraz:

$$\frac{\partial v\left[\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)\right]}{\partial p_i} + \frac{\partial v\left[\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)\right]}{\partial M} \cdot \frac{\partial e(\mathbf{p}, u)}{\partial p_i} = 0. \tag{32}$$

Shepardova lema i veza između Marshallovih i Hicksovih funkcija potražnje dovodi do Royeva identiteta:

$$x_i^M = -\frac{\partial v / \partial p_i}{\partial v / \partial M}. \tag{33}$$

U nastavku se izvode svojstva funkcije izdataka polazeći od svojstava indirektne funkcije korisnosti. Funkcija izdataka ima sljedeća svojstva:

1. $e(\mathbf{p}, u)$ je neprekidna funkcija na svojoj domeni $\mathrm{R}^n_{++} \times \mathrm{U}$, gdje je U skup mogućih indeksa korisnosti.

Funkcija se izdataka dobije rješavanjem jednadžbe (11) koja povezuje funkciju izdataka i indirektnu funkciju korisnosti. Rješenje te jednadžbe je neprekidna funkcija.

2. $e(\mathbf{p}, u)$ je strogo rastuća i neograničena odozgo u indeksu korisnosti.

Pretpostavlja se da je indeks korisnosti u^1 veći od indeksa korisnosti u^0, $u^0 < u^1$. Ako je funkcija izdataka strogo rastuća u indeksu korisnosti, većem indeksu korisnosti moraju odgovarati i veći izdaci koji su potrebni da se taj indeks korisnosti ostvari, $e(\mathbf{p}, u^0) < e(\mathbf{p}, u^1)$. Cijene su dobara $\mathbf{p}$. U dokazu se pretpostavlja suprotno, odnosno pretpostavlja se da minimalni izdaci koji odgovaraju većem indeksu korisnosti nisu veći od minimalnih izdataka koji odgovaraju manjem indeksu korisnosti, $e(\mathbf{p}, u^0) \geq e(\mathbf{p}, u^1)$. Ako se minimalni izdaci koji su potrebni da se pri cijenama $\mathbf{p}$ ostvari indeks korisnosti u^0 označe s M^0, a minimalni izdaci koji su potrebni da se pri cijenama $\mathbf{p}$ ostvari indeks korisnosti u^1 označe s M^1, prethodna pretpostavka dovodi do nejednakosti $M^0 \geq M^1$. Zbog monotonosti indirektne funkcije korisnosti u dohotku, većem dohotku odgovara i veći maksimalni indeks korisnosti,

$$v(\mathbf{p}, M^0) \geq v(\mathbf{p}, M^1),$$

odnosno

$$v\left[\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u^0)\right] \geq v\left[\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u^1)\right]. \tag{34}$$

Veza između minimalnih izdataka i maksimalne korisnosti, $v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)) = u$, dovodi do sljedeće nejednakosti $u^0 \geq u^1$, što je u proturječju s pretpostavkom od koje se pošlo, $u^0 < u^1$.

Da bi se pokazalo da je funkcija izdataka neograničena odozgo u indeksu korisnosti, potrebno je definirati domenu funkcije izdataka za fiksne cijene, odnosno sliku indirektne funkcije korisnosti, U. Kada dohodak poprima vrijedost nula, za fiksne je cijene indeks korisnosti $v(\mathbf{p}, 0)$. Kako za izabrane cijene nema manjeg indeksa korisnosti, indeks je korisnosti $v(\mathbf{p}, 0)$ donja granica intervala koji predstavlja domenu funkcije izdataka.

Najmanja gornja ograda indeksa korisnosti obilježena je s a. U tom je slučaju domena funkcije izdataka $U = \left[v(\mathbf{p},0),a\right)$. Pretpostavlja se da postoji neki broj M takav da vrijedi $e(\mathbf{p},u) < M$ za svako u iz skupa $\left[v(\mathbf{p},0),a\right)$. Djeluje li se na prethodnu nejednakost indirektnom funkcijom korisnosti, zbog strogog rasta u dohotku slijedi $v\left[\mathbf{p},e(\mathbf{p},u)\right] < v(\mathbf{p},M)$. Veza između modela dovodi do nejednakosti $u < v(\mathbf{p},M)$ za svako $u \in U$. Na taj se način pronalazi dohodak M iz domene indirektne funkcije korisnosti koji se ne preslikava u skup U što je u proturječju s definicijom skupa U koji obuhvaća sve vrijednosti indirektne funkcije korisnosti. Zaključuje se da je funkcija izdataka neograničena odozgo u indeksu korisnosti.

3. $e(\mathbf{p}, u)$ je rastuća u cijenama.

Ako se cijena barem jednog dobra poveća, a cijene ostalih dobara ne smanje, $\mathbf{p}^0 \leq \mathbf{p}^1$, mora se dokazati da je $e(\mathbf{p}^0, u) \leq e(\mathbf{p}^1, u)$, odnosno $M^0 \leq M^1$. Znak blage nejednakosti dopušta mogućnost nepromijenjenih izdataka zbog porasta cijene dobra kojeg potrošač ne kupuje. U dokazu se ponovno pretpostavlja suprotno. Pretpostavlja se da se porastom cijene barem jednog dobra izdaci smanjuju, $e(\mathbf{p}^0,u) > e(\mathbf{p}^1,u)$, odnosno $M^0 > M^1$. Zbog monotonosti indirektne funkcije korisnosti u dohotku, većoj razini dohotka odgovara i veća maksimalna razina korisnosti,

$$v\left[\mathbf{p}^0,e(\mathbf{p}^0,u)\right] > v\left[\mathbf{p}^0,e(\mathbf{p}^1,u)\right]. \tag{35}$$

Indirektna je funkcija korisnosti opadajuća u cijenama i vrijedi

$$v\left[\mathbf{p}^0,e(\mathbf{p}^1,u)\right] \geq v\left[\mathbf{p}^1,e(\mathbf{p}^1,u)\right]. \tag{36}$$

Uzmu li se u obzir obje nejednakosti i veza između funkcije minimalnih izdataka i maksimalne korisnosti, dolazi se do proturječja $u > u$.

4. $e(\mathbf{p}, u)$ je linearno homogena u cijenama.

Zbog veze modela za proizvoljno izabrane cijene $\mathbf{p}$ i razinu korisnosti u vrijedi

$$v\left[\mathbf{p},e(\mathbf{p},u)\right] = u \text{ i } v\left[t\mathbf{p},e(t\mathbf{p},u)\right] = u, \tag{37}$$

pri čemu je $t > 0$ faktor proporcionalne promjene cijena. Zbog toga što je indirektna funkcija korisnosti homogena stupnju homogenosti nula u cijenama i dohotku, vrijedi

$$v\left[t\mathbf{p},te(\mathbf{p},u)\right] = v\left[\mathbf{p},e(\mathbf{p},u)\right], \tag{38}$$

$$v\left[t\mathbf{p},e(t\mathbf{p},u)\right] = u, \tag{39}$$

pri čemu posljednja jednakost opisuje vezu modela za polazne cijene. Upotrijebi li se veza modela koja opisuje jednakost za proporcionalne cijene, slijedi

$$v\left[t\mathbf{p}, e(t\mathbf{p},u)\right] = v\left[t\mathbf{p}, te(\mathbf{p},u)\right]. \tag{40}$$

Kada bi se $e(t\mathbf{p},u)$ i $te(\mathbf{p},u)$ razlikovali, zbog stroge monotonosti indirektne funkcije korisnosti u dohotku razlikovali bi se i pridruženi indeksi korisnosti. Stoga je $e(t\mathbf{p},u) = te(\mathbf{p},u)$ i potvrđuje se linearna homogenost funkcije izdataka.

5. $e(\mathbf{p}, u)$ je konkavna u cijenama.

Za proizvoljno izabrane cijene $\mathbf{p}^0$ i $\mathbf{p}^1$ i proizvoljno izabranu razinu korisnosti u minimiziraju se izdaci, $e(\mathbf{p}^0,u) = M^0$ i $e(\mathbf{p}^1,u) = M^1$. Zbog veze modela i stroge monotonosti funkcije izdataka u razini korisnosti slijedi $v(\mathbf{p}^0,M^0) = u$ i $v(\mathbf{p}^1,M^1) = u$. Uprosječe li se minimalni izdaci, $M^t = tM^0 + (1-t)M^1 = te(\mathbf{p}^0,u) + (1-t)\,e(\mathbf{p}^1,u)$, i pri uprosječenim cijenama maksimizira korisnost, zbog kvazikonveksnosti se indirektne funkcije korisnosti i prethodnih jednakosti dobiva

$$v(\mathbf{p}^t,M^t) \le maks\left\{v(\mathbf{p}^0,M^0), v(\mathbf{p}^1,M^1) = u\right\}. \tag{41}$$

Istodobno veza modela za uprosječene cijene otkriva $v(\mathbf{p}^t,e(\mathbf{p}^t,u)) = u$. Slijedi $v(\mathbf{p}^t,M^t) \le v(\mathbf{p}^t,e(\mathbf{p}^t,u))$. Zbog stroge monotonosti indirektne funkcije korisnosti u dohotku dobiva se $M^t \le e(\mathbf{p}^t,u), te(\mathbf{p}^0,u) + (1-t)e(\mathbf{p}^1,u) \le e(\mathbf{p}^t,u)$. Prethodna nejednakost opisuje konkavnost funkcije izdataka koja je dokazana.

6. Vrijedi Shepardova lema, $x_i^H(\mathbf{p},u) = \dfrac{\partial e(\mathbf{p},u)}{\partial p_i}$.

U dokazu se Shepardove leme polazi od veze između indirektne funkcije korisnosti i funkcije izdataka, $e\left[\mathbf{p}, v(\mathbf{p},M)\right] = M$. Deriviranjem identiteta s obzirom na cijenu dobra X_i, p_i, dobiva se sljedeći izraz:

$$\frac{\partial e\left[\mathbf{p}, v(\mathbf{p},M)\right]}{\partial p_i} + \frac{\partial e(\mathbf{p},u)}{\partial u}\frac{\partial v(\mathbf{p},M)}{\partial p_i} = 0. \tag{42}$$

Prepoznaje se izraz koji predočava promjenu izdataka na malu jedinicu promjene korisnosti, odnosno funkciju graničnog troška korisnosti, $\dfrac{\partial e(\mathbf{p},u)}{\partial u}$. Jedna je od poruka veze između modela maksimizacije korisnosti uz zadano budžetsko ograničenje i modela minimizacije izdataka za zadanu razinu korisnosti recipročan odnos funkcije graničnog troška korisnosti i funkcije granične korisnosti dohotka,

$$\frac{\partial e(\mathbf{p},u)}{\partial u} = \frac{1}{\dfrac{\partial v(\mathbf{p},M)}{\partial M}}. \tag{43}$$

Isti se rezultat može dobiti i da se identitet $e\left[\mathbf{p}, v(\mathbf{p},M)\right] = M$ diferencira s obzirom na dohodak, M. U tom se slučaju dobiva sljedeći izraz:

$$\frac{\partial e(\mathbf{p},u)}{\partial u}\frac{\partial v(\mathbf{p},M)}{\partial M}=1, \tag{44}$$

koji ponovno dovodi do istog rezultata.

Prema tome, promjena je izdataka na malu jedinicu promjene cijene nekog dobra jednaka

$$\frac{\partial e(\mathbf{p},u)}{\partial p_i}=-\frac{\dfrac{\partial v(\mathbf{p},M)}{\partial p_i}}{\dfrac{\partial v(\mathbf{p},M)}{\partial M}}. \tag{45}$$

Prema Royevom identitetu i vezi između modela to je upravo jednako Hicksovoj potražnji za nekim dobrom,

$$\frac{\partial e(\mathbf{p},u)}{\partial p_i}=x_i^H(\mathbf{p},u). \tag{46}$$

Shepardovu lemu su navodili i dokazivali mnogi autori, poput Hotellinga koji je 1932. godine dao verziju u kontekstu funkcije profita te naveo uvjete koji moraju biti zadovoljeni za postojanje takve funkcije /22/, Hicksa /19/ koji je dokazao Shepardovu lemu u kontekstu teorije ponašanja potrošača, Samuelsona, Sheparda koji je izveo prvi potpuni dokaz 1953. godine/39/, McKenziea /31/, McFaddena /28, 29, 30/, Fenchela /17/, Rockafellara /32/.

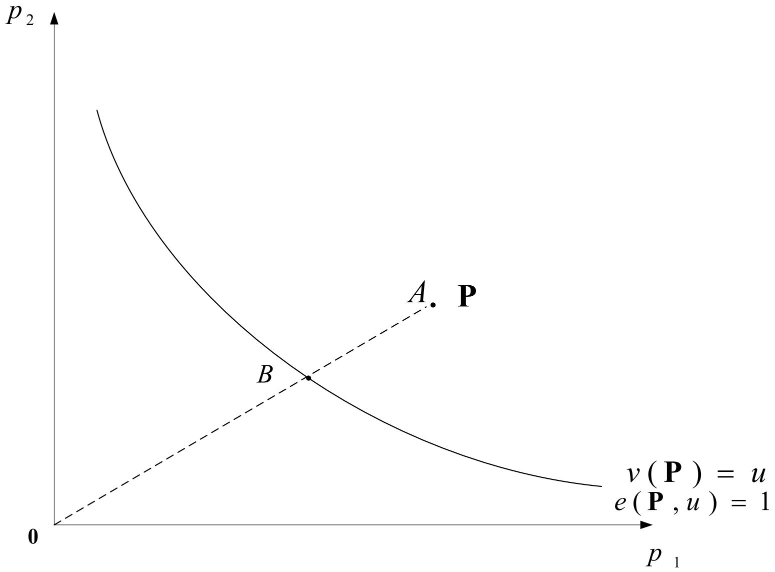
5. FUNKCIJA IZDATAKA KAO FUNKCIJA UDALJENOSTI ZA INDIREKTNU FUNKCIJU KORISNOSTI

Funkcija izdataka može se iskoristiti za dualni opis indirektne krivulje indiferencije u prostoru cijena dobara. Indirektna krivulja indiferencije sadrži sve kombinacije normaliziranih cijena za koje je maksimalna korisnost potrošača jednaka. Veza između indirektne funkcije korisnosti i funkcije izdataka otkriva da su istodobno minimalni izdaci jedinični.

Za bilo koju kombinaciju cijena **P** u prostoru normaliziranih cijena dobara minimalni se izdaci za razinu korisnosti koju opisuje indirektna krivulja indiferencije određuju tako da se povuče zraka iz ishodišta do kombinacije cijena **P** koja je obilježena točkom A. U točki sjecišta zrake iz ishodišta i indirektne krivulje indiferencije nalazi se kombinacija cijena B pri kojoj su minimalni izdaci jedinični. Kako je funkcija izdataka linearno homogena u cijenama, izdaci se pri kombinaciji cijena A, ali i pri bilo kojim cijenama mogu izjednačiti s faktorom proporcionalne promjene cijena,

$$e(\mathbf{P},u)=\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}.$$

Proporcionalnom se promjenom cijena koje su izvan indirektne krivulje indiferencije vraćamo natrag na krivulju indiferencije ako je faktor proporcionalnosti recipročan minimalnim izdacima pri tim cijenama. Takva promjena cijena normalizira cijene dobara.



Slika 3. Indirektna krivulja indiferencije i funkcija izdataka

Put se od indirektne funkcije korisnosti prema funkciji izdataka još jednom može opisati sljedećom jednakošću:

$$v(\mathbf{P}, e(\mathbf{P}, u)) = v(\frac{\mathbf{P}}{e(\mathbf{P}, u)}) = u.$$

Funkcija izdataka stoga mjeri udaljenost bilo kojeg vektora cijena od indirektne krivulje indiferencije u dualnom prostoru, pa je ona funkcija udaljenosti za indirektnu funkciju korisnosti. Drugim riječima, funkciju izdataka definira proizvoljno izabrana razina korisnosti u i proizvoljno izabrana kombinacija normaliziranih cijena **P**. Njezina je vrijednost broj kojim moramo podijeliti normaliziranu cijenu svakog dobra u proizvoljno izabranoj kombinaciji normaliziranih cijena **P** da bismo dobili kombinaciju normaliziranih cijena $\mathbf{P}^*$ koja pripada proizvoljno zadanoj indirektnoj krivulji indiferencije u,

$$e(\mathbf{P}, u) = \min_{\lambda} \left\{ \lambda > 0; v(\mathbf{P} / \lambda) \leq u, \mathbf{P} \in \Re^n_+ \right\}.$$

Krenemo li od funkcije izdataka, do indirektne funkcije korisnosti vodi nas sljedeći problem optimizacije:

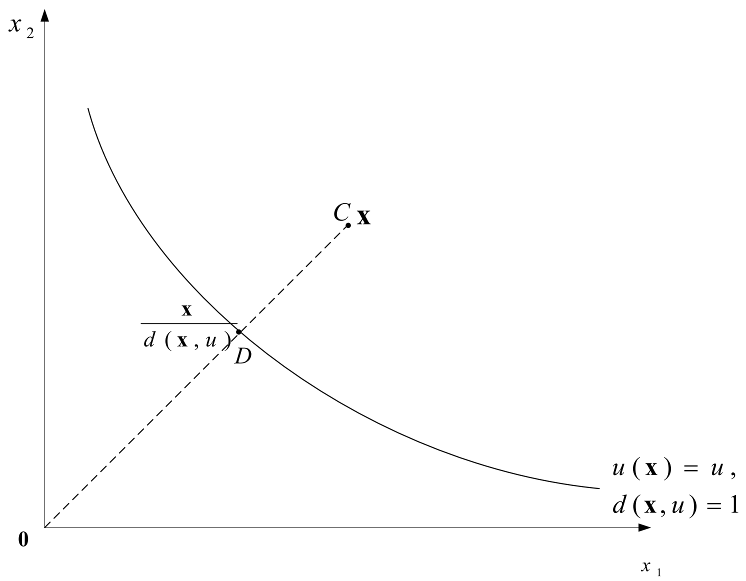
$$v(\mathbf{P}) \equiv \min_{u} \left\{ u : e(\mathbf{P}, u) \geq 1 \right\}$$

Zamijeni li se dualni prostor primarnim prostorom, na isti se način može definirati funkcija udaljenosti za direktnu funkciju korisnosti.

6. FUNKCIJA UDALJENOSTI ZA DIREKTNU FUNKCIJU KORISNOSTI

U prostoru količina dobara uvodi se funkcija koja mjeri udaljenost bilo koje košare dobara od zadane krivulje indiferencije,

$$d(\mathbf{x},u)=\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OD}}.$$



Slika 4. Direktna krivulja indiferencije i funkcija udaljenosti

To je funkcija udaljenosti za direktnu funkciju korisnosti. Proporcionalna promjena količina koje su izvan direktne krivulje indiferencije vraća natrag na krivulju indiferencije ako je faktor proporcionalnosti recipročan udaljenosti. Takva promjena količina normalizira količine dobara. Stoga se funkcija udaljenosti može izvesti iz direktne funkcije korisnosti oslanjajući se na normalizirane količine,

$$u\left(\frac{\mathbf{x}}{d(\mathbf{x},u)}\right)=u.$$

Drugim riječima, funkciju udaljenosti definira proizvoljno izabrana razina korisnosti u i proizvoljno izabrana košara dobara $\mathbf{x}$ i govori nam s kojim brojem moramo podijeliti količinu svakog dobra u proizvoljno izabranoj košari dobara $\mathbf{x}$ da bismo dobili košaru dobara koja pripada proizvoljno zadanoj direktnoj krivulji indiferencije u,

$$d(\mathbf{x},u)\equiv\max_{\delta}\left\{\delta>0:u(\mathbf{x}/\delta)\geq u,\mathbf{x}\in\Re^n_+\right\}$$

Od funkcije udaljenosti do direktne funkcije korisnosti vodi nas sljedeći model optimizacije:

$$u(\mathbf{x}) \equiv \max_{u} \{u : d(\mathbf{x},u) \geq 1\}$$

Uočavamo sličnost između problema optimizacije koji povezuje indirektnu funkciju korisnosti i funkciju izdataka i problema optimizacije koji povezuje direktnu funkciju korisnosti i funkciju udaljenosti. Postoje dualne veze između funkcije izdataka i funkcije udaljenosti koje daju osebujne ekonomske interpretacije.

Funkciju udaljenosti u ekonomsku teoriju uveo je utemeljitelj modernog pristupa dualnosti u mikroekonomskoj teoriji Ronald W. Shepard u kontekstu teorije proizvodnje. Shepard u svojem dokazu dualnosti između funkcije proizvodnje i funkcije troškova 1953. godine nije uspostavio izravnu vezu između te dvije funkcije već je uveo funkciju udaljenosti koja je dualna funkciji troškova /39/. Teoreme dualnosti između funkcije korisnosti i funkcije udaljenosti su dokazivali Shepard /39, 40/, Hanoch /18/, McFadden /29, 30/ i Blackorby, Primont i Russell /3/. Da je funkcija izdataka funkcija udaljenosti za indirektnu funkciju korisnosti prepoznali su Malmquist /27/ i Shepard /39/.

7. DUALNOST IZMEĐU FUNKCIJE UDALJENOSTI I FUNKCIJE IZDATAKA

Promatraju li se izdaci na proizvoljno izabranu normaliziranu košaru $\frac{\mathbf{x}}{d(\mathbf{x},u)}$, $\mathbf{p}\frac{\mathbf{x}}{d(\mathbf{x},u)}$ i minimalni izdaci pri tim cijenama i razini korisnosti u, $e(\mathbf{p},u)$, minimalni izdaci sigurno nisu veći od izdataka na košaru $\frac{\mathbf{x}}{d(\mathbf{x},u)}$ pa vrijedi sljedeća nejednakost:

$$\mathbf{p}\frac{\mathbf{x}}{d(\mathbf{x},u)} \geq e(\mathbf{p},u). \tag{91}$$

Zamijene li mjesta funkciji udaljenosti i funkciji izdataka, dobiva se ponovno veza između funkcije izdataka i funkcije udaljenosti,

$$\mathbf{p}\frac{\mathbf{x}}{e(\mathbf{p},u)} \geq d(\mathbf{x},u). \tag{92}$$

Nejednakost vrijedi za sve cijene, no pri jednim se od njih ostvaruje jednakost. Kako proporcionalna promjena cijena ne mijenja najjeftiniju košaru, taj problem ima beskonačno mnogo rješenja. Jedinstvene se cijene dobivaju pridoda li se problemu uvjet da su izdaci jedinični. Funkcija se udaljenosti stoga izvodi iz modela minimizacije izdataka uz uvjet normalizacije,

$$d(\mathbf{x},u) \equiv \min_{\mathbf{p}} \mathbf{p}\mathbf{x} \tag{93}$$

uz ograničenje $e(\mathbf{p},u) = 1$.

Rješenja ovako definiranog problema su inverzne kompenzirane funkcije potražnje koje izražavaju normalizirane cijene pri kojima su normalizirane količine najjeftinije na zadanoj krivulji indiferencije.

Funkcija je izdataka rezultat problema minimizacije izdataka za zadane cijene dobara i za zadanu razinu korisnosti. Kada bi u definiciji funkcije udaljenosti proizvoljno izabrana košara dobara **x** na zraci iz ishodišta davala točno proizvoljno zadanu razinu korisnosti u, tada bi udaljenost poprimila jediničnu vrijednost, $d(\mathbf{x},u)=1$. To znači da i ograničenje u definiciji funkcije izdataka $u(\mathrm{x})=u$ možemo zapisati u obliku $d(\mathbf{x},u)=1$. S tim u skladu, definicija funkcije izdataka sada poprima oblik

$$e(\mathbf{p},u)\equiv \min_{\mathbf{x}}\ \mathbf{px} \qquad (94)$$
$$\text{uz ograničenje } d(\mathbf{x},u)=1.$$

Da bi se jasnije uočila dualnost između funkcije izdataka i funkcije udaljenosti, u nastavku slijedi usporedni prikaz modela iz kojih se te funkcije izvode i njihovo rješavanje. Na tom se putu izvode i funkcije potražnje koje igraju značajnu ulogu u izvođenju jednadžbe Slutskog i njezina duala.

$$e(\mathbf{p},u)\equiv \min_{\mathbf{x}}\ \mathbf{px} \qquad\qquad d(\mathbf{x},u)\equiv \min_{\mathbf{p}}\ \mathbf{px}$$
$$\text{uz ograničenje } d(\mathbf{x},u)=1. \qquad\qquad \text{uz ograničenje } e(\mathbf{p},u)=1.$$

U oba se slučaja problemi minimizacije uz ograničenja rješavaju metodom Lagrangeovih množitelja kojom se problemi optimizacije uz ograničenja svode na probleme optimizacije bez ograničenja. Lagrangeova je funkcija:

$$L=\mathbf{px}+\mu\left[1-e(\mathbf{p},u)\right] \qquad\qquad L=\mathbf{px}+\lambda\left[1-d(\mathbf{x},u)\right]$$

$$\mathbf{x}=\mu\nabla e \qquad\qquad \mathbf{p}=\lambda\nabla d$$

Uvjet normalizacije — Uvjet normalizacije

$$\mathbf{px}=\mu\mathbf{x}\nabla e=\mu e=\mu=1 \qquad\qquad \mathbf{px}=\lambda\mathbf{x}\nabla d=\lambda d=\lambda=1$$

Iz nužnih se uvjeta prvoga reda dobivaju dva ključna rezultata u izvođenju kompenziranih funkcija potražnje

$\mathbf{x}=\nabla e$ Shepardova lema — $\mathbf{p}=\nabla d$ Shepard-Hanochova lema

Primjenom Shepardove leme se jednostavnije izvode Hicksove ili kompenzirane funkcije potražnje polazeći od funkcije izdataka. Primjenom Shepard-Hanochove leme se jednostavnije izvode inverzne kompenzirane funkcije potražnje polazeći od funkcije udaljenosti.

8. FUNKCIJA UDALJENOSTI KAO FUNKCIJA IZDATAKA ZA INDIREKTNU FUNKCIJU KORISNOSTI

U izvođenju funkcije korisnosti iz funkcije izdataka ključno mjesto zauzima opis konveksnog skupa barem toliko dobrih košara. Primjena dualnosti omogućava izvođenje indirektne funkcije korisnosti iz funkcije udaljenosti pri čemu središnje mjesto zauzima konveksni inferiorni skup indirektne funkcije korisnosti. U tom je kontekstu primjena dualnosti izravna i omogućava da se primarne varijable zamijene dualnima koje su neovisno opazive na tržištu. Te se tvrdnje u nastavku i ilustriraju.

Prisjetimo se modela optimizacije kojim se iz funkcije izdataka izvodi funkcija udaljenosti (). Ograničenje u tom modelu optimizacije opisuje indirektnu krivulju indiferencije koja sadrži sve kombinacije normaliziranih cijena za koje je maksimalna korisnost potrošača jednaka. Jednadžba te krivulje je $v(\mathbf{P}) = u$. Put kojim se iz indirektne funkcije korisnosti dobiva funkcija izdataka stoga opisuje sljedeći model optimizacije:

$$d(\mathbf{x}, u) \equiv \min_{\mathbf{p}} \ \mathbf{px}$$
$$\text{uz ograničenje } e(\mathbf{p}, u) = 1.$$

Jednadžba je indirektne krivulje indiferencije koja prolazi kroz izabranu proizvoljnu kombinaciju normaliziranih cijena dobara $\mathbf{P^0}$ $v(\mathbf{P}) = v(\mathbf{P^0})$. Povuče li se tangenta u točki $\mathbf{P^0}$ na indirektnu krivulju indiferencije i pretpostavi li se da je nagib tangente na indirektnu krivulju indiferencije u točki $\mathbf{P^0}$ jednak odnosu količina dobara, $\frac{x_1^0}{x_2^0}$, taj odnos zadovoljavaju i sve proporcionalne promjene količina x_1^0 i x_2^0. Izdaci su na košaru dobara $\mathbf{x^0}$ pri ostalim kombinacijama normaliziranih cijena dobara na toj indirektnoj krivulji indiferencije veći, pa se može zaključiti da je košara dobara $\mathbf{x^0}$ najjeftinija košara pri cijenama $\mathbf{P^0}$, odnosno da vrijedi sljedeća jednakost $d(\mathbf{x^0}, v(\mathbf{P^0})) = \mathbf{P^0 x^0}$. Druge su košare dobara na zadanoj indirektnoj krivulji indiferencije skuplje pri kombinaciji normaliziranih cijena $\mathbf{P^0}$ i vrijedi sljedeća nejednakost $d(\mathbf{x}, v(\mathbf{P^0})) \leq \mathbf{P^0 x} \ \forall \mathbf{x}$. Uzimajući u obzir da se pri košari dobara $\mathbf{x^0}$ gornja nejednakost pretvara u jednakost i da je funkcija udaljenosti strogo opadajuća funkcija u razini korisnosti, zaključuje se da ne postoji indeks korisnosti koji je manji od indeksa korisnosti košare $v(\mathbf{P^0})$ za koji bi vrijedila gornja nejednakost. Drugim riječima, indirektna se funkcija korisnosti izvodi iz funkcije udaljenosti rješavanjem sljedećeg modela optimizacije:

$$v(\mathbf{P^0}) = \min_{u} \left\{ u : d(\mathbf{x}, u) \leq \mathbf{P^0 x} \ \forall \mathbf{x} \right\}.$$

9. KOMPENZACIJSKA VARIJACIJA I NJEZIN DUAL

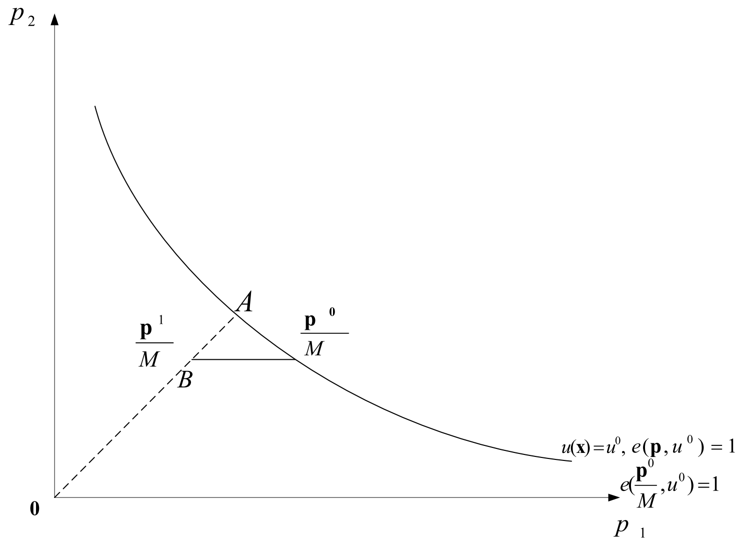
Pojam potrošačeva probitka zauzima značajno mjesto u ekonomskoj teoriji. U ekonomiju ga je uveo francuski inženjer J. Dupuit 1844. godine prepoznavši da potrošač ostvaruje određeni probitak od transakcije koji se može mjeriti površinom ispod krivulje potražnja, a iznad linije cijene. A. Marshall je o potrošačevu probitku promišljao kao o višku korisnosti premda je, poput Dupuita, bio svjestan potrebe da se promjena blagostanja izrazi novčano. Sam je pojam nedvojbeno u potpunosti rasvijetlio John Hicks navodeći kompenzacijsku i ekvivalentnu varijaciju. Numeričke je odnose između tih dviju veličina, novčanih mjera promjene blagostanja i promjene potrošačeva probitka, konačno opisao Robert Wilig. U okviru te numeričke analize Willig je promatrao odnose između površina koje opisuju promjenu potrošačeva probitka, ekvivalentne i kompenzacijske varijacije. Te je površine prikazivao u prostoru kojem je na ordinati bila cijena, a na apscisi količina. Zamijenimo li mjesta dualnim varijablama, mogu se izvesti dualne površine koje opisuju duale poznatih pojmova. Ovdje svoju pažnju usmjeravamo na kompenzacijsku varijaciju i izvodimo novu novčanu mjeru promjene blagostanja u dualnom prostoru. Polazište je analize novi prikaz kompenzacijske varijacije u dualnom prostoru.

Da bi se odredila potrošačeva promjena blagostanja uslijed smanjenja cijene prvog dobra, postavlja se pitanje koliko je potrošač najviše spreman platiti za mogućnost kupnje prvog dobra pri novoj cijeni. Drugim riječima, treba odrediti koliko je smanjenje potrošačeva dohotka potrebno da bi potrošač pri novim cijenama ostvario razinu blagostanja koju je ostvarivao prije promjene cijene. Takva se vrsta kompenzacije naziva kompenzacijskom varijacijom ili kompenzacijom po Hicksu /19/. Može se izraziti pomoću indirektne funkcije korisnosti na sljedeći implicitni način:

$$v(p_1^1, p_2^0, M - CV) = v(p_1^0, p_2^0, M) = u^0 \tag{373}$$

Kako se preferencije potrošača mogu jednako dobro opisati i funkcijom izdataka, kompenzacijska se varijacija eksplicitno izražava preko nje. Promjena je potrošačeva dohotka potrebna da potrošač ostvari istu razinu korisnosti pri početnom vektoru cijena i dohotku M i novim cijenama i prilagođenom dohotku jednaka razlici minimalnih izdataka pri novim i starim cijenama i razini blagostanja u^0,

$$CV = e(p_1^1, p_2^0, u^0) - e(p_1^0, p_2^0, u^0) \tag{374}$$



Slika 5. Kompenzacijska varijacija u dualnom prostoru

Na slici 5. promjena je izdataka jednaka

$$CV = \Delta M = \frac{0B}{0A} \cdot M - M = e(\frac{\mathbf{p}^1}{M}, u^0) \cdot M - M = e(\mathbf{p}^1, u^0) - e(\mathbf{p}^0, u^0). \quad (375)$$

Povezujući integral i derivaciju Newton-Leibnitzovom formulom tu površinu opisuje integral

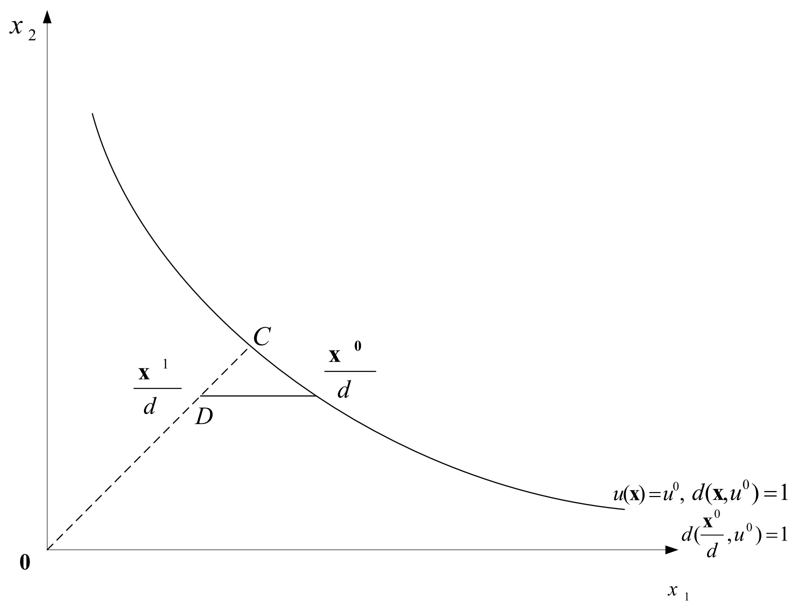
$$\int_{p_1^1}^{p_1^0} \frac{\partial e}{\partial p_1} dp_1 \quad (376)$$

Prema Shepardovoj lemi promjena izdataka na malu jedinicu povećanja cijene jednaka je količini u ravnoteži pa je kompenzacijska varijacija jednaka površini koju određuje kompenzirana krivulja potražnje,

$$CV = e(p_1^0, p_2^0, u^0) - e(p_1^1, p_2^0, u^0) = \int_{p_1^1}^{p_1^0} x_1^H(p_1, p_2^0, u^0) dp_1 \quad (377)$$

Dualno se može promatrati promjena blagostanja zbog smanjenja količine prvog dobra kao promjena udaljenosti koja se može implementirati proporcionalnom promjenom količina. Ta je promjena udaljenosti jednaka razlici udaljenosti nove i stare kombinacije dobara od polazne krivulje indiferencije.

$$\Delta d = d(x_1^1, x_2^0, u^0) - d(x_1^0, x_2^0, u^0) \quad (378)$$



Slika 6. Dual kompenzacijskoj varijaciji u primarnom prostoru

Na slici 6. promjena je udaljenosti jednaka

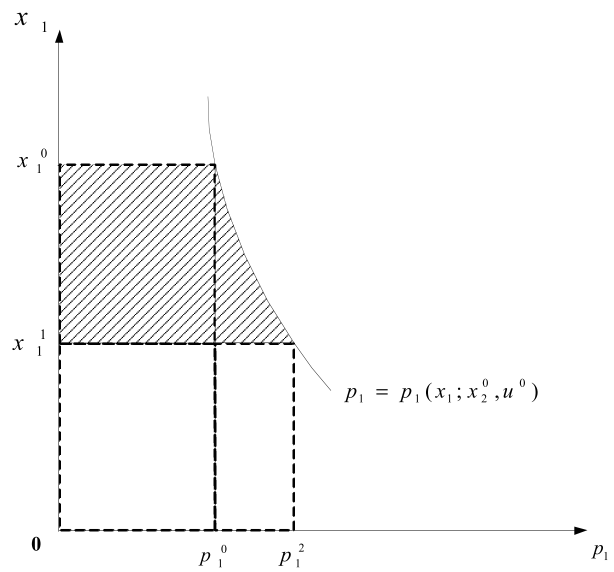
$$\Delta d = \frac{0D}{0C}d - d = d(\frac{\mathbf{x}^1}{d}, u^0) \cdot d - d = d(\mathbf{x}^1, u^0) - d(\mathbf{x}^0, u^0) \tag{379}$$

Povezujući integral i derivaciju Newton-Leibnitzovom formulom tu površinu opisuje integral

$$\int_{x_1^0}^{x_1^1} \frac{\partial d(x_1; x_2^0, u^0)}{\partial x_1} dx_1 \tag{380}$$

Shepard-Hanochovom lemom otkriva se kako tu promjenu udaljenosti opisuje površina ispod inverzne kompenzirane krivulje potražnje

$$\int_{x_1^0}^{x_1^1} p_1(x_1; x_2^0, u^0) dx_1 \tag{381}$$



Slika 7. Dual kompenzacijskoj varijaciji

Promjena udaljenosti može se aproksimirati površinom ispod inverzne nekompenzirane krivulje potražnje. Očekuje se da će numerička aproksimacija nove mjere promjene blagostanja zauzeti važno mjesto u analizi inverznih funkcija potražnje i numeričkoj analizi.

10. ZAKLJUČAK

Dualnost u mikroekonomskoj teoriji u širem smislu omogućuje da se isti problem sagleda iz različitih perspektiva. Pritom dualnost omogućuje da se postojeća znanja dokažu na jednostavniji način, da se izvedu rezultati koji su dualni poznatima i da se promjenom načina razmišljanja dođe do novih spoznaja. U radu se sintetiziraju znanja o dualnosti u teoriji ponašanja potrošača i na originalni način povezuju dualna svojstva funkcija koje opisuju ukus potrošača. Iz svojstava dualnih funkcija izvode se komparativno statički rezultati. Takva analiza u potpunosti rasvjetljava dualnost u teoriji ponašanja potrošača i uspostavlja nedvojbenu vezu između empirijski važnih Royeva identiteta i Shepardove leme u izvođenju nekompenziranih i kompenziranih funkcija potražnje. Posebna pozornost posvećena je novčanim mjerama promjene blagostanja. Zamjena primarnih varijabli dualnima omogućila je izvođenje dualnih površina koje opisuju duale poznatih pojmova. Izvodi se nova novčana mjera promjene blagostanja u dualnom prostoru. Polazište te analize je novi prikaz kompenzacijske varijacije u dualnom prostoru.

LITERATURA

1. Afriat, S. N. (1973c) *Direct and Indirect Utility*, Discussion Paper, Department of Economics, University of Waterloo, Canada.
2. Antonelli, G. B. (1886) *Sulla Teoria Matematica della Economia Politica*. Pisa: Nella tipografia del Falchetto. Engleski prijevod: “On the Mathematical Theory of Political Economy”, *Preferences, Utility and Demand*, uredili J. Chipman, L. Hurwicz, and H. Sonnenschein. New York: Harcourt Brace Jovanovich, 1971.
3. Blackorby, C., Primont, D., Russel, R. R. (1978) *Duality, Separability and Functional Structure*. New York: American Elsevier.
4. Blume, L. E. (2008) Convex Programming, U: Durlauf, S. N., Blume, L. E. (ur.), *The New Palgrave Dictionary of Economics,* Palgrave Macmillan. The New Palgrave Dictionary of Economics Online. <http://www.dictionaryofeconomics.com/article?id=pde2008_C000348> doi:10.1057/9780230226203.0314.
5. Blume, L. E. (2008) Duality, U: Durlauf, S. N., Blume, L. E. (ur.), *The New Palgrave Dictionary of Economics,* Palgrave Macmillan. The New Palgrave Dictionary of Economics Online. <http://www.dictionaryofeconomics.com/article?id=pde2008_D000196> doi:10.1057/9780230226203.0411.
6. Briec, W., Kerstens, K., Eeckaut, P. V. (2004) Non-convex Technologies and Cost Functions: Definitions, Duality and Nonparametric Tests of Convexity, *Journal of Economics*, 81, 155–192.
7. Chambers, R. G. (1988) *Applied production analiysis*: *A Dual Approach*. Cambridge: Cambridge University Press.
8. Chambers, R.G., Chung, Y., Färe, R. (1996) Benefit and Distance Functions, *Journal of Economic Theory*, 70, 407–419.
9. Darrough, M. N., Southey, C. (1977) Duality in Consumer Theory Made Simple: The Revealing of Roy’s Identity, *Canadian Journal of Economics*, 10, 307–317.
10. Deaton, A., Muellbauer, J. (1980) *Economics and Consumer Behaviour*, Cambridge: Cambridge University Press.
11. Debreu, G. (1959) *Theory of Value: An axiomatic analysis of economic equilibrium*. New York: John Wiley.

12. Diewert, W. E. (1971) An Applications of the Shepard Duality Theorem: A Generalized Leontief Production Function, *Journal of Political Economy*, 79, 481–507.
13. Diewert, W. E. (1974a) Applications of Duality Theory, *Frontiers of Quantitative Economics*, vol. II M. D. Intriligator i J. W. Kendrick (urednici), Amsterdam: North Holland.
14. Epstein, L. (1981a) Generalized Duality and Integrability, *Econometrica*, 49, 655–678.
15. Epstein, L. (1981b) Duality Theory and Functional Forms for Dynamic Factor Demand, *Review of Economic Studies*, 48, 81–95.
16. Färe, R., Primont, D. (1994) The Unification of Ronald W. Shepard's Duality Theory, *Journal of Economics*, 60, 199–207.
17. Fenchel, W. (1953) *Convex Cones, Sets, and Functions*. Princeton: Department of Mathematics, Princeton University.
18. Hanoch, G. (1978) Generation of New Production Functions Through Duality. U: Fuss, M., McFadden, D., *Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications*, *Vol II, Part IV*, Amsterdam: North-Holland.
19. Hicks, J. (1946) *Value and Capital*. Drugo izdanje, Oxford: Clarendon Press.
20. Hotelling, H. (1932) Edgeworth' s Taxation Paradox and the Nature of Supply and Demand Functions, *Journal of Political Economy*, 40, 557–616.
21. Hotelling, H. (1935) Demand Functions with Limited Budgets, *Econometrica,* 3, 66–78.
22. Houthakker, H. S. (1952-53) Compensated Changes in Quantities and Qualities Consumed, *Review of Economic Studies*, 19, 155–164.
23. Katzner, D. H. (1970) *Static Demand Theory*. New York: Macmillan.
24. Konüs, A. A. (1924) The Problem of the True Index of the Cost of Living, prevedeno u *Econometrica* 1939, 7, 10–29.
25. Konüs, A. A., Byushgens, S.S. (1926) K problem pokupatelnoi cili deneg, *Voprosi Konyunkturi II*. Engleski prijevod "On the Problem of the Purchasing Power of Money", *The Problems of Economic Conditions*, 2, 151–171.
26. Lau, L. J. (1969) Duality and the Structure of Utility Functions, *Journal of Economic Theory*, 1, 374 –359.
27. Malmquist, S. (1953) Index Numbers and Indifference Curves, *Trabajos de Estatistica*, 4,1, 209–241.
28. McFadden, D. (1966) Cost, Revenue and Profit Functions: A cursory review. Institute for Business and Economic Research Working Paper no. 86, Barkeley, CA: University of California.
29. McFadden, D., (1978) Cost, Revenue, and Profit Functions. U: Fuss, M., McFadden, D., *Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications*, *Vol II,* Amsterdam: North-Holland, 2–109.
30. McFadden, D. (1978) Estimation Techniques for the Elasticity of Substitution and other Production Parameters. U: Fuss, M., McFadden, D., *Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications*, *Vol II, Part IV*, Amsterdam: North-Holland, 73–123.

31. McKenzie, L. W. (1957) Demand Theory without a Utility Index, *Review of Economic Studies*, 24, 185–189.
32. Paris, Q., Caputo, M. R. (1995) The Rhetoric of Duality, *Journal of Agricultural and Resource Economics*, 20, 195–214.
33. Paris, Q., Caputo, M. R. (2003) A Dual Approach to Estimation With Constant Prices, working paper, Department of Agricultural and Resource Economics, University of California.
34. Paris, Q. (2010) *Economic Foundations of Symmetric Programming*. Cambridge: Cambridge University Press.
35. Rockafellar, R. T. (1970) *Convex Analysis*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
36. Roy, R. (1942) *De l' utilite*. Paris: Hermann.
37. Samuelson, P. A. (1965) Using Full Duality to Show that Simultaneously Additive Direct and Indirect Utilities Implies Unitary Price Elasticity of Demand, *Econometrica,* 33, 781–796.
38. Samuelson, P. A. (1972) Maximum Principles in Analytical Economics, *American Economic Review,* 62(3), 249–262.
39. Shepard, R. W. (1953) *Cost and Production Functions*. Princeton: Princeton University Press.
40. Shepard, R. W. (1970) *Theory of Cost and Production Functions*. Princeton: Princeton University Press.
41. Uzawa, H. (1964) Duality Principles in the Theory of Cost and Production, *International Economic Review*, 5, 216–220.
42. Ville, H. (1946) Sur les conditions d'existence d'une Ophélimité Totale et d'un Indice du Niveau des Prix, *Annales de l' Université de Lyon*, 9, 32–39 (English translation: The existence conditions of a utility function, *Review of Economic Studies*, 19 (1951), 123–128.
43. Vrankić, I. (2009) Proširena funkcija korisnosti i inverzne funkcije potražnje, *Zbornik Ekonomskog fakulteta u Zagrebu*, 6, 1–12.
44. Weddepohl, N. H. (1970) *Axiomatic Choice Model and Duality*, Groningen: Rotterdam University Press.
45. Willig, R. D. (1976) Consumer's Surplus without Apology, *American Economic Review*, 66, 589–597.
46. Wold, H. (1943a) A Synthesis of Pure Demand Analysis I (Dedicated to Professor Harald Cramér on the occasion of his 50th birthday September 25th 1943), *Skandinavisk Aktuarietidskrift [Scandinavian Actuarial Journal]*, 26, 85–118.
47. Wold, H. (1944) A Synthesis of Pure Demand Analysis II , *Skandinavisk Aktuarietidskrift [Scandinavian Actuarial Journal]*, 27, 69–120.